D. MANGERON • N. IRIMICIUC

Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie

Mecanica sistemelor de rigide

EDITURA TEHNICA

Scanned with CamScanner

DUMITRU MANGERON * NICOLAIE IRIMICIUC

MECANICA RIGIDELOR CU APLICAȚII IN INGINERIE

Volumul II

MECANICA SISTEMELOR DE RIGIDE

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREȘTI

Scanned with CamScanner

CUPRINS

Partea a treia: CINEMATICA ŞI DINAMICA SISTEMELOR DE RIGIDE . . 7

Capitolul VI: **Cinematica sistemelor de rigide** 8

§11. Transmisii de mişcări prin cuple cinematice şi mecanisme. 8
11.1. Legături interioare. Cuple cinematice. Mecanisme 8
11.2. Transmisii de mişcări prin cuple cinematice uzuale 17
11.3. Transmisii de mişcări prin mecanisme uzuale 124
§12. Problemele fundamentale ale cinematicii sistemelor de rigide 130
12.1. Parametrii de poziţie independenţi ai unui sistem mecanic . . . . . .
12.2. Exprimarea parametrilor de poziţie şi a parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor unui sistem mecanic în funcţie de parametrii de poziţie independenţi 145
12.3. Sisteme de deplasări elementare ale unui sistem mecanic 171

Capitolul VII: **Dinamica sistemelor de rigide** 185

§ 13. Probleme generale ale dinamicii sistemelor de rigide 185
13.1. Caracteristicile inerţiale ale sistemelor mecanice 185
13.2. Caracteristicile cinetice ale sistemelor mecanice 198
13.3. Caracteristicile dinamice ale sistemelor mecanice 216
§14. Ecuaţiile şi problemele dinamicii sistemelor de rigide 280
14.1. Teoremele fundamentale ale dinamicii sistemelor mecanice 281
14.2. Forme ale ecuaţiilor dinamicii sistemelor mecanice 299
14.3. Problemele dinamicii sistemelor de rigide 366
14.4. Ecuaţiile şi problemele staticii sistemelor de rigide 373
§15. Integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale dinamicii sistemelor mecanice. 391
15.1. Forme generale ale ecuaţiilor diferenţiale ale dinamicii sistemelor mecanice 404
15.2. Integrale prime ale sistemului de ecuaţii diferenţiale ale dinamicii sistemelor mecanice 415
15.3. Integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării unui sistem mecanic . . . . . .

Partea a patra: PROBLEME SPECIALE ALE MECANICII SISTEMELOR DE RIGIDE. 425

Capitolul VIII: **Probleme speciale ale dinamicii sistemelor mecanice** 425

§16. Mecanica maşinilor simple 425
16.1. Definiţii. Noţiuni de bază. Caracteristici generale 425
16.2. Maşini simple uzuale 428

Scanned with CamScanner

§17. Mecanica sistemelor articulate 470
17.1. Mecanica poligoanelor articulate 472
17.2. Statica grinzilor cu zăbrele 487
§18. Mecanica firelor 503
18.1. Ecuaţiile generale ale mecanicii firelor 503
18.2. Probleme uzuale de statica firelor 515
§19. Mecanica ciocnirilor 540
19.1. Ecuaţiile mecanicii ciocnirilor 540
19.2. Probleme utzuale ale mecanicii ciocnirilor 567
§20. Mecanica corpurilor cu mase variabile 581
20.1. Dinamica rigidului cu masă variabilă 582
20.2. Dinamica sistemelor de rigide cu mase variabile 622
BIBLIOGRAFIE 643

Scanned with CamScanner

Partea a treia

CINEMATICA ŞI DINAMICA SISTEMELOR DE RIGIDE

În practica inginerească, ecuaţiile finite ale mişcării unui rigid — şi deci şi parametrii lui cinematici de ordinul întîi, $\bar{v}_Q$ şi $\bar{\omega}$, şi de ordinul doi, $\bar{a}_Q$ şi $\bar{\varepsilon}$ — sînt, iniţial, prestabilite, ţinîndu-se seama de operaţia pe care urmează să o execute rigidul respectiv în procesul tehnologic în care este folosit.

Sursa de energie cinetică, necesară efectuării mişcării respective, o constituie un motor, care transformă în energie mecanică o altă formă de energie (electrică, calorică etc.) Cum mişcarea pe care o poate transmite direct un asemenea motor este, cel mai adesea, o rotaţie în jurul unei axe fixe, sînt necesare elemente de legătură — un anumit număr de rigide intermediare introduse între elementul motor şi elementul final, cu legături convenabil aplicate între ele —, care să transforme mişcarea de rotaţie primită de la motor în mişcarea pe care o reclamă procesul tehnologic pentru rigidul final, cel mai adesea o unealtă.

Un asemenea ansamblu de rigide — unele din ele putînd fi asimilate şi cu puncte materiale —, care se interacţionează ca urmare a legăturilor impuse, se numeşte *sistem mecanic*, iar rigidele din care este alcătuit ansamblul considerat sînt numite *elementele*, sau *organele* sistemului mecanic.

Prezentarea metodelor de studiere a transmisiilor — de la un element la altul — de mişcări şi de solicitări într-un asemenea sistem mecanic va constitui conţinutul celei de-a treia părţi a prezentei lucrări.

Scanned with CamScanner

Capitolul VI

CINEMATICA SISTEMELOR DE RIGIDE

§11. Transmisii de mișcări prin cuple cinematice și mecanisme

11.1. *Legături interioare. Cuple cinematice. Mecanisme*

Legăturile aplicate între două elemente ale unui sistem mecanic nu se deosebesc, ca realizare tehnică, de cele care leagă un rigid oarecare al sistemului de corpurile din mediul înconjurător, care nu aparţin sistemului, legături care au fost examinate în primul volum al prezentei lucrări, MECANICA RIGIDULUI.

Pentru a putea deosebi totuși, în expunerea curentă a problemelor mecanicii sistemelor de rigide, legăturile dintre elementele ce alcătuiesc sistemul mecanic de legăturile dintre elementele sistemului și corpurile exterioare acestuia, primele vor fi numite *legături interioare*, iar ultimele *legături exterioare*.

Atît legăturile exterioare, cît și cele interioare pot fi:

— *Legături active*, realizate prin elemente elastice cu mase neglijabile — arcuri elicoidale și spirale, bare elastice deformate prin încovoiere, tije elastice deformate prin torsionare — și caracterizate prin aceea că nu reduc, între anumite limite, numărul parametrilor de poziţie variabili în timp, rămaşi independenţi în urma aplicării legăturilor exterioare pasive, ai rigidelor supuse la asemenea legături.

— *Legături pasive*, realizate prin tipurile fundamentale de legături examinate în prima parte a lucrării — reazeme, articulaţii și fire sau tije rigide* — sau prin combinaţii de asemenea legături fun-

* Se face precizarea că deoarece două rigide, legate între ele prin încastrare, ale unui sistem mecanic se comportă, în timpul mișcării sistemului, ca un bloc unitar, cu aceiași parametri de poziţie și cinematici, în problemele de cinematica și dinamica sistemelor ele vor fi considerate totdeauna ca formînd un singur rigid în mișcare, cu caracteristicile inerţiale corespunzătoare ansamblului lor.

Scanned with CamScanner

damentale, caracterizate prin faptul că introduc restricţii parametrilor de poziţie ai celor două rigide cărora le-a fost aplicată —, respectiv ai rigidului studiat în cazul legăturii exterioare —, condiţionîndu-se în modul acesta mişcarea unuia din corpuri de mişcarea celuilalt.

Utilizîndu-se şi în această parte a lucrării, ca şi în primul volum, o terminologie adecvată mecanicii, întrucîtva diferită de cea folosită în teoria mecanismelor şi maşinilor, dar justificată de necesitatea extinderii concluziilor cinematicii la prezentarea dinamicii sistemelor de rigide, se vor introduce următorii doi termeni cu sensuri generalizate :

— termenul de *cuplaj între două elemente*, prin care se va înţelege interdependenţa cinematică dintre elemente realizată prin orice formă de legătură pasivă, fie fundamentală, fie complexă;

— termenul de *cuplă cinematică* între două elemente, prin care se va înţelege aici orice tip de legătură pasivă, realizată cu elemente de legătură de construcţie specială, obişnuit cu mase neglijabile.

În acest din urmă sens vor fi considerate şi aici cele două mari categorii de cuple cinematice menţionate în primul volum — spaţiale şi plane —, ca tipuri de legături pasive aplicate elementelor unui sistem mecanic.

Un ansamblu de rigide în interacţiune se va numi *sistem mecanic spaţial* atunci cînd mişcările elementelor lui, precum şi solicitările aplicate lor, au orientări oarecare în spaţiu; dacă în cazul unui asemenea ansamblu sînt satisfăcute simultan condiţiile :

— toate elementele ansamblului execută mişcări plan-paralele (se includ aici şi rotaţiile şi translaţiile plane), în plane directoare paralele, foarte apropiate între ele;

— solicitările aplicate elementelor corespund unor distribuţii plane de forţe, situate în planele directoare ale mişcărilor respective, atunci ansamblul este numit *sistem mecanic plan*.

Considerînd un element (S_i) al unui sistem mecanic, poziţia sa, în raport cu reperul fix *Oxyz* la care este raportată mişcarea sistemului mecanic, va fi determinată, în ipoteza desfiinţării tuturor legăturilor aplicate lui — şi exterioare şi interioare —, printr-un număr de

$$p_v = 6 \qquad (11.1)$$

parametri de poziție variabili în timp în cazul cînd aparține unui sistem mecanic spațial — acești parametri fiind reprezentați prin mărimile x_{Q_i}, y_{Q_i}, z_{Q_i}, ψ_i, φ_i și θ_i — și printr-un număr de

$$p_v = 3 \tag{11.2}$$

parametri de poziție — reprezentați prin mărimile x_{Q_i}, y_{Q_i} și φ_i —, în cazul cînd elementul aparține unui sistem mecanic plan.

Legăturile exterioare aplicate unui asemenea element (S_i) al sistemului mecanic se vor traduce, ca și în mecanica rigidului, printr-un număr l_{ext_i} de *ecuații de legătură exterioare*, egal cu

$$l_{ext_i} \leqslant 5 \tag{11.3}$$

în cazul sistemelor mecanice spațiale, aceste ecuații avînd forma generală

$$f_{ext_\lambda}(x_{Q_i}, y_{Q_i}, z_{Q_i}, \psi_i, \varphi_i, \theta_i ; t) = 0 \tag{11.4}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{ext_i})$$

și egal cu

$$l_{ext_i} \leqslant 2 \tag{11.5}$$

în cazul sistemelor mecanice plane, forma generală a acestor ecuații fiind acum

$$f_{ext_\lambda}(x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i ; t) = 0 \tag{11.6}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{ext_i}),$$

considerîndu-se mai sus numai cazul *legăturilor olonome*, întîlnit curent în practica inginerească.

În ipoteza că numai legăturile interioare aplicate elementului (S_i) ar fi desființate, legăturile exterioare la care este supus acest element ar reduce numărul parametrilor lui de poziție independenți de la valoarea p_v la valoarea

$$p_i = p_v - l_{ext_i}, \tag{11.7}$$

Scanned with CamScanner

purtînd, în continuare, numele de *numărul parametrilor de poziţie independenţi ai rigidului* (S_i) *izolat din sistem.*

Legăturile interioare aplicate între două rigide, (S_i) şi (S_j) ale sistemului mecanic fac ca parametrii lor de poziţie — şi, uneori, şi cei cinematici de ordinul întîi — să se condiţioneze reciproc, în baza unor relaţii asemănătoare celor stabilite pentru legăturile exterioare, dar purtînd acum numele de *ecuaţii de legătură interioară.*

De cele mai multe ori aceste din urmă ecuaţii stabilesc, pe bază de consideraţii geometrice şi cinematice, interdependenţe numai între parametrii de poziţie ai celor două rigide cuplate printr-o legătură pasivă, în care caz relaţiile respective se numesc *ecuaţii de legătură interioară finite,* sau *geometrice*; prin derivarea lor în raport cu timpul se obţin relaţii care vor exprima interdependenţe şi între parametrii cinematici de ordinul întîi ai celor două rigide cuplate, aceste relaţii purtînd numele de *ecuaţii de legătură interioară diferenţiale,* sau *cinematice.*

Alteori, aşa cum se va putea vedea şi din expunerea ulterioară, vor putea fi obţinute direct, pe bază de consideraţii pur cinematice, ecuaţiile de legătură interioară diferenţiale pentru o pereche de rigide cuplate între ele, aceste ecuaţii putînd fi integrabile, sau neintegrabile.

Legăturile pasive interioare exprimate prin ecuaţii de legătură finite, precum şi cele exprimate prin ecuaţii diferenţiale integrabile, se numesc *legături interioare olonome* şi traducerea lor matematică poate fi făcută, în ultimă instanţă, numai prin ecuaţii de forma

$$f_{int_\lambda}(x_{Q_i}, y_{Q_i}, z_{Q_i}, \psi_i, \varphi_i, \theta_i ; x_{Q_j}, y_{Q_j}, z_{Q_j}, \psi_j, \varphi_j, \theta_j ; t) = 0$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{ij} = l_{ji}) \qquad (11.8)$$

în cazul sistemelor mecanice spaţiale şi de forma

$$f_{int_\lambda}(x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i ; x_{Q_j}, y_{Q_j}, \varphi_j ; t) = 0$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{ij} = l_{ji}) \qquad (11.9)$$

în cazul sistemelor mecanice plane.

Legăturile pasive interioare exprimate prin ecuaţii diferenţiale neintegrabile se vor numi *legături interioare neolonome* şi, ca şi în mecanica rigidului, ele nu vor constitui nici în această parte a lucrării obiectul vreunei preocupări speciale.

Scanned with CamScanner

În consecinţă, considerînd, în continuare, numai cazul legăturilor interioare olonome, se va putea face şi aici împărţirea lor în *legături reonome*, sau *nestaţionare* — caracterizate prin prezenţa, în mod explicit, a timpului t în ecuaţiile de legătură, ca în ecuaţiile (11. 8) sau (11. 9), această prezenţă evidenţiind deformarea în timp a legăturii pasive aplicate rigidelor cuplate (S_i) şi (S_j) — şi în *legături scleronome*, sau *staţionare* — caracterizate prin absenţa timpului t în ecuaţiile de legătură, deci prin nedeformarea în timp a legăturilor pasive respective —, ecuaţiile de legătură avînd în acest caz forma generală

$$f_{int_\lambda}(x_{Q_i}, y_{Q_i}, z_{Q_i}, \psi_i, \varphi_i, \theta_i; x_{Q_j}, y_{Q_j}, z_{Q_j}, \psi_j, \varphi_j, \theta_j) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l_{ij} = l_{ji}) \tag{11.10}$$

pentru sistemele mecanice spaţiale şi forma

$$f_{int_\lambda}(x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i; x_{Q_j}, y_{Q_j}, \varphi_j) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l_{ij} = l_{ji}) \tag{11.11}$$

pentru sistemele mecanice plane.

Relaţiile obţinute prin derivarea în raport cu timpul a ecuaţiilor de legătură interioare finite (11.8) sau (11.9) — respectiv (11. 10) sau (11.11) pentru cazul legăturilor staţionare — stabilesc interdependenţe între parametrii cinematici de ordinul întîi ai rigidelor (S_i) şi (S_j) cuplate prin o legătură pasivă şi poartă din acest motiv numele de *ecuaţii de transmisie a mişcării*; aceste din urmă ecuaţii vor avea deci forma generală

$$\frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial x_{Q_i}}\dot{x}_{Q_i} + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial y_{Q_i}}\dot{y}_{Q_i} + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial z_{Q_i}}\dot{z}_{Q_i} + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial \psi_i}\dot{\psi}_i + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial \varphi_i}\dot{\varphi}_i + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial \theta_i}\dot{\theta}_i +$$

$$\frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial x_{Q_j}}\dot{x}_{Q_j} + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial y_{Q_j}}\dot{y}_{Q_j} + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial z_{Q_j}}\dot{z}_{Q_j} + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial \psi_j}\dot{\psi}_j + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial \varphi_j}\dot{\varphi}_j +$$

$$\frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial \theta_j}\dot{\theta}_j + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial t} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l_{ij} = l_{ji}) \tag{11.12}$$

în cazul sistemelor mecanice spaţiale şi forma

$$\frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial x_{Q_i}} \dot{x}_{Q_i} + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial y_{Q_i}} \dot{y}_{Q_i} + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial \varphi_i} \dot{\varphi}_i + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial x_{Q_j}} \dot{x}_{Q_j} + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial y_{Q_j}} \dot{y}_{Q_j} +$$

$$+ \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial \varphi_j} \dot{\varphi}_j + \frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial t} = 0$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{ij} = l_{ji}) \qquad (11.13)$$

în cazul sistemelor mecanice plane, ultimul termen din ecuaţiile (11.12) şi (11.13) lipsind, evident, dacă legăturile sînt staţionare $\left(\frac{\partial f_{int_\lambda}}{\partial t} = 0\right)$.

Ca şi în cazul legăturilor exterioare, şi legăturile interioare pasive între elementele unui sistem mecanic se realizează practic tot prin *cuple cinematice*, acestea fiind, cel mai adesea, combinaţii de legături interioare fundamentale; numărul total de ecuaţii de legătură interioară pe care le introduce o cuplă cinematică între parametrii de poziţie ai celor două rigide cuplate va determina *clasa cuplei* respective, această clasă depinzînd şi aici de următorii doi factori:

— de tipurile de legături fundamentale care intră în alcătuirea cuplei;

— de funcţionalitatea cuplei, respectiv de caracterul — spaţial sau plan — al sistemului mecanic căruia îi sînt aplicate cuplele.

Ultimul dintre aceşti factori justifică clasificarea şi a cuplelor cinematice interioare în *cuple spaţiale* — notate, în continuare, cu simbolul C_{isk} — şi în *cuple plane* — notate cu simbolul C_{ip_k} —, k fiind clasa cuplei; prin adăugarea, la cele k ecuaţii de legătură de forma (11.11) corespunzătoare unei cuple plane, a ecuaţiilor de forma

$$f_1(z_{Q_i}; z_{Q_j}) = z_{Q_i} - z_{Q_j} \equiv 0; \; f_2(\psi_i; \psi_j) = \psi_i - \psi_j \equiv 0;$$

$$f_3(\theta_i; \theta_j) = \theta_i - \theta_j = 0, \qquad (11.14)$$

Scanned with CamScanner

rezultînd din modul de funcţionare a cuplei plane, orice cuplă interioară plană de clasa k va putea fi considerată ca o cuplă interioară spaţială de clasa $(k + 3)$, adică se va putea scrie

$$C_{ip_k} \equiv C_{is_{k+3}} \tag{11.15}$$

În legătură cu clasa k a unei cuple cinematice interioare mai trebuie făcută precizarea că întrucît o asemenea cuplă permite ca cel puţin unul din parametrii de poziţie ai unuia din rigidele cuplate să varieze independent de parametrii de poziţie ai celuilalt rigid, clasa ei va trebui să satisfacă condiţiile

$$1 \leqslant k \leqslant p_v - 1 \tag{11.16}$$

O porţiune dintr-un sistem mecanic, formată dintr-un număr oarecare de elemente care îşi transmit unul altuia mişcarea, transformînd-o pe parcurs, este numită *lanţ cinematic*. Elementele unui lanţ cinematic pot fi împărţite în două mari categorii:

— *elemente conducătoare*, reprezentate prin organele care primesc mişcarea de la corpuri exterioare lanţului considerat, transmiţînd-o apoi, modificată, restului de elemente ale lanţului;

— *elemente conduse*, reprezentate prin toate elementele lanţului care primesc mişcarea, direct sau prin organe intermediare, de la elementele conducătoare.

Se pot face următoarele clasificări ale lanţurilor cinematice:

— *Clasificarea din punctul de vedere al prezenţei, sau absenţei, în lanţ a elementelor singulare.*

Se numeşte *element singular* al unui lanţ cinematic elementul căruia îi este aplicată o singură cuplă, cinematică, indiferent de clasa ei.

Din punctul de vedere menţionat mai sus, lanţurile cinematice se împart în:

1) Lanţuri cinematice deschise, care conţin cel puţin un element singular;

2) Lanţuri cinematice închise, care nu conţin nici un element singular.

— *Clasificarea din punctul de vedere al structurii lanţurilor cinematice*, acestea din urmă putînd fi:

1) Lanţuri cinematice simple, cînd elementele constitutive sînt supuse la cel mult două cuple exterioare şi interioare;

2) Lanţuri cinematice complexe, cînd conţin cel puţin un element căruia îi sînt aplicate mai mult de două cuple interioare şi exterioare.

— *Clasificarea din punctul de vedere al posibilităţii de determinare a poziţiilor elementelor conduse.*

Din acest ultim punct de vedere lanţurile cinematice se împart în :

1) Lanţuri cinematice desmodrome, în care, pentru poziţii determinate ale elementelor conducătoare, corespund poziţii univoc determinate ale elementelor conduse;

2) Lanţuri cinematice nedesmodrome, în care elementele conduse pot avea mai multe poziţii pentru poziţii determinate ale elementelor conducătoare.

Un lanţ cinematic închis desmodrom, avînd şi un element fixat fie în spaţiu, fie de un alt organ al sistemului mecanic din care face parte lanţul, este numit *mecanism spaţial*, respectiv *mecanism plan*, după cum sistemul mecanic, căruia îi aparţine este spaţial, sau plan.

Notînd cu n_M numărul elementelor care intră în componenţa unui mecanism — în acest număr fiind inclus şi elementul fixat menţionat, numit încă şi *elementul bază* al mecanismului —, cu n_{eM_k} numărul cuplelor exterioare de clasa k aplicate acestor elemente şi cu n_{iM_k} numărul cuplelor interioare de clasa k la care sînt supuse elementele, numărul parametrilor de poziţie ai mecanismului, care rămîn independenţi în urma aplicării cuplelor exterioare şi interioare, va fi dat de relaţia

$$m_M = p_v(n_M - 1) - \sum_{k=1}^{p_v-1} k(n_{eM_k} + n_{iM_k}) \tag{11.17}$$

cu formele concrete

$$m_M = 6(n_M - 1) - \sum_{k=1}^{5} k(n_{eM_{s;k}} + n_{iM_{s,k}}) \tag{11.18}$$

în cazul mecanismelor spațiale și

$$\boxed{m_M = 3(n_M - 1) - \sum_{k=1}^{2} k(n_{eM_{p,k}} + n_{iM_{p,k}})} \qquad (11.19)$$

în cazul mecanismelor plane. (În ultimele două relații, indicii s și p se referă la mecanisme spațiale, respectiv mecanisme plane).

Numărul m_M poartă numele de *numărul gradelor de mobilitate ale mecanismului*, iar relația (11.17) reprezintă *formula structurală generală a mecanismelor*; relația (11.18) mai este cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de *formula lui Somov-Malîșev*, iar relația (11.19), cu modificarea

$$\sum_{k=1}^{2} k(n_{eM_{p,k}} + n_{iM_{p,k}}) = (n_{eM_{p,1}} + n_{iM_{p,1}}) + 2(n_{eM_{p,2}} + n_{iM_{p,2}}) =$$

$$= (n_{eM_{s,4}} + n_{iM_{s,4}}) + 2(n_{eM_{s;5}} + n_{iM_{s,5}})$$

— ușor de înțeles prin schimbarea clasei culpelor plane în urma asimilării lor cu cuple spațiale — este numită *formula lui Cebîșev*.

Numărul gradelor de mobilitate ale unui mecanism corespunde, de regulă, cu numărul elementelor lui conducătoare.

În practica inginerească sînt folosite curent mecanismele cu 1 și 2 grade de mobilitate, primele fiind utilizate, cel mai adesea, pentru a suprapune peste o mișcare comandată a unui element al sistemului mecanic o a doua mișcare, transmisă de la un alt element, iar cele cu două grade de mobilitate pentru a se regla mișcarea unui element al sistemului mecanic prin suprapunerea mișcărilor primite de la alte două elemente ale sistemului, dintre care una variabilă după o anumită lege prescrisă.

În continuare, vor fi stabilite formele ecuațiilor de legătură și ale ecuațiilor de transmisie a mișcărilor pentru cele mai uzuale tipuri de cuple cinematice interioare și de mecanisme de transmisie a mișcării.

Scanned with CamScanner

11.2. *Transmisii de mişcări prin cuple cinematice uzuale*

11.2.1. Cuple cinematice interioare spaţiale

Pentru cuplele cinematice interioare spaţiale ($p_v = 6$), condiţia (11.16) va lua forma

$$1 \leqslant k \leqslant 5, \tag{11.20}$$

rezultînd astfel un număr de 5 clase de cuple cinematice spaţiale.

Considerînd o cuplă cinematică spaţială de clasa k aplicată elementelor (S_i) şi (S_j) ale unui sistem mecanic, ea va introduce, între parametrii de poziţie ai celor două rigide cuplate, un număr de k ecuaţii de legătură de forma (11.8), sau de forma (11.10), după cum este vorba de o cuplă nestaţionară, sau staţionară.

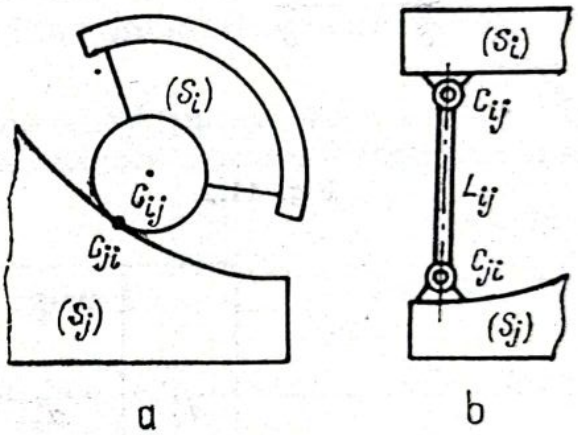


Fig. 11.1.

Aceste ecuaţii de legătură vor putea fi stabilite examinîndu-se restricţiile geometrice impuse de cuple punctelor teoretice de cuplare, C_{ij} în rigidul (S_i) şi C_{ji} (în rigidul (S_i)), restricţii care vor putea avea una din formele de mai jos:

— obligativitatea unuia din punctele teoretice de cuplare de a rămîne în permanenţă pe o porţiune din suprafaţa celuilalt rigid (cazul cuplei realizată prin rezemare din fig. 11.1 a);

— situarea celor două puncte teoretice de cuplare la o anumită distanţă $L_{ij} = \overline{C_{ij}\, C_{ji}}$ între ele, distanţă care poate fi constantă sau variabilă în timp după o lege determinată de variaţie (cazul cuplei realizată prin fir sau tijă din fig. 11.1.b);

— coincidenţa, în permanenţă, a celor două puncte teoretice de cuplare (cazul cuplei realizată prin articulaţie).

Întrucît în ecuaţiile de legătură vor intra, în toate situaţiile, coordonatele în raport cu reperul fix ale punctelor teoretice de cuplare, expresiile acestor coordonate în funcţie de parametrii de poziţie ai rigidelor respective vor fi stabilite mai jos.

Scanned with CamScanner

Pentru elementul (S_i) aceste expresii vor putea fi stabilite plecîndu-se de la relația vectorială evidentă din figura 11.2

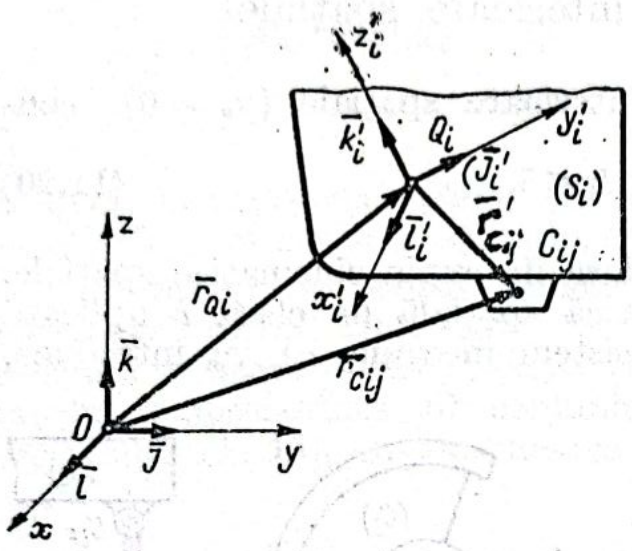


Fig. 11.2.

$$\bar{r}_{C_{ij}} = \bar{r}_{Q_i} + \bar{r}'_{C_{ij}} = (x_{Q_i}\bar{i} + y_{Q_i}\bar{j} + z_{Q_i}\bar{k}) + (x'_{C_{ij}}\bar{i}'_i + y'_{C_{ij}}\bar{j}'_i + z'_{C_{ij}}\bar{k}'_i), \tag{11.21}$$

— cu coordonatele $x'_{C_{ij}}$, $y'_{C_{ij}}$, $z'_{C_{ij}}$ funcții de timp în cazul cuplelor nestaționare — prin proiectare pe axele fixe și ținîndu-se seama de tabelul cosinusurilor directoare ale axelor reperului $(\mathscr{R}'_i) \equiv Q_i\, x'_i\, y'_i\, z'_i$, invariabil atașat elementului (S_i), în raport cu axele reperului fix $(\mathscr{R}) \equiv Oxyz$:

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}'_i$	α^i_{xx}	α^i_{xy}	α^i_{xz}
$\bar{j}'_i$	α^i_{yx}	α^i_{yy}	α^i_{yz}
$\bar{k}'_i$	α^i_{zx}	α^i_{zy}	α^i_{zz}

(11.22)

Rezultă astfel, pentru cazul cuplelor nestaționare, expresiile:

$$\begin{cases} x_{C_{ij}} = x_{Q_i} + x'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{xx} + y'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{yx} + z'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{zx} = x_{C_{ij}}(t\,;\, x_{Qi}, \psi_i, \varphi_i, \theta_i)\,; \\ y_{C_{ij}} = y_{Qi} + x'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{xy} + y'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{yy} + z'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{zy} = y_{C_{ij}}(t\,;\, y_{Qi}, \psi_i, \varphi_i, \theta_i)\,; \\ z_{C_{ij}} = z_{Qi} + x'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{xz} + y'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{yz} + z'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{zz} = z_{C_{ij}}(t\,;\, z_{Qi}, \psi_i, \varphi_i, \theta_i), \end{cases} \tag{11.23}$$

Scanned with CamScanner

cele nouă cosinusuri directoare putînd fi exprimate, cu ajutorul unor relaţii de forma (3.13), prezentate în primul volum al lucrării, în funcţie de unghiurile lui Euler corespunzătoare rigidului (S_i).

În mod analog vor fi stabilite expresiile coordonatelor faţă de reperul fix ale punctului teoretic de cuplare C_{ji}, din rigidul (S_j):

$$x_{C_{ji}} = x_{C_{ji}}(t\,;\, x_{Q_j},\, \psi_j,\, \varphi_j,\, \theta_j)\,;\; y_{C_{ji}} = y_{C_{ji}}(t\,;\, y_{Q_j},\, \psi_j,\, \varphi_j,\, \theta_j)\,;\; z_{C_{ji}} =$$

$$= z_{C_{ji}}(t\,;\, z_{Q_j},\, \psi_j,\, \varphi_j,\, \theta_j). \tag{11.24}$$

Se înţelege că expresiile (11.23) şi (11.24) — şi deci şi ecuaţiile de legătură — se vor simplifica în mod apreciabil în cazurile cînd elementele respective execută, ca urmare a legăturilor exterioare aplicate, mişcări particulare, acestea fiind în multe cazuri rotaţii în jurul unor axe fixe.

Cu aceste elemente pregătitoare, se va putea trece la prezentarea principalelor cuple cinematice interioare spaţiale, întîlnite mai des în aplicaţiile tehnice.

1) Cuple cinematice spaţiale de clasa I

Din aceste clase de cuple cinematice, caracterizate prin condiţia

$$k = 1, \tag{11.25}$$

fac parte următoarele tipuri uzuale de cuple spaţiale:

a) *Cupla sferă-plan de sprijin.* În cazul acestei cuple, reprezentată în fig. 11.3 a şi schematic în fig. 11.3. b, unul din elemente, de exemplu (S_i), se sprijină în permanenţă, prin intermediul unei mici sfere (Sf) introdusă într-o piesă specială de legătură (Ps) pe porţiunea de suprafaţă plană (Σ_j) a celui de-al doilea element (S_j); drept punct teoretic de cuplare se consideră centrul C_{ij} al sferei (Sf) care va rămîne în permanenţă într-un plan (Π'_j), paralel la suprafaţa (Σ_j) şi la distanţa de acest plan egală cu raza sferei.

Ecuaţia planului (Π'_j) în raport cu reperul $Q_j x'_j y'_j z'_j$, invariabil legat de elementul (S_j) va avea forma:

$$A'\, x'_j + B'\, y'_j + C'\, z'_j + D' = 0, \tag{11.26}$$

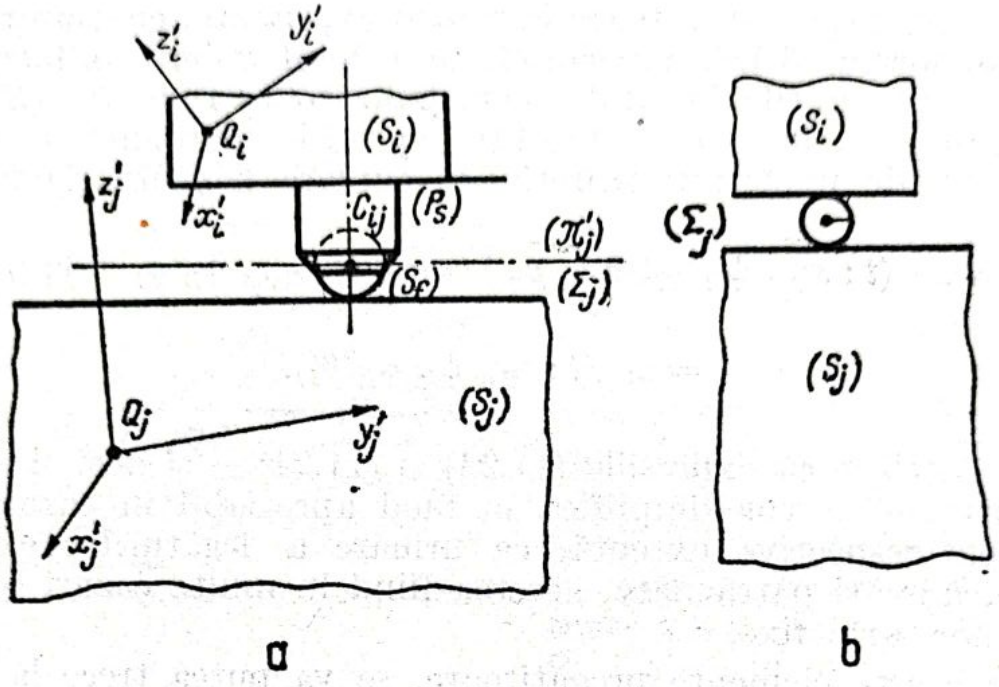


Fig. 11.3

în care coeficienții A', B', C' și D' vor fi constanți dacă suprafața plană (Σ_j) nu e deformabilă în timp (cazul cuplei staționare) și vor fi funcții de timp dacă suprafața plană (Σ_j) își schimbă, prin deformarea corpului, poziția în timp (cazul cuplei nestaționare).

Ecuația aceluiași plan (Π_j') în raport cu reperul fix $Oxyz$ va fi obținută prin înlocuirea, în ecuația (11.26), a coordonatelor x_j', y_j' și z_j' ale punctului curent B $(\bar{r}_j')$ al planului (Π_j') cu expresiile lor în funcție de coordonatele aceluiași punct în raport cu reperul fix, expresii care vor rezulta prin proiectarea, pe axele reperului $Q_jx_j'y_j'z_j'$, a ecuației vectoriale

$$\bar{r}_j' = \bar{r} - \bar{r}_{Q_j} = (x - x_{Q_j})\bar{i} + (y - y_{Q_j})\bar{j} + (z - z_{Q_j})\bar{k}, \quad (11.27)$$

— evidentă din fig. 11.3, a — și care au formele

$$\begin{aligned} x_j' &= (x - x_{Q_j})\alpha_{xx}^j + (y - y_{Q_j})\alpha_{xy}^j + (z - z_{Q_j})\alpha_{xz}^j; \\ y_j' &= (x - x_{Q_j})\alpha_{yx}^j + (y - y_{Q_j})\alpha_{yy}^j + (z - z_{Q_j})\alpha_{yz}^j; \\ z_j' &= (x - x_{Q_j})\alpha_{zx}^j + (y - y_{Q_j})\alpha_{zy}^j + (z - z_{Q_j})\alpha_{zz}^j. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Introducerea acestor expresii în ecuaţia (11.26) va conduce la următoarea ecuaţie a planului (Π_j') în raport cu reperul fix:

$$A(x - x_{Q_j}) + B(y - y_{Q_j}) + C(z - z_{Q_j}) + D' = 0, \quad (11.29)$$

cu coeficienţii A, B şi C funcţii de parametrii de poziţie ai rigidului (S_j) şi eventual şi de timp dacă este vorba de o cuplă nestaţionară, adică de forma

$$A = A'\alpha_{xx}^j + B'\alpha_{yx}^j + C'\alpha_{zx}^j = A(\psi_j, \varphi_j, \theta_j, ; t) \quad (11.30)$$

etc.

Condiţia ca punctul teoretic de cuplare C_{ij} să rămînă în permanenţă în planul (Π_j') se va traduce acum matematic prin relaţia

$$A(x_{C_{ij}} - x_{Q_j}) + B(y_{C_{ij}} - y_{Q_j}) + C(z_{C_j} - z_{Q_j}) + D' = 0.$$

Este suficient, în continuare, să se înlocuiască în ultima ecuaţie coordonatele $x_{C_{ij}}$, $y_{C_{ij}}$, $z_{C_{ij}}$ cu expresiile (11.23), pentru a se obţine astfel următoarea ecuaţie de legătură corespunzătoare cuplei examinate:

$$\boxed{A(x_{Q_i} - x_{Q_j}) + B(y_{Q_i} - y_{Q_j}) + C(z_{Q_i} - z_{Q_j}) + D = 0}, \quad (11.31)$$

cu termenul D avînd semnificaţia

$$D = D' + A(\bar{r}'_{O_{ij}}\,\bar{i}) + B(\bar{r}'_{O_{ij}}\,\bar{j}) + C(\bar{r}'_{O_{ij}}\,\bar{k}) = D(\psi_i, \varphi_i, \theta_i, \psi_j, \varphi_j, \theta_j ; t) \quad (11.32)$$

Prin derivarea în raport cu timpul a ecuaţiei (11.31) se va obţine şi ecuaţia de transmisie a mişcării pentru cupla analizată, ecuaţie avînd forma

$$\boxed{\begin{aligned} &A(\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j}) + B(\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j}) + C(\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j}) + (x_{Q_i} - x_{Q_j})\frac{dA}{dt} + \\ &+(y_{Q_i} - y_{Q_j})\frac{dB}{dt} + (z_{Q_i} - z_{Q_j})\frac{dC}{dt} + \frac{dD}{dt} = 0 \end{aligned}} \quad (11.33)$$

b) *Cupla prin fir cu extremitățile fixate de elementele cuplate și cupla prin tijă rigidă.* Prin conceptul de *fir* se înțelege, în mecanică, un element solid de legătură pasivă, cu două din dimensiuni neglijabile în raport cu cea de-a treia — lungimea — și prezentînd două proprietăți esențiale: *flexibilitatea* — adică calitatea de a lua orice formă fără să opună rezistență — și *inextensibilitatea* — adică calitatea de a nu se alungi atunci cînd sînt tensionate. Materializarea lor în practică se face prin cabluri, curele, funii, lanțuri etc.

Trebuie de făcut precizarea însă că lungimea unui fir dat, chiar inextensibil, ar putea totuși să varieze în timp, după o lege determinată, dar ca urmare a acțiunii altor agenți externi (de ex., căldura etc.) decît forțele; în această ultimă situație cupla prin fir va fi numită *nestaționară.*

Considerînd două rigide, (S_i) și (S_j), cuplate printr-un fir ale cărui extremități sînt fixate în punctele C_{ij} și C_{ji} ale elementelor, (fig. 11.4, a), legătura prin fir, reprezentată schematic în fig. 11. 4, b, va fi în acțiune numai atunci cînd porțiunea de fir $C_{ij}C_{ji}$, de lungime $L_{ij} = L_{ji}$, va avea forma întinsă, practic rectilinie; în această situație, traducerea matematică a condiției de legătură va fi exprimată prin relația

$$|\bar{r}_{C_{ij}} - \bar{r}_{C_{ji}}| = L_{ij}, \tag{11.34}$$

sau încă, prin ridicare la pătrat și exprimare analitică, sub forma

$$(x_{C_{ij}} - x_{C_{ji}})^2 + (y_{C_{ij}} - y_{C_{ji}})^2 + (z_{C_{ij}} - z_{C_{ji}})^2 - L_{ij}^2(t) = 0, \tag{11.35}$$

considerîndu-se cazul mai general, al cuplajului nestaționar.

Înlocuindu-se coordonatele celor două puncte teoretice de cuplare cu expresiile (11.23), respectiv (11.24), se obține următoarea ecuație de legătură pentru cuplajul prin fir cu extremitățile fixate de elemente:

$$\boxed{[(x_{Q_i} - x_{Q_j}) - \alpha]^2 + [(y_{Q_i} - y_{Q_j}) - \beta]^2 + [(z_{Q_i} - z_{Q_j}) - \gamma]^2 - L_{ij}^2(t) = 0}, \tag{11.36}$$

cu mărimile α, β și γ avînd semnificaţiile

$$\begin{cases} \alpha = (\bar{r}'_{C_{ij}} - \bar{r}'_{C_{ji}})\bar{i} = (x'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{xx} + y'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{yx} + z'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{zx}) - \\ \quad - (x'_{C_{ji}}\,\alpha^j_{xx} + y'_{C_{ji}}\,\alpha^j_{yx} + z'_{C_{ji}}\,\alpha^j_{zx}) = \alpha(\psi_i, \varphi_i, \theta_i\,;\, \psi_j, \varphi_j, \theta_j)\,; \\ \beta = (\bar{r}'_{C_{ij}} - \bar{r}'_{C_{ji}})\bar{j} = (x'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{xy} + y'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{yy} + z'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{zy}) - \\ \quad - (x'_{C_{ji}}\,\alpha^j_{xy} + y'_{C_{ji}}\,\alpha^j_{yy} + z'_{C_{ji}}\,\alpha^j_{zy}) = \beta(\psi_i, \varphi_i, \theta_i\,;\, \psi_j, \varphi_j, \theta_j)\,; \\ \gamma = (\bar{r}'_{C_{ij}} - \bar{r}'_{C_{ji}})\bar{k} = (x'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{xz} + y'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{yz} + z'_{C_{ij}}\,\alpha^i_{zz}) - \\ \quad - (x'_{C_{ji}}\,\alpha^j_{xz} + y'_{C_{ji}}\,\alpha^j_{yz} + z'_{C_{ji}}\,\alpha^j_{zz}) = \gamma(\psi_i, \varphi_i, \theta_i\,;\; \psi_j, \varphi_j, \theta_j). \end{cases} \tag{11.37}$$

Prin derivarea în raport cu timpul a relaţiei (11. 36) se obţine şi ecuaţia de transmisie a mişcării corespunzătoare acestei cuple, avînd forma

$$\boxed{\begin{aligned} &[(x_{Q_i} - x_{Q_j}) - \alpha]\left[(\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j}) - \frac{d\alpha}{dt}\right] + [(y_{Q_i} - y_{Q_i}) - \beta]\left[(\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j}) - \right. \\ &\left. - \frac{d\beta}{dt}\right] + [(z_{Q_i} - z_{Q_j}) - \gamma]\left[(\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j}) - \frac{d\gamma}{dt}\right] - L_{ij}\frac{dL_{ij}}{dt} = 0 \end{aligned}} \tag{11.38}$$

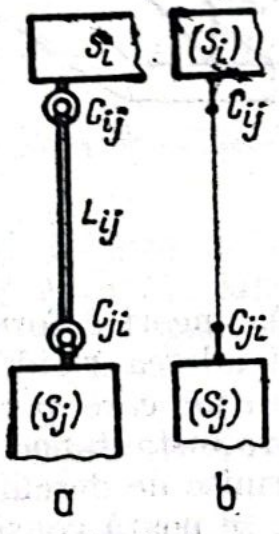


Fig. 11.4.

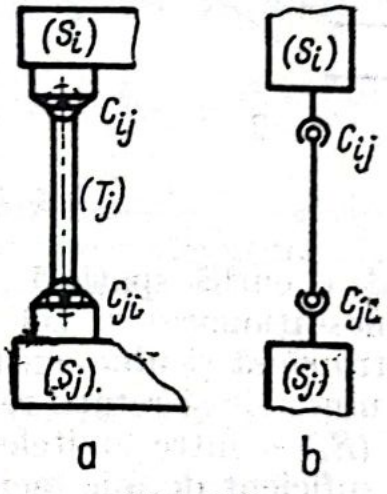


Fig. 11.5.

cu ultimul termen nefigurînd în cazul legăturii staționare (11.38).

Este ușor de înțeles că relațiile stabilite mai sus rămîn valabile și în cazul cuplajului prin tijă rigidă între două elemente (S_i) și (S_j), reprezentat în fig. 11.5, a și schematic în fig. 11.5b, considerîndu-se și aici că legătura tijei cu corpurile cuplate se face prin articulații spațiale foarte mici și cu frecarea neglijabilă.

2) Cuple cinematice spațiale de clasa a II-a

Acestei clase de cuple cinematice spațiale, caracterizate prin condiția

$$k = 2, \tag{11.39}$$

îi aparțin următoarele două tipuri mai importante:

a) *Cupla sferă-uluc.* Această cuplă se realizează prelungind unul din rigide, de ex., elementul (S_i), cu o sferă mică (Sf), care este introdusă într-un uluc fixat de elementul (S_j), a cărui secțiune transversală este circulară și constantă (fig.11. 6, a) și a cărui axă mediană

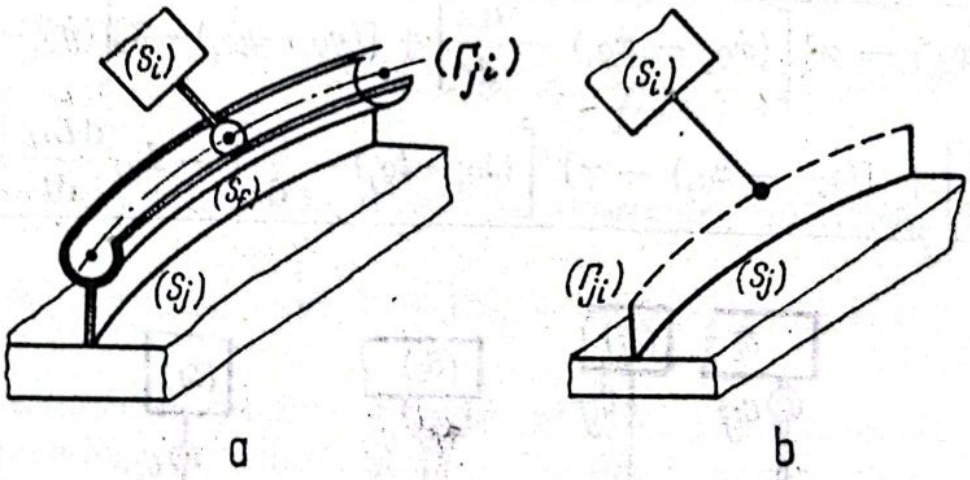


Fig. 11.6.

este, în general, o curbă spațială (Γ_{ij}), uneori deformabilă în timp, (cazul cuplei nestaționare) și cel mai adesea rigidă, (cazul cuplei staționare). Între sferă și uluc există un joc care permite atît deplasarea sferei în uluc, cît și rotații relative instantanee ale ei — și deci și ale rigidului (S_i) — între limitele permise de deschiderea ulucului; jocul este însă suficient de mic încît să se poată considera că centrul

sferei — reprezentînd punctul teoretic de cuplare în elementul (S_i) — nu părăsește axa (Γ_{ij}) a ulucului.

Reprezentarea schematică a acestei cuple se face ca în fig. 11.6, b.

Ecuațiile de legătură corespunzătoare cuplei sferă-uluc se vor obține traducînd matematic condiția ca punctul teoretic de cuplare C_{ij} să rămînă în permanență pe curba (Γ_{ij}), curbă care, în cazul mai general, al unei cuple nestaționare, va fi determinată în raport cu reperul $Q_j x_j y_j z_j$, invariabil legat de elementul (S_j), prin ecuațiile a două suprafețe a căror intersecție este curba menționată, aceste ecuații avînd formele generale :

$$\Phi_1(x'_j,\ y'_j,\ z'_j\ ;\ t) = 0\ ;\quad \Phi_2(x'_j,\ y'_j,\ z'_j\ ;\ t) = 0. \tag{11.40}$$

Înlocuind coordonatele curente x'_j, y'_j, z'_j cu expresiile lor în funcție de coordonatele în raport cu reperul fix, expresii avînd și acum formele (11.28),se vor obține ecuațiile aceloraşi curbe spațiale în raport cu reperul fix, de forma

$$\begin{cases} \Psi_1(x,\ y,\ z\ ;\ x_{Q_j},\ y_{Q_j},\ z_{Q_j},\ \psi_j,\ \varphi_j,\ \theta_j\ ;\ t) = 0\ ; \\ \Psi_2(x,\ y,\ z\ ;\ x_{Q_j},\ y_{Q_j},\ z_{Q_j},\ \psi_j,\ \varphi_j,\ \theta\ ;\ t) = 0. \end{cases} \tag{11.41}$$

Condiția necesară ca punctul teoretic de cuplare C_{ij} să rămînă pe curba (Γ_{ij}) se va traduce acum prin relațiile

$$\begin{cases} \Psi_1(x_{C_{ij}},\ y_{C_{ij}},\ z_{C_{ij}}\ ;\ x_{Q_j},\ y_{Q_j},\ z_{Q_j},\ \psi_j,\ \varphi_j,\ \theta_j\ ;\ t) = 0\ ; \\ \Psi_2(x_{C_{ij}},\ y_{C_{ij}},\ z_{C_{ij}}\ ;\ x_{Q_j},\ y_{Q_j}\ ,\ z_{Q_j},\ \psi_j,\ \varphi_j,\ \theta_j\ t\ ;) = 0. \end{cases} \tag{11.42}$$

Înlocuind și de astă dată coordonatele punctului teoretic de cuplare C_{ij} cu expresiile (11.23), ecuațiile de legătură (11. 42) vor lua formele finale cele mai generale posibile :

$$\boxed{f_\lambda(x_{Q_i},\ y_{Q_i},\ z_{Q_i},\ \psi_i,\ \varphi_i,\ \theta_i\ ;\ x_{Q_j},\ y_{Q_j},\ z_{Q_j},\ \psi_j,\ \varphi_j,\ \theta_j\ ;\ t) = 0 \qquad \lambda = 1, 2} \tag{11.43}$$

Scanned with CamScanner

cu ecuațiile de transmisie a mișcării de asemenea de forma cea mai generală

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{Q_i}}\dot{x}_{Q_i}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{Q_i}}\dot{y}_{Q_i}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial z_{Q_i}}\dot{z}_{Q_i}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial \psi_i}\dot{\psi}_i+\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_i}\dot{\varphi}_i+\frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_i}\dot{\theta}_i+$$

$$+\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{Q_j}}\dot{x}_{Q_j}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{Q_j}}\dot{y}_{Q_j}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial z_{Q_j}}\dot{z}_{Q_j}+\frac{\partial f_\lambda}{\partial \psi_j}\dot{\psi}_j+\frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_j}\dot{\varphi}_j+\frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_j}\dot{\theta}_j+\frac{\partial f_\lambda}{\partial t}=0$$

$$\lambda=1,2 \qquad (11.44)$$

ultimul termen lipsind, evident, în cazul cuplei staționare, $\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial t}=0\right)$.

Ecuațiile de legătură — și deci și cele de transmisie a mișcării — capătă forme apreciabil simplificate în cazul cînd ulucul este rectiliniu — cînd ecuațiile (11.40) vor fi cele ale unor plane — și cînd polul invariabil legat de elementul (S_i) coincide chiar cu punctul teoretic de cuplare $(Q_i = C_{ij})$.

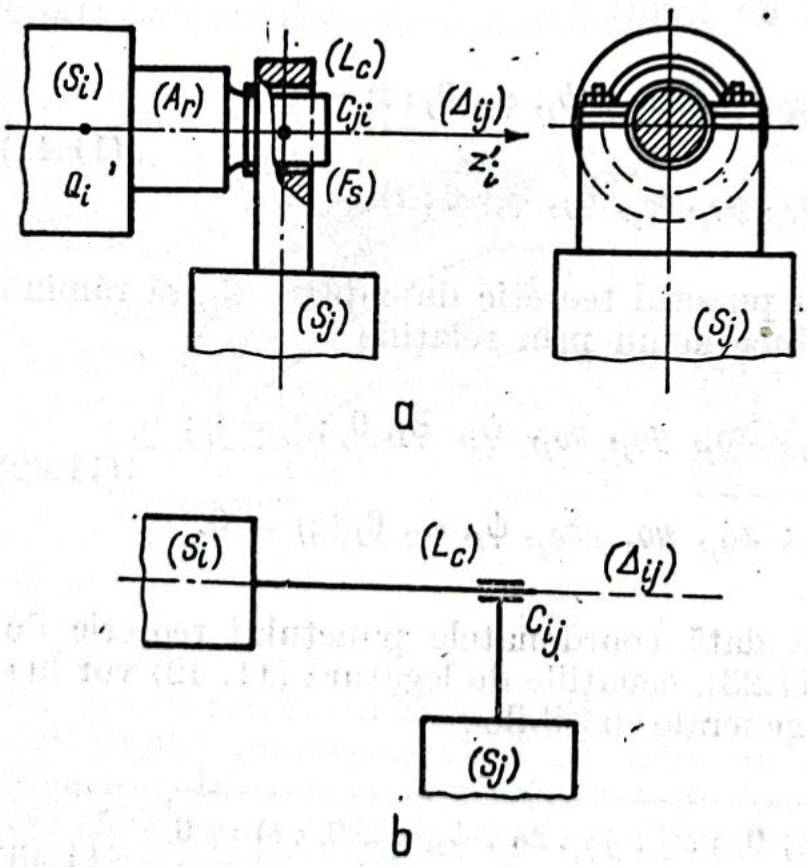


Fig. 11.7.

b) *Cupla fus-lagăr cilindric.* În cazul acestei cuple, fusul (*Fs*) al unuia din elementele cuplate, (S_i) și (S_j), de ex., al elementului (S_i), (fig. 11.7, a), este așezat în cavitatea lagărului cilindric (*Lc*), fixat de elementul (S_j). Între fus și cavitatea cilindrică a lagărului există un mic joc, care permite elementului (S_i) să se rotească în jurul axei (Δ_{ij}) a fusului, să se deplaseze

prin translaţie în lungul acestei axe şi chiar să execute mici rotaţii în jurul unor axe normale la axa (Δ_{ij}) în centrul C_{ij} al lagărului, considerat punct teoretic de cuplare; coordonatele $x'_{C_{ij}}$, $y'_{C_{ji}}$, $z'_{C_{ji}}$ ale acestui punct în raport cu reperul $Q_j x'_j y'_j z'_j$ ataşat elementului (S_j) vor fi funcţii de timp în cazul unui lagăr deformabil (cazul cuplei nestaţionare) şi vor fi constante dacă lagărul este nedeformabil în timp, (cazul cuplei staţionare). Reprezentarea schematică a acestei cuple se face ca în fig. 11.7, b.

Alegînd axa (Δ_{ij}) a fusului ca axă $Q_i z'_i$ invariabil legată de elementul (S_i), ecuaţia vectorială a ei în raport cu reperul fix va avea forma

$$\bar{r} = \bar{r}_{Q_i} + \lambda \bar{k}'_i = \bar{r}_{Q_i} + \lambda(\alpha^i_{zx}\,\bar{i} + \alpha^i_{zy}\,\bar{j} + \alpha^i_{zz}\,\bar{k}). \qquad (11.45)$$

Această dreaptă trebuind să treacă în permanenţă prin punctul teoretic de cuplare C_{ji}, ecuaţia ei va trebui să fie satisfăcută de vectorul de poziţie în raport cu reperul fix al acestui punct, adică se va putea scrie

$$\bar{r}_{C_{ji}} = \bar{r}_{Q_i} + \lambda_{ji}(\alpha^i_{zx}\,\bar{i} + \alpha^i_{zy}\,\bar{j} + \alpha^i_{zz}\,\bar{k}), \qquad (11.46)$$

sau încă, considerînd cazul mai general, al cuplei nestaţionare, se va mai putea scrie

$$\bar{r}_{Q_j} + \bar{r}'_{C_{ji}}(t) = \bar{r}_{Q_i} + \lambda_{ji}(\alpha^i_{zx}\,\bar{i} + \alpha^i_{zy}\,\bar{j} + \alpha^i_{zz}\,\bar{k}), \qquad (11.47)$$

cu următoarele ecuaţii de proiecţii pe axele reperului fix:

$$\begin{cases} x_{Q_j} + x'_{C_{ji}}(t)\,\alpha^j_{xx} + y'_{C_{ij}}(t)\,\alpha^j_{yx} + z'_{C_{ji}}(t)\,\alpha^j_{zx} = x_{Q_i} + \lambda_{ji}\,\alpha^i_{zx}; \\ y_{Q_j} + x'_{C_{ji}}(t)\,\alpha^j_{xy} + y'_{C_{jj}}(t)\,\alpha^j_{yy} + z'_{C_{ji}}(t)\,\alpha^j_{zy} = y_{Q_i} + \lambda_{ji}\,\alpha^i_{zy}; \\ z_{Q_j} + x'_{C_{ji}}(t)\,\alpha^j_{xz} + y'_{C_{ji}}(t)\,\alpha^j_{yz} + z'_{C_{ji}}(t)\,\alpha^j_{zz} = z_{Q_i} + \lambda_{ji}\,\alpha^i_{zz}. \end{cases} \qquad (11.48)$$

Eliminarea lui λ_{ji} între aceste trei ecuaţii scalare conduce la următoarele două ecuaţii de legătură corespunzătoare cuplei fus-lagăr cilindric:

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha^i_{zz}(x_{Q_i} - x_{Q_j} - \alpha) - \alpha^i_{zx}(z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma) = 0; \\ &\alpha^i_{zz}(y_{Q_i} - y_{Q_j} - \beta) - \alpha^i_{zy}(z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma) = 0, \end{aligned}} \qquad (11.49)$$

Scanned with CamScanner

cu mărimile α, β și γ avînd semnificațiile de mai jos:

$$\begin{cases} \alpha = \bar{r}'_{C_{ji}}\,\bar{i} = x'_{C_{ji}}\,\alpha^{j}_{xx} + y'_{C_{ji}}\,\alpha^{j}_{yx} + z'_{C_{ji}}\,\alpha^{j}_{xz} = \alpha\,(t;\,\psi_j,\,\varphi_j,\,\theta_j); \\ \beta = \bar{r}'_{C_{ji}}\,\bar{j} = x'_{C_{ji}}\,\alpha^{j}_{xy} + y'_{C_{ji}}\,\alpha^{j}_{yy} + z'_{C_{ji}}\,\alpha^{j}_{zy} = \beta(t;\,\psi_j,\,\varphi_j,\,\theta_j); \\ \gamma = \bar{r}'_{C_{ji}}\,\bar{k} = x'_{C_{ji}}\,\alpha^{j}_{xz} + y'_{C_{ji}}\,\alpha^{j}_{yz} + z'_{C_{ji}}\,\alpha^{j}_{zz} = \gamma(t;\,\psi_j,\,\varphi_j,\,\theta_j). \end{cases} \tag{11.50}$$

Prin derivarea în raport cu timpul a relațiilor (11.49) se obțin și următoarele două ecuații de transmisie a mișcării pentru cupla analizată:

$$\begin{aligned} &\left[\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j} - \frac{d\alpha}{dt}\right]\alpha^{i}_{zz} - \left[\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j} - \frac{d\gamma}{dt}\right]\alpha^{i}_{zx} + \\ &+ \frac{d\alpha^{i}_{zz}}{dt}\,[x_{Q_i} - x_{Q_j} - \alpha] - \frac{d\alpha^{i}_{zx}}{dt}\,[z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma] = 0; \\ &\left[\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j} - \frac{d\beta}{dt}\right]\alpha^{i}_{zz} - \left[\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j} - \frac{d\gamma}{dt}\right]\alpha^{i}_{zy} + \\ &+ \frac{d\alpha^{i}_{zz}}{dt}\,[y_{Q_i} - y_{Q_j} - \beta] - \frac{d\alpha^{i}_{zy}}{dt}\,[z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma] = 0. \end{aligned} \tag{11.51}$$

3) Cuple cinematice spațiale de clasa a II-a

În categoria acestor cuple, caracterizate prin condiția

$$k = 3, \tag{11.52}$$

intră următoarele două tipuri uzuale de cuple:

a) *Cupla articulație sferică.* Ca și în cazul legăturii exterioare prin articulație sferică, și în cazul cuplării interioare a două elemente, (S_i) și (S_j), ale unui sistem mecanic, drept puncte teoretice de cuplare se consideră centrul C_{ij} al nucii legată solidar de elementul (S_i),

respectiv centrul C_{ji} al cavităţii sferice a corpului articulaţiei, ultimul legat rigid de elementul (S_j), (fig. 11. 8, a); în cazul cînd nuca şi corpul articulaţiei nu se deformează în timp (cazul cuplei staţionare), condiţia de cuplare se va putea traduce, datorită jocului mic dintre nucă şi cavitatea sferică a corpului articulaţiei, prin coincidenţa, în permanenţă, a punctelor teoretice de cuplare $(C_{ij} = C_{ji})$; dacă nuca, sau corpul articulaţiei sînt deformabile în timp, vectorul $\bar{b}_{ij} = \overrightarrow{C_{ji}C_{ij}} = \bar{b}_{ij}(t)$ va fi o funcţie cunoscută de timp.

Reprezentarea schematică a cuplei se face ca în fig. 11.8, b).

Considerînd cazul mai general, al cuplei nestaţionare, se va putea scrie relaţia

$$\bar{r}_{C_{ij}} - \bar{r}_{C_{ji}} = \bar{b}_{ij}(t), \qquad (11.53)$$

evidentă din figura (11. 8 a), (cu $b_{ij} = 0$ în cazul cuplei staţionare), acestei ecuaţii corespunzîndu-i următoarele ecuaţii de proiecţii pe axele reperului fix :

$$\begin{aligned} x_{C_{ij}} - x_{C_{ji}} - b_{ij_x}(t) &= 0\,; \\ y_{C_{ij}} - y_{C_{ji}} - b_{ij_y}(t) &= 0\,; \\ z_{C_{ij}} - z_{C_{ji}} - b_{ij_z} &= 0. \qquad (11.54) \end{aligned}$$

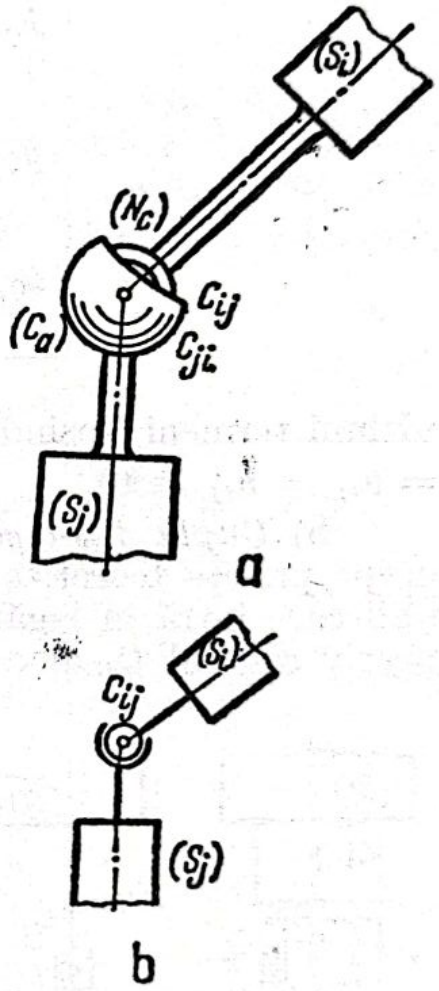


Fig. 11.8.

Este suficient acum să se înlocuiască coordonatele celor două puncte teoretice de cuplare cu expresiile (11.23) şi (11.24) pentru a se obţine astfel următoarele trei ecuaţii de legătură corespunzătoare acestei cuple :

$$\boxed{\begin{aligned} x_{Q_i} - x_{Q_j} - \alpha(\psi_i, \varphi_i, \theta_i\,; \psi_j, \varphi_j, \theta_j) - b_{ij_x}(t) &= 0\,; \\ y_{Q_i} - y_{Q_j} - \beta(\psi_i, \varphi_i, \theta_i\,; \psi_j, \varphi_j, \theta_j) - b_{ij_y}(t) &= 0\,; \\ z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma(\psi_i, \varphi_i, \theta_i\,;, \psi_j, \varphi_j, \theta_j) - b_{ij_z}(t) &= 0\,, \end{aligned}} \qquad (11.55)$$

cu mărimile α, β și γ avînd și aici semnificațiile (11.37).

Prin derivarea în raport cu timpul a relațiilor (11.55) se obțin și următoarele trei ecuații de transmisie corespunzătoare cuplei analizate mai sus :

$$\boxed{\begin{aligned} &\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j} - \frac{d\alpha}{dt} - \dot{b}_{ij_x}(t) = 0 ; \\ &\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j} - \frac{d\beta}{dt} - \dot{b}_{ij_y}(t) = 0 ; \\ &\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j} - \frac{d\gamma}{dt} - \dot{b}_{ij_z}(t) = 0, \end{aligned}} \qquad (11.56)$$

ultimii termeni lipsind în ecuații dacă cuplajul este staționar ($\dot{b}_{ij_x} = \dot{b}_{ij_y} = \dot{b}_{ij_z} \equiv 0$).

b) *Cupla fus-lagăr pivot.* În cazul acestei cuple cinematice, drept puncte teoretice de cuplare se consideră centrul C_{ij} al porțiunii care intră în lagăr a fusului (Fs) solidar cu elementul (S_i), respectiv centrul C_{ji} al cavității cilindrice interioare a lagărului pivot, solidar cu elementul (S_j), (fig. 11.9, a); jocul mic lăsat între fus și cavitatea cilindrică a lagărului permite elementului (S_j) să efectueze mici rotații instantanee relative în jurul punctului C_{ji}.

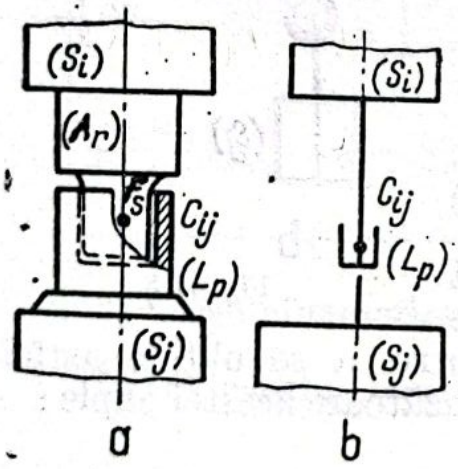


Fig.11.9

Reprezentarea schematică a cuplei se face ca în fig. 11.9, b.

În cazul cînd fusul și lagărul nu sufăr deformații în timp (cazul cuplei staționare), condiția de cuplare va implica și aici coincidența, în permanență, a celor două puncte de cuplare ($C_{ij} \equiv C_{ji}$); dacă lagărul, sau fusul se deformează în timp (cazul cuplei nestaționare) atunci vectorul $\bar{b}_{ji} = \overrightarrow{C_{ji}\,C_{ij}}$ va fi, ca și în cazul articulației sferice, o funcție cunoscută de timp.

Precizările precedente permit să se tragă concluzia că ecuațiile de legătură și ecuațiile de transmisie a mișcării vor avea și în cazul acestei cuple formele (11.55), respectiv (11.56).

Scanned with CamScanner

4) Cuple cinematice spațiale de clasa a IV-a

Din această clasă de cuple cinematice spațiale, caracterizate prin condiția

$$k = 4, \tag{11.57}$$

va fi prezentat un singur tip de cuplă și anume:

a) *Cupla cilindrică.* Cupla cilindrică, realizată prin fixarea de elementul (S_i) a unei bucșe cilindrice circulare (Bc), prin interiorul căreia trece, cu un mic joc, o tijă cilindrică de secțiune circulară constantă (T_j), solidară cu elementul (S_j), (fig. 11.10, a), lungimea

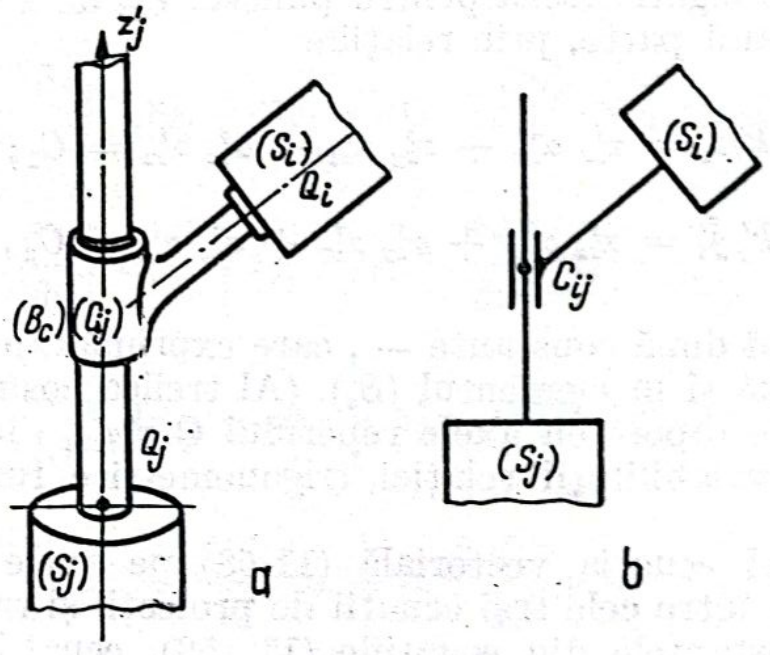


Fig.11.10

bucșei fiind suficient de mare, iar jocul suficient de mic, pentru ca cele două elemente cărora le este aplicată cupla să execute numai mișcări relative elicoidale coaxiale, cu rotațiile și translațiile independente între ele; reprezentarea schematică a unei asemenea cuple se face ca în fig. 11.10, b.

Drept punct teoretic de cuplare în elementul (S_i) se consideră centrul C_{ij} al bucșei (Bc). Dacă piesa de legătură dintre bucșă și elementul (S_i) se deformează în timp prin dilatare sau contractare în lungul axei ei (cazul cuplei nestaționare), vectorul de poziție al punctului C_{ij} în raport cu polul Q_i, invariabil legat de elementul (S_i), va

fi o funcţie cunoscută de timp ($\bar{r}'_{O_{ij}} = \bar{r}'_{O_{ij}}(t)$); în cazul cînd cupla nu se deformează în timp (cazul cuplei staţionare), vectorul de poziţie $\bar{r}'_{O_{ij}}$ nu-şi va modifica nici mărimea şi nici orientarea în reperul $Q_i x'_i y'_i z'_i$, ataşat elementului (S_i).

Alegînd axa tijei de ghidare ca axă $Q_j z'_j$, legată invariabil de elementul (S_j), condiţiile de cuplare prin cupla cilindrică nestaţionară între elementele (S_i) şi (S_j) se vor traduce, pe de o parte, prin ecuaţia vectorială

$$\bar{r}_{Q_i} + \bar{r}'_{O_{ij}}(t) = \bar{r}_{Q_j} + \lambda \bar{k}'_j = \bar{r}_{Q_j} + \lambda(\alpha^j_{zx}\bar{i} + \alpha^j_{zy}\bar{j} + \alpha^j_{zz}\bar{k}), \tag{11.58}$$

care exprimă obligativitatea pentru punctul C_{ij} de a rămîne pe axa $Q_j z'_j$ şi, pe de altă parte, prin relaţiile

$$\begin{cases} \bar{k}'_j \bar{i}'_i = \alpha^j_{zx}\,\alpha^i_{xx} + \alpha^j_{zy}\,\alpha^i_{xy} + \alpha^j_{zz}\,\alpha^i_{xz} = C_1; \\ \bar{k}'_j \bar{j}'_i = \alpha^j_{zx}\,\alpha^i_{yx} + \alpha^j_{zy}\,\alpha^i_{yy} + \alpha^j_{zz}\,\alpha^i_{yz} = C_2, \end{cases} \tag{11.59}$$

— C_1 şi C_2 fiind două constante —, care exprimă faptul că axa $Q_j z'_j$ are direcţie fixă şi în elementul (S_i). (Al treilea cosinus director al versorului $\bar{k}'_j$ în raport cu axele reperului $Q_i x'_i y'_i z'_i$ rămîne constant ca urmare a valabilităţii relaţiei trigonometrice fundamentale în spaţiu).

Proiectînd ecuaţia vectorială (11.58) pe axele reperului fix, eliminînd pe λ între cele trei ecuaţii de proiecţii şi trecînd în membrul stîng constantele din ecuaţiile (11. 59), ecuaţiile de legătură corespunzătoare cuplei cilindrice vor putea fi scrise sub următoarele forme finale:

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha^j_{zz}[\alpha_{Q_i} - x_{Q_j} + \alpha] - \alpha^j_{zz}[z_{Q_i} - z_{Q_j} + \gamma] = 0; \\ &\alpha^j_{zz}[y_{Q_i} - y_{Q_j} + \beta] - \alpha^j_{zy}[z_{Q_i} - z_{Q_j} + \gamma] = 0; \\ &\alpha^j_{zx}\,\alpha^i_{xx} + \alpha^j_{zy}\,\alpha^i_{xy} + \alpha^j_{zz}\,\alpha^i_{xz} - C_1 = 0; \\ &\alpha^j_{zx}\,\alpha^i_{yx} + \alpha^j_{zy}\,\alpha^i_{yy} + \alpha^j_{zz}\,\alpha^i_{yz} - C_2 = 0, \end{aligned}} \tag{11.60}$$

Scanned with CamScanner

cu mărimile α, β şi γ avînd semnificaţiile

$$\alpha = \bar{r}'_{O_{ij}}\bar{i} = \alpha\,(t\,;\,\psi_i,\,\varphi_i,\,\theta_i)\,;\quad \beta = \bar{r}'_{O_{ij}}\bar{j} = \beta\,(t\,;\,\psi_i,\,\varphi_i,\,\theta_i)\,;$$

$$\gamma = \bar{r}'_{O_{ij}}\bar{k} = \gamma(t\,;\,\psi_i,\,\varphi_i,\,\theta_i). \qquad (16.61)$$

Prin derivarea în raport cu timpul a relaţiilor (11. 60) se obţin şi ecuaţiile de transmisie a mişcării corespunzătoare cuplei cilindrice, aceste ecuaţii avînd formele :

$$\left[\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j} + \frac{d\alpha}{dt}\right]\alpha^i_{zz} - \left[\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j} + \frac{d\gamma}{dt}\right]\alpha^j_{zx} +$$

$$+ \frac{d\alpha^j_{zz}}{dt}[x_{Q_i} - x_{Q_j} + \alpha] - \frac{d\alpha^j_{zx}}{dt}(z_{Q_i} - z_{Q_j} + \gamma] = 0\,;$$

$$\left[\dot{y}_{O_i} - \dot{y}_{Q_j} + \frac{d\beta}{dt}\right]\alpha^j_{zz} - \left[\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j} + \frac{d\gamma}{dt}\right]\alpha^j_{zy} +$$

$$+ \frac{d\alpha^j_{zz}}{dt}[y_{Q_i} - y_{Q_j} + \beta] - \frac{d\alpha^j_{zy}}{dt}[z_{Q_i} - z_{Q_j} + \gamma] = 0\,;$$

$$\frac{d\alpha^j_{zz}}{dt}\alpha^i_{xz} + \frac{d\alpha^j_{zy}}{dt}\alpha^i_{xy} + \frac{d\alpha^j_{zz}}{td}\alpha^i_{xz} + \alpha^j_{zw}\frac{d\alpha^i_{xx}}{dt} +$$

$$+ \alpha^j_{zy}\frac{d\alpha^i_{xy}}{dt} + \alpha^j_{zz}\frac{d\alpha^i_{xz}}{dt} = 0\,;$$

$$\frac{d\alpha^j_{zz}}{dt}\alpha^i_{yz} + \frac{d\alpha^j_{zy}}{dt}\alpha^i_{yy} + \frac{d\alpha^j_{zz}}{dt}\alpha^i_{yz} + \alpha^j_{zw}\frac{d\alpha^i_{yw}}{dt} +$$

$$+ \alpha^j_{zy}\frac{d\alpha^i_{yy}}{dt} + \alpha^j_{zz}\frac{d\alpha^i_{yz}}{dt} = 0. \qquad (11.62)$$

b) *Cupla articulației cardanică sau articulație universală.* Trebuie făcută de la început precizarea că în mod curent acest tip de legătură pasivă între două elemente, (S_i) și (S_j) ale unui sistem mecanic este considerată drept mecanism, ca urmare a faptului că în practica obișnuită această legătură permite transmisia unei mișcări de rotație proprie de la un arbore (Ar_i) al elementului conducător (S_i), la arborele (Ar_j) al elementului condus (S_j), cu axele (Δ_i) și (Δ_j) ale celor doi arbori concurente într-un punct $C_{ij} \equiv C_{ji}$ și formînd un unghi oarecare între ele — fapt care implică existența elementului fix (batiul) —, precum și datorită faptului că între elementele asamblate se interpune și un element intermediar de legătură, realizîndu-se astfel un lanț cinematic.

Într-adevăr, articulația cardanică este realizată cu ajutorul unei piese de legătură (Cc), purtînd numele de *cruce cardanică*, cu extremitățile brațelor OA și OA' articulate în *furca conducătoare* (Fc_i) — solidară cu arborele conducător — și cu extremitățile brațelor OB și OB' articulate în furca condusă (Fc_j) —, solidară cu arborele condus, (fig. 11.11, a); reprezentarea schematică a acestei legături se face în unele cazuri ca în fig. 11.11, b, iar în alte situații ca în fig. 11.11, c.

Considerarea, în lucrarea de față, a articulației cardanice ca o cuplă de clasa a IV-a, este motivată de următoarele argumente:

— Datorită valorilor foarte mici ale caracteristicilor inerțiale ale crucii cardanice, ea nu este considerată, în mod obișnuit, ca element constitutiv al sistemului mecanic, ci ca o simplă piesă de cuplare de masă neglijabilă.

— Legătura prin articulație universală poate funcționa — și în practică există asemenea cazuri — și fără ca cele două elemente cuplate — sau cel puțin unul din ele — să aibă legătură la batiu.

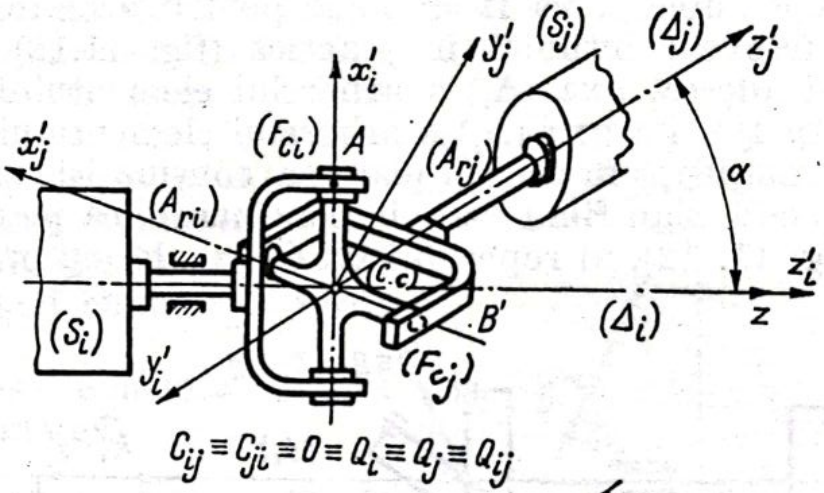
— Frecările în articulațiile brațelor crucii cardanice cu cele două furci sînt practic neglijabile, nefiind necesară deci considerarea distribuției reale de forțe de legătură (de acestea din urmă se va ține seama numai la calculele de rezistență).

Argumentele de mai sus pledează pentru includerea acestei forme de legătură pasivă în categoria cuplelor cinematice de clasa a IV-a, ea introducînd, după cum se va vedea mai jos, patru ecuații de legătură între parametrii de poziție ai celor două elemente cuplate.

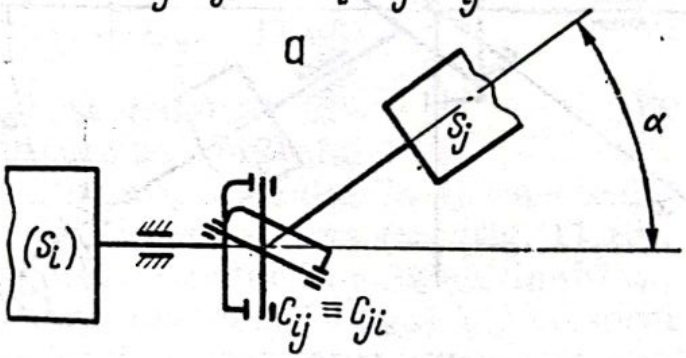
Scanned with CamScanner

Într-adevăr, prin alegerea polilor Q_i și Q_j, invariabil legați de cele două elemente cuplate, chiar în punctul de intersecție a axelor arborilor lor, ($Q_i \equiv Q_j \equiv C_{ij} \equiv C_{ji}$), rezultă condiția

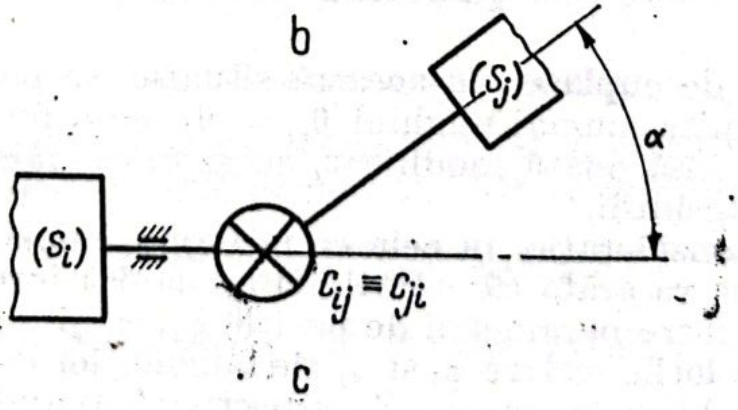
$$\bar{r}_{Q_i} - \bar{r}_{Q_j}, \equiv 0, \tag{11.63}$$



a



b



c

Fig 11.11

căreia îi corespund următoarele trei ecuații scalare de legătură :

$$\boxed{\begin{gathered} f_1(x_{Q_i}, x_{Q_j}) = x_{Q_i} - x_{Q_j} \equiv 0\ ;\ f_2(y_{Q_i}, y_{Q_j}) = y_{Q_i} - y_{Q_j} \equiv 0\ ; \\ f_3(z_{Q_i}, z_{Q_j}) = z_{Q_i} - z_{Q_j} \equiv 0. \end{gathered}} \tag{11.64}$$

Cea de-a patra ecuație de legătură, între unghiurile lui Euler ale elementelor cuplate, va fi stabilită pentru următoarea situație particulară, frecvent întîlnită în practică (fig. 11.12) :

Cel mai adesea, axa (Δ_i) a arborelui elementului conducător este fixă în spațiu, iar axa (Δ_j) a arborelui elementului condus (S_j) rămîne în permanență în același plan ce conține și axa arborelui conducător, acest plan fiind luat, în continuare, ca plan de coordonate Oxz, (fig. 11. 12), al reperului fix $Oxyz$, ales cu originea tot în

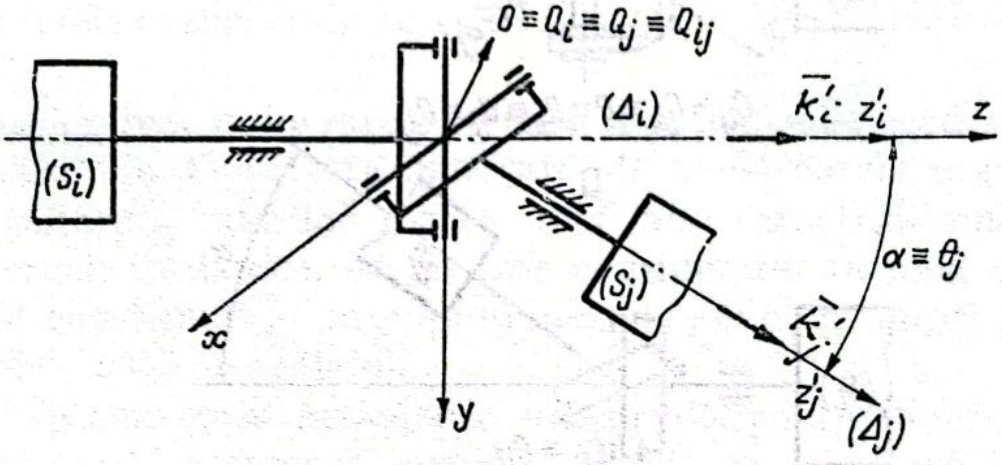


Fig. 11.12

punctul teoretic de cuplare ; în această situație, se poate modifica, între anumite limite, numai unghiul $\theta_{rj} = \theta_j = \alpha$, format de axele celor doi arbori, însă odată modificat, acest unghi rămîne constant în timpul unei transmisii.

Luînd în considerație, în cele ce urmează, numai această din urmă situație, se va arăta că articulația cardanică introduce o ecuație de legătură între parametrii de poziție φ_i, φ_j și α ai celor două rigide cuplate, valorile scalare φ_i și φ_j ale unghiurilor de rotație fiind raportate, ca de obicei, la versorii $\bar{k}'_i$, respectiv $\bar{k}'_j$, ai axelor de rotație $Q_{ij}z'_i$ și $Q_{ij}z'_j$, (fig. 11.12).

Întrucît în cazul acestei cuple este mult mai comod să se stabilească mai întîi ecuaţia de transmisie a mişcării şi apoi, prin integrare, să se determine şi ecuaţia finită de legătură, se va folosi această cale de rezolvare a problemei.

Pentru aceasta, se va observa că mişcarea de rotaţie a arborelui conducător, efectuată cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_i$ orientată în lungul axei (Δ_i), se va transmite, pe de o parte, arborelui condus (Ar_j), care se va roti cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_j$ în jurul axei (Δ_j), (fig. 11.13) şi, pe de altă parte, crucii cardanice, care va executa simultan două rotaţii concurente în $0 \equiv Q_{ij}$, una efectuată cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_A$ în jurul axei AA' a braţelor crucii articulate la furca conducătoare şi a doua efectuată cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_B$ în jurul axei BB' a braţelor crucii cuplate la furca condusă.

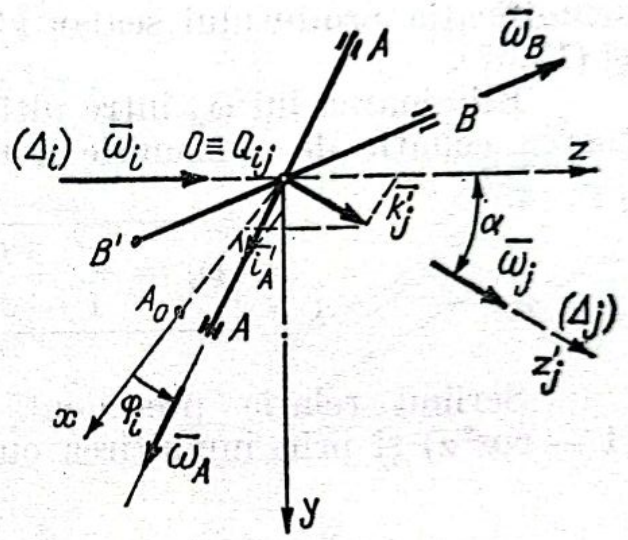


Fig.11.13

Este deci evidentă relaţia de descompunere :

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_B. \quad (11.65)$$

Considerînd ca moment iniţial momentul în care axa braţului AA' al crucii cardanice, articulat la furca conducătoare, se află în planul Oxz, coincizînd deci cu axa Ox, (fig. 11.13), se va observa că la o rotaţie a arborelui conducător de un unghi φ_i, axa OA se va roti şi ea, în planul Oxy, de acelaşi unghi φ_i, versorul $\bar{i}'_A$ al acestei axe avînd în această poziţie următoarea expresie analitică în raport cu reperul fix :

$$\bar{i}'_A = \cos \varphi_i \, \bar{i} + \sin \varphi_i \, \bar{j}. \quad (11.66)$$

De asemenea, pentru versorul $\bar{k}'_j$ al axei (Δ_j) se poate scrie următoarea expresie analitică în raport cu acelaşi reper fix, ales de la început :

$$\bar{k}'_j = \sin \alpha \bar{i} + \cos \alpha \bar{k}. \quad (11.67)$$

Înmulţind pe rînd, scalar, relaţia (11.65), scrisă acum sub forma

$$\omega_i \, \bar{k}'_i = \omega_j \, \bar{k}'_j + \omega_A \, \bar{i}'_A + \omega_B \, \bar{i}'_B, \quad (11.68)$$

cu versorii $\bar{k}_j'$ și $\bar{i}_A'$ și ținînd seama și de ortogonalitatea perechilor de vectori $\bar{k}_j'$ și $\bar{i}_B'$, apoi $\bar{i}_A'$ și $\bar{i}_B'$ și, respectiv, $\bar{k}_i'$ și $\bar{i}_A'$, ($\bar{k}_j' \cdot \bar{i}_B' = 0$; $\bar{i}_A' \bar{i}_B' = 0$; $\bar{k}_j' \cdot \bar{i}_A' = 0$), rezultă următoarele ecuații de proiecții:

$$\begin{cases} \omega_i \cos\alpha = \omega_j + \omega_A \bar{i}_A' \bar{k}_j' = \omega_j + \omega_A \sin\alpha \cos\varphi_i \\ \\ 0 = \omega_j \bar{k}_j' \bar{i}_A' + \omega_A = \omega_j \sin\alpha \cos\varphi_i + \omega_A, \end{cases} \tag{11.69}$$

semnificația produsului scalar $\bar{k}_j' \cdot \bar{i}_A'$ rezultînd din relațiile (11.66) și (11.67).

Eliminarea lui $\bar{\omega}_A$ între ultimele două relații conduce la următoarea ecuație de transmisie a mișcării în cazul cuplei cardanice:

$$\boxed{\omega_j = \frac{\omega_i \cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha \cos^2\varphi_i}.} \tag{11.70}$$

Scriind relația precedentă — prin înlocuirea lui $\sin^2\alpha$ cu $(1 - \cos^2\alpha)$ și prin înmulțirea cu dt — sub forma

$$d\varphi_j = \frac{d\varphi_i \cos\alpha}{\sin^2\varphi_i + \cos^2\alpha \cos^2\varphi_i} = \frac{d\varphi_i}{\frac{\cos^2\varphi_i}{\cos\alpha}} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{\operatorname{tg}\varphi_i}{\cos\alpha}\right]^2} = \frac{d\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi_i}{\cos\alpha}\right]}{1 + \left[\frac{\operatorname{tg}\varphi_i}{\cos\alpha}\right]^2},$$

rezultă, prin integrare, și ultima ecuație finită de legătură pentru articulația cardanică, ea avînd forma

$$\varphi_i + C = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi_i}{\cos\alpha}\right),$$

sau încă

$$\boxed{f_4(\varphi_i, \varphi_j; \alpha) = \operatorname{tg}(\varphi_j + C)\cos\alpha - \operatorname{tg}\varphi_i = 0}, \tag{11.71}$$

C fiind o constantă de integrare care, prin alegerea convenabilă a axei de referință pentru măsurarea unghiului de rotație φ_j, poate lua chiar valoarea zero.

Scanned with CamScanner

În consecință, în condițiile precizate ecuațiile de legătură corespunzătoare articulației universale vor fi reprezentate prin relațiile (11.64) și (11.71), iar ecuațiile de transmisie a mișcării se vor reduce numai la ecuația (11.70), celelalte trei ecuații de transmisie căpătînd, în cazul examinat, formele particulare de mai jos :

$$\dot{x}_{Q_i} = \dot{x}_{Q_j} \equiv 0\,; \quad \dot{y}_{Q_i} = \dot{y}_{Q_j} \equiv 0\,; \quad \dot{z}_{Q_j} = \dot{z}_{Q_j} \equiv 0. \qquad (11.72)$$

5) Cuple cinamatice spațiale de clasa a V-a

În această ultimă categorie, caracterizată prin condiția

$$k = 5, \qquad (11.73)$$

intră următoarele trei tipuri uzuale de cuple cinematice :

a) *Cupla de translație rectilinie.* Această cuplă se realizează fixîndu-se de unul din elementele cuplate, de exemplu, de elementul (S_i), un manșon paralelipipedic, (Mn), (fig. 11.14, a), prin interiorul – de asemenea paralelipipedic –, al căruia trece, cu un mic joc, o tijă de ghidare (Tj), cu secțiune tot dreptunghiulară solidară cu cel de-al doilea element cuplat, (S_i), al sistemului mecanic; jocul mic dintre tijă și manșon determină ca mișcările relative ale celor două elemente cuplate să fie numai translații rectilinii.

Reprezentarea schematică a cuplei de translație rectilinie se face ca în fig. 11.14, b.

Drept punct teoretic de cuplare se consideră centrul C_{ij} al manșonului, punct ce rămîne în permanență pe axa (Δ_{ij}) a tijei (Tj).

Dacă piesa de legătură a manșonului cu elementul (S_i) este deformabilă în timp, de ex., prin dilatare, sau contractare în lungul axei sale (cazul cuplei

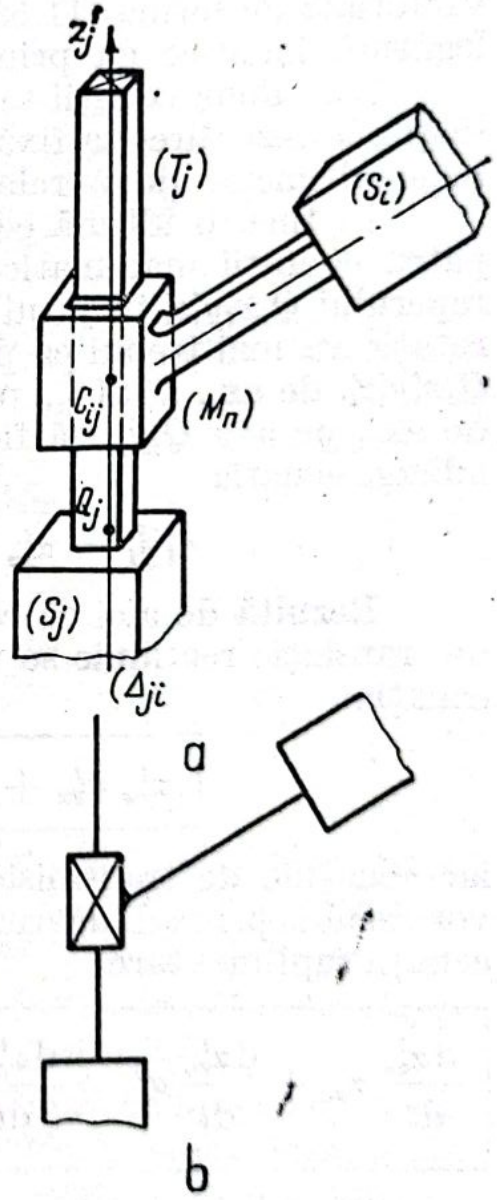


Fig. 11.14

nestaţionare), vectorul de poziţie $\bar{r}'_{O_{ij}}$ al punctului teoretic de cuplare C_{ij} în raport cu polul Q_i invariabil legat de elementul (S_i) va fi o funcţie vectorială cunoscută de timp ($\bar{r}'_{O_{ij}} = \bar{r}'_{O_{ij}}(t)$; dacă cupla nu se deformează în timp, (cazul cuplei staţionare), atunci vectorul $\bar{r}'_{O_{ij}}$ nu-şi va schimba nici mărimea şi nici orientarea în raport cu reperul $Q_i x'_i y'_i z'_i$, ataşat elementului (S_i).

Considerînd cazul mai general, al cuplei nestaţionare ($\bar{r}'_{O_{ij}} = \bar{r}_{Q_i} + \bar{r}'_{O_{ij}}(t)$) şi luînd, ca şi în cazul cuplei cilindrice, axa tijei de ghidare ca axă $Q_j z'_j$, invariabil legată de elementul (S_j), condiţia ca punctul C_{ij} să rămînă pe axa tijei se va exprima şi aici printr-o ecuaţie vectorială de forma (11.58), căreia îi vor corespunde două ecuaţii de legătură identice cu primele două ecuaţii din sistemul (11.60).

Alte două ecuaţii se obţin punînd şi acum condiţia ca axa $Q_j z'_j$ să-şi păstreze direcţia fixă în elementul (S_j), aceste ecuaţii avînd formele ultimelor două relaţii din sistemul (11.60).

În fine, o ultimă ecuaţie va fi obţinută observîndu-se că cele patru condiţii matematice impuse pînă acum nu împiedică rotaţia reperului $Q_i x'_i y'_i z'_i$ în jurul axei $Q_j z'_j$ şi că pentru a elimina şi această rotaţie va mai trebui ca proiecţia unuia din versorii axelor reperului $Q_i x'_i y'_i z'_i$, de ex., a lui $\bar{i}_i$, pe o altă axă decît $Q_j z'_j$ a reperului $Q_j x'_j y'_j z'_j$, de ex., pe axa $Q_j y_j$, să fie de asemenea constantă, adică se va mai adăuga ecuaţia

$$\bar{i}'_i \bar{j}'_j = \alpha^i_{xx} \alpha^j_{yx} + \alpha^i_{xy} \alpha^j_{yy} + \alpha^i_{xz} \alpha^j_{yz} = C_3. \tag{11.74}$$

Rezultă de aici că ecuaţiile de legătură corespunzătoare cuplei de translaţie rectilinie se vor obţine adăugîndu-se la sistemul (11.60) ecuaţia

$$\boxed{\alpha^i_{xx} \alpha^j_{yx} + \alpha^i_{xy} \alpha^j_{yy} + \alpha^i_{xz} \alpha^j_{yz} - C_3 = 0} \tag{11.75}$$

iar ecuaţiile de transmisie a mişcării corespunzătoare acestei cuple vor rezulta prin adăugarea la sistemul de relaţii (11.62) a următoarei ecuaţii suplimentare

$$\boxed{\frac{d\alpha^i_{xx}}{dt} \alpha^j_{yx} + \frac{d\alpha^i_{xy}}{dt} \alpha^j_{yy} + \frac{d\alpha^i_{xz}}{dt} \alpha^i_{yz} + \alpha^i_{xx} \frac{d\alpha^j_{yx}}{dt} + \alpha^i_{xy} \frac{d\alpha^i_{yy}}{dt} + \alpha^i_{xz} \frac{d\alpha^j_{yz}}{dt} = 0} \tag{11.76}$$

Scanned with CamScanner

obținută prin derivarea în raport cu timpul a ecuației (11.75).

b) *Cupla de rotație.* Această cuplă, realizată cu ajutorul ansamblului de piese de legătură *ochi* (*Oc*) — *ureche* (*Uc*) — *ax* (*Ax*), (fig. 11.15, a), permite elementelor (S_i) și (S_j) cuplate prin ea — cel mai adesea bare subțiri sau plăci — să execute rotații relative în jurul unei axe comune $(\Delta_{ij}) = (\Delta_{ji})$, fixă în ambele elemente; reprezentarea schematică a cuplei se face ca în fig. 11.15, b.

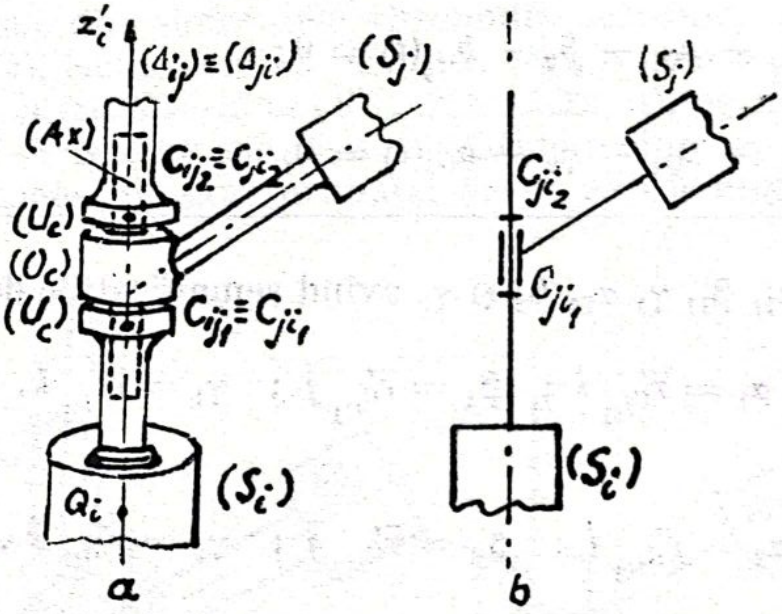


Fig. 11.15

Cele două părți laterale ale urechii (*Uc*) sînt asimilabile unor lagăre pivot, dintre care însă numai unul se va comporta ca atare, celălalt jucînd rol de lagăr cilindric; centrele acestor lagăre vor reprezenta punctele teoretice de cuplare ale cuplei de rotație: C_{ji_1} și C_{ji_2} în elementul (S_j) iar C_{ij_1} și C_{ij_2} în elementul (S_i).

Alegînd axa (Δ_{ij}) de rotație relativă comună ca axă $Q_i x_i$, invariabil legată de elementul (S_i), se vor putea scrie, în consecință, două ecuații de legătură de forma (11.49) pentru legătura asimilabilă cu lagărul cilindric și trei ecuații de legătură de forma (11.55) pentru legătura asimilabilă cu lagărul pivot.

Rezultă astfel următorul sistem de ecuaţii de legătură pentru cupla de rotaţie :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\alpha^i_{zz}[x_{Q_i} - x_{Q_j} - \alpha_1] - \alpha^i_{zx}[z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma_1] = 0\,;\\
&\alpha^i_{zz}[y_{Q_i} - y_{Q_j} - \beta_1] - \alpha^i_{zy}[z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma_1] = 0\,;\\
&x_{Q_i} - x_{Q_j} - \alpha_2 - b_{ij_x}(t) = 0\,;\\
&y_{Q_i} - y_{Q_j} - \beta_2 - b_{ij_y}(t) = 0\,;\\
&z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma_2 - b_{ij_z}(t) = 0,
\end{aligned}} \qquad (11.77)$$

cu mărimile α_1, β_1, γ, α_2, β_2 şi γ_2 avînd semnificaţiile de mai jos :

$$\alpha_1 = \bar{r}'_{C_{ji_1}}\bar{i}\ ;\quad \beta_1 = \bar{r}'_{C_{ji_1}}\bar{j}\ ;\quad \gamma_1 = \bar{r}'_{C_{ji_1}}\bar{k}, \qquad (11.78)$$

respectiv

$$\alpha_2 = \bar{r}'_{C_{ji_2}}\bar{i}\ ;\quad \beta_2 = \bar{r}'_{C_{ji_2}}\bar{j}\ ;\quad \gamma_2 = \bar{r}'_{C_{ji_2}}\bar{k}\ , \qquad (11.79)$$

iar ecuaţiile de transmisie a mişcării, obţinute prin derivare în raport cu timpul a relaţiilor (11. 77), vor avea formele :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\left[\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j} - \frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t}\right]\alpha^i_{zz} - \left[\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j} - \frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t}\right]\alpha^i_{zx} +\\
&\quad + \frac{\mathrm{d}\alpha^i_{zz}}{\mathrm{d}t}[x_{Q_i} - x_{Q_j} - \alpha_1] - \frac{\mathrm{d}\alpha^i_{zx}}{\mathrm{d}t}[z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma_1] = 0\,;\\
&\left[\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j} - \frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}t}\right]\alpha^i_{zz} - \left[\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j} - \frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t}\right]\alpha^i_{zy} +\\
&\quad + \frac{\mathrm{d}\alpha^i_{zz}}{\mathrm{d}t}[y_{Q_i} - y_{Q_j} - \beta_1] - \frac{\mathrm{d}\alpha^i_{zy}}{\mathrm{d}t}[z_{Q_i} - z_{Q_j} - \gamma_1] = 0\,;
\end{aligned}}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j} - \frac{d\alpha_2}{dt} - \dot{b}_{ij_x}(t) = 0 ; \\
&\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j} - \frac{d\beta_2}{dt} - \dot{b}_{ij_y}(t) = 0 ; \\
&\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j} - \frac{d\gamma_2}{dt} - \dot{b}_{ij_z}(t) = 0.
\end{aligned}\right| \quad (11.80)$$

c) *Cupla șurub-piuliță.* Cupla șurub-piuliță, realizată prin fixarea de unul din elementele sistemului mecanic, de ex. (S_j), a unui șurub (Sb), iar de celălalt element, (S_i), a unei piulițe (Pl), prin interiorul căreia trece șurubul (Sb), (fig. 11.16, a), permite celor două rigide cuplate să execute, ca mișcări relative reciproce, numai mișcări de șurub coaxiale, cu axa șurubului drept axă a mișcării.

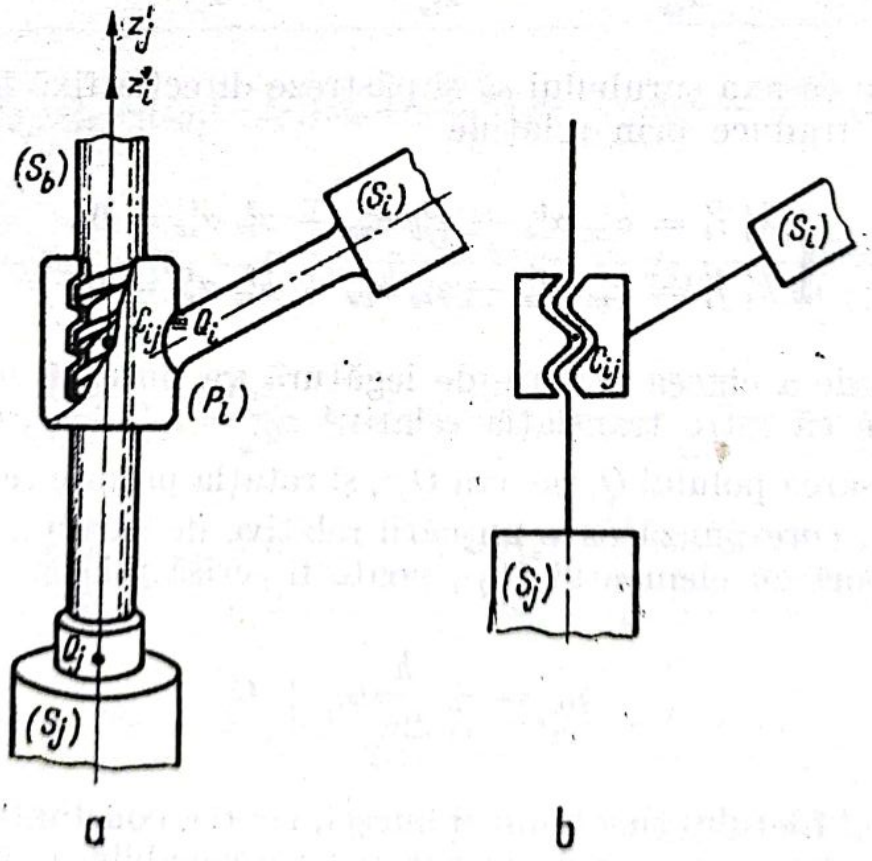


Fig. 11. 16.

Ca punct teoretic de cuplare se consideră, în elementul (S_i), centrul C_{ij} al piuliței, solidară cu bucșa (Bc), centru care rămîne în permanență pe axa (Δ_j) a șurubului.

Considerînd aici numai cazul cuplei nedeformabile, staționare, se va alege axa șurubului ca axă $Q_j z'_j$, legată invariabil de elementul (S_j) și axa bucșei, confundată cu cea a șurubului, ca axă $Q_i z'_i$, atașată elementului (S_i), polul Q_i putînd fi ales chiar în punctul teoretic de cuplare C_{ij} $(Q_i \equiv C_{ij})$.

Condiția ca polul Q_i să rămînă în permanență pe axa $(\Delta_j) \equiv$ $\equiv Q_j z'_j$ se va traduce prin ecuația vectorială

$$\bar{r}_{Q_i} = \bar{r}_{Q_j} + \lambda \bar{k}'_j = \bar{r}_{Q_j} + \lambda[\alpha^j_{zx}\,\bar{i} + \alpha^j_{zy}\,\bar{j} + \alpha^j_{zz}\,\bar{k}], \qquad (11.81)$$

echivalentă cu două ecuații de legătură finite de forma

$$\frac{x_{Q_i} - x_{Q_j}}{\alpha^j_{zx}} = \frac{y_{Q_i} - y_{Q_j}}{\alpha^j_{zy}} = \frac{z_{Q_i} - z_{Q_j}}{\alpha^j_{zz}}, \qquad (11.82)$$

iar condiția ca axa șurubului să-și păstreze direcția fixă în elementul (S_i) se va traduce prin relațiile

$$\begin{cases} \bar{k}'_j\,\bar{i}'_i = \alpha^j_{zx}\,\alpha^i_{xx} + \alpha^j_{zy}\,\alpha^i_{xy} + \alpha^j_{zz}\,\alpha^i_{xz} = 0\,; \\ \bar{k}'_j\,\bar{j}'_i = \alpha^j_{zx}\,\alpha^i_{yx} + \alpha^j_{zy}\,\alpha^i_{yy} + \alpha^j_{zz}\,\alpha^i_{yz} = 0. \end{cases} \qquad (11.83)$$

Ce a de-a cincea ecuație de legătură va putea fi obținută observîndu-se că între translația relativă $z_{Q_{i_r}} = z_{Q_i} - z_{Q_j}$, determinată prin deplasarea polului Q_i pe axa $Q_j z_j$ și rotația proprie relativă $\varphi_{i_r} =$ $= \varphi_i - \varphi_j$, corespunzătoare mișcării relative de șurub a elementului (S_i) în raport cu elementul (S_j), poate fi scrisă relația

$$z_{Q_{i_r}} = \pm \frac{h}{2\pi}\varphi_{i_r} + C, \qquad (11.84)$$

h fiind pasul filetului șurubului și bucșei, iar C o constantă, care poate lua chiar valoarea zero prin orientarea convenabilă a axei de referință pentru măsurarea unghiului de rotație proprie relativă φ_{i_r}; în

ceea ce priveşte semnul din faţa primului termen din membrul drept al ecuaţiei, el va fi pozitiv pentru mişcarea de şurub drept şi negativ pentru mişcarea de şurub stîng.

Ecuaţiile de legătură corespunzătoare cuplei şurub-bucşă filetată vor avea deci formele :

$$\begin{aligned}
&\alpha^j_{zz}(x_{Q_i} - x_{Q_j}) - \alpha^j_{zx}(z_{Q_i} - z_{Q_j}) = 0\,;\\
&\alpha^j_{zz}(y_{Q_i} - y_{Q_j}) - \alpha^j_{zy}(z_{Q_i} - z_{Q_j}) = 0\,;\\
&\alpha^j_{zx}\,\alpha^i_{xx} + \alpha^j_{zy}\,\alpha^i_{xy} + \alpha^j_{zz}\,\alpha^i_{xz} = 0\,;\\
&\alpha^j_{zx}\,\alpha^i_{yx} + \alpha^j_{zy}\,\alpha^i_{yy} + \alpha^j_{zy}\,\alpha^i_{yz} = 0\,;\\
&(z_{Q_i} - z_{Q_j}) \mp \frac{h}{2\pi}(\varphi_i - \varphi_j) - C = 0,
\end{aligned} \tag{11.85}$$

iar ecuaţiile de transmisie a mişcării vor avea, în cazul acestei cuple, formele :

$$\begin{aligned}
&(\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j})\alpha^j_{zz} - (\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j})\alpha^j_{zx} + \frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zz}}{\mathrm{d}t}(x_{Q_i} - x_{Q_j}) - \frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zx}}{\mathrm{d}t}(z_{Q_i} - z_{Q_j}) = 0\,;\\
&(\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j})\alpha^j_{zz} - (\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j})\alpha^j_{zy} + \frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zz}}{\mathrm{d}t}(y_{Q_i} - y_{Q_j}) - \frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zy}}{\mathrm{d}t}(z_{Q_i} - z_{Q_j}) = 0\,;\\
&\frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zx}}{\mathrm{d}t}\alpha^i_{xx} + \frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zy}}{\mathrm{d}t}\alpha^i_{xy} + \frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zz}}{\mathrm{d}t}\alpha^i_{xz} + \alpha^j_{zx}\frac{\mathrm{d}\alpha^i_{xx}}{\mathrm{d}t} + \alpha^j_{zy}\frac{\mathrm{d}\alpha^i_{xy}}{\mathrm{d}t} + \alpha^j_{zz}\frac{\mathrm{d}\alpha^i_{xz}}{\mathrm{d}t} = 0\,;\\
&\frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zx}}{\mathrm{d}t}\alpha^i_{yx} + \frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zy}}{\mathrm{d}t}\alpha^i_{yy} + \frac{\mathrm{d}\alpha^j_{zz}}{\mathrm{d}t}\alpha^i_{yz} + \alpha^j_{zx}\frac{\mathrm{d}\alpha^i_{yx}}{\mathrm{d}t} + \alpha^j_{zy}\frac{\mathrm{d}\alpha^i_{yy}}{\mathrm{d}t} + \alpha^j_{zz}\frac{\mathrm{d}\alpha^i_{yz}}{\mathrm{d}t} = 0\,;\\
&(\dot{z}_{Q_i} - \dot{z}_{Q_j}) \mp \frac{h}{2\pi}(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_j) - C = 0.
\end{aligned} \tag{11.86}$$

11.2.2. Cuple cinematice interioare plane

Condiţia (11.16) va lua, în cazul cuplelor cinematice interioare plane, ($p_v = 3$), forma

$$1 \leqslant k \leqslant 2, \tag{11.87}$$

ecuaţiile de legătură corespunzătoare acestor cuple obţinîndu-se şi aici prin examinarea restricţiilor geometrice impuse de cuple punctelor teoretice de cuplare.

Pentru cazul plan, tabelul (11.22) de cosinusuri directoare ale axelor reperului invariabil legat de un element (S_i) al sistemului mecanic în raport cu reperul fix va lua forma

	$\bar{i}$	$\bar{j}$
$\bar{i}'_i$	$\cos\varphi_i$	$\sin\varphi_i$
$\bar{j}'_i$	$-\sin\varphi_i$	$\cos\varphi_i$

(11.88)

iar relaţiile (11.23) şi (11.24) vor căpăta formele particulare

$$\begin{aligned} x_{\bullet ij} &= x_{Q_i} + x'_{C_{ij}}(t)\cos\varphi_i - y'_{C_{ij}}(t)\sin\varphi_i = x_{C_{ij}}(t\,;\, x_{Q_i},\ \varphi_i)\,; \\ y_{C_{ij}} &= y_{Q_i} + x'_{C_{ij}}(t)\sin\varphi_i + y'_{C_{ij}}(t)\cos\varphi_i = y_{C_{ij}}(t\,;\, y_{Q_i},\ \varphi_i)\,; \end{aligned} \tag{11.89}$$

respectiv

$$\begin{aligned} x_{C_{ji}} &= x_{Q_j} + x'_{C_{ji}}(t)\cos\varphi_j - y'_{C_{ji}}(t)\sin\varphi_j = x_{C_{ji}}(t\,;\, x_{Q_j},\ \varphi_j)\,; \\ y_{C_{ji}} &= y_{Q_j} + x'_{C_{ji}}(t)\sin\varphi_1 + y'_{C_{ji}}(t)\cos\varphi_j = x_{C_{ji}}(t\,;\, y_{Q_j},\ \varphi_j) \end{aligned} \tag{11.90}$$

timpul t nefigurînd în mod explicit în relaţiile precedente dacă cuplele sînt staţionare.

1) Cuple cinematice plane de clasa I:

Din această clasă de cuple plane, caracterizate prin condiţia

$$k = 1, \tag{11.91}$$

Scanned with CamScanner

fac parte următoarele tipuri mai importante, întîlnite curent în tehnică :

a) *Cupla camă-tachet.* Prezentată obișnuit ca mecanism, această legătură este considerată aici o cuplă cu transmisie ireversibilă, în care elementul conducător (S_i) este o *camă* (*Cm*), în rotație în jurul unei axe fixate fie într-un alt element, (S_k), al sistemului mecanic, fie în spațiu (în batiul unei mașini, șasiul unui aparat etc), iar elementul condus (S_j) este fie un *tachet* (*Tc*), care execută o translație relativă rectilinie alternativă față de elementul pe care este fixată axa camei, ca în cazul cuplei din fig. 11.17, a — reprezentat schematic în fig. 11.17, b — , fie un *tachet oscilant* (*To*), care execută o rotație relativă pendulară, ca în cazul cuplei din fig. 11.18, a — reprezentată schematic în fig. 11.18, b — ; pentru eliminarea frecărilor, contactul dintre tachet și camă se face, de cele mai multe ori, prin intermediul unei role foarte mici, care se rostogolește pe suprafața periferică a camei și al cărei centru va reprezenta punctul teoretic de cuplare în elementul condus.

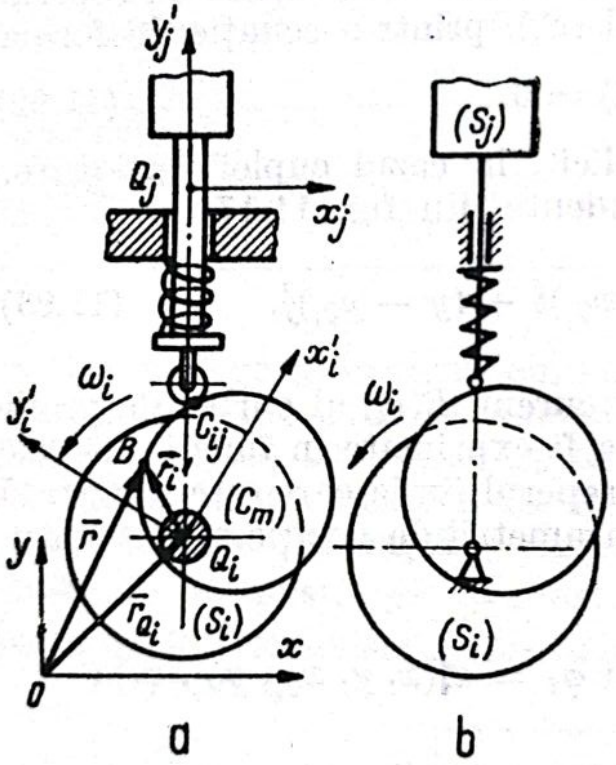


Fig. 11.17

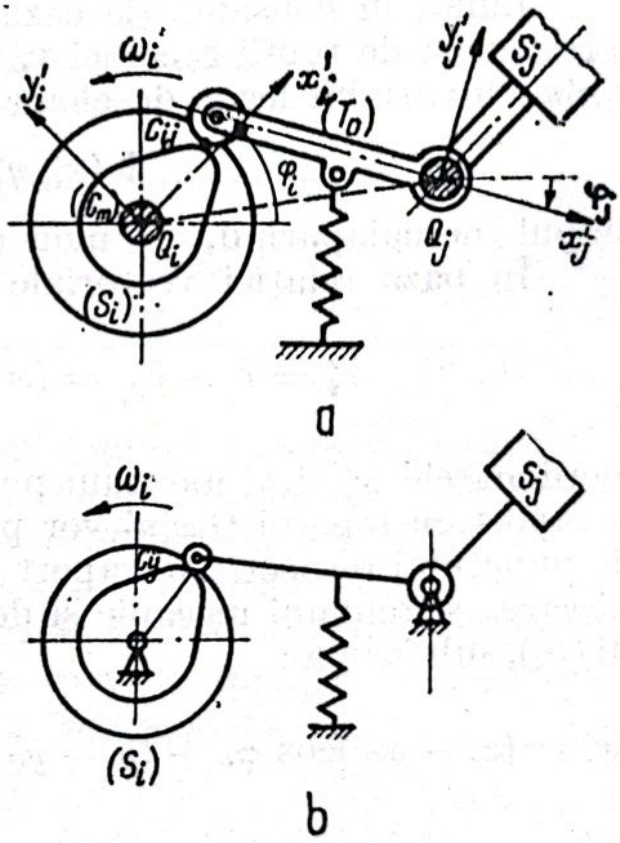


Fig.11.18

Mișcarea relativă — în sensul precizat mai sus — a elementului condus, totdeauna periodică dacă rotația proprie a camei este uniformă, va depinde de profilul ales pentru camă, ea putînd avea caracter continuu în cazul cînd profilul este o curbă închisă care nu conține arce de cercuri cu centrul în centrul de rotație Q_i al camei (de ex., la cama din fig. 11.17), respectiv caracter intermitent, dacă profilul camei rezultă prin racordarea unor curbe oarecare cu arce de cercuri cu centrul în Q_i (de ex., cama din fig. 11.18).

În majoritatea covîrșitoare a situațiilor întîlnite în practică, profilul camei rămîne indeformabil în timpul mișcării (cuplele sînt staționare); există însă și situații cînd, din diverse motive (de ex., din cauza căldurii), acest profil se modifică în timp după o lege cunoscută (cazul cuplelor nestaționare).

Luînd în considerație cazul mai general, al cuplelor nestaționare, curba de profil a camei va fi determinată în raport cu reperul $Q_i x_i' y_i'$, invariabil legat de elementul (S_i), printr-o ecuație de forma

$$\Phi\,(x_i', y_i'\,;\ t) = 0, \tag{11.92}$$

timpul nemaiapărînd, în mod explicit, în cazul cuplei staționare.

În baza relației vectoriale evidente din fig. 11.17, a:

$$\bar{r}_i' = \bar{r} - \bar{r}_{Q_i} = (x - x_{Q_i})\bar{i} + (y - y_{Q_i})\bar{j}, \tag{11.93}$$

coordonatele x_i' și y_i' ale unui punct curent $B(\bar{r}_i')$ al curbei de profil în raport cu reperul $Q_i x_i' y_i'$ vor putea fi exprimate în funcție de cele ale punctului respectiv în raport cu reperul fix la care este raportată mișcarea sistemului mecanic și de parametrii de poziție ai elementului (S_i), sub forma:

$$\begin{cases} x_i' = (x - x_{Q_i})\cos\varphi_i + (y - y_{Q_i})\sin\varphi_i = x_i'(x, y, x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i)\,; \\ y_i' = -(x - x_{Q_i})\sin\varphi_i + (y - y_{Q_i})\cos\varphi_i = y_i'(x, y, x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i). \end{cases} \tag{11.94}$$

Înlocuirea ultimelor expresii în relația (11.92) conduce la următoarea ecuație a curbei de profil a camei, scrisă de astădată în raport cu reperul fix:

$$\psi(x, y\,;\ x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i\,;\ t) = 0. \tag{11.95}$$

Scanned with CamScanner

Condiția de cuplare se va traduce, în continuare, prin satisfacerea acestei ecuații de către coordonatele, în raport cu reperul fix, ale punctului teoretic de cuplare C_{ji} din elementul (S_j), adică prin relația

$$\psi(x_{C_{ji}}, y_{C_{ji}}; x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i; t) = 0. \tag{11.96}$$

Este suficient acum să se înlocuiască coordonatele $x_{C_{ji}}$ și $y_{C_{ji}}$ cu expresiile (11.90), pentru a se obține astfel ecuația de legătură corespunzătoare cuplei camă-tachet, sub forma cea mai generală posibilă, adică

$$f(x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i; x_{Q_j}, y_{Q_j}, \varphi_j; t) = 0, \tag{11.97}$$

ei corespunzîndu-i următoarea ecuație de transmisie a mișcării, de asemenea sub o formă din cele mai generale:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_{Q_i}}\dot{x}_{Q_i} + \frac{\partial f}{\partial y_{Q_i}}\dot{y}_{Q_i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_i}\dot{\varphi}_i + \frac{\partial f}{\partial x_{Q_j}}\dot{x}_{Q_j} + \frac{\partial f}{\partial y_{Q_j}}\dot{y}_{Q_j} + \frac{\partial f}{\partial \varphi_j}\dot{\varphi}_j + \frac{\partial f}{\partial t} = 0} \tag{11.98}$$

Se înțelege că în cazul cînd corpul față de care se execută mișcările relative ale camei și tachetului este fix în spațiu, ecuațiile (11.97) și (11.98) iau forme apreciabil simplificate. Astfel, în cazul unei cuple staționare ca cea din fig. 11.17, prin alegerea axei fixe Oy paralelă la direcția mișcării axei $Q_jy'_j$ a tachetului ($x_{Q_j} = \text{const}$; $\varphi_j \equiv 0$; $x_{Q_i} = \text{const.}$; $y_{Q_i} = \text{const.}$; $\varphi_i = \varphi_i(t)$, ecuația de legătură și ecuația de transmisie a mișcării vor lua formele

$$\boxed{f(\varphi_i; y_{Q_j}) = 0}, \tag{11.99}$$

respectiv

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}\omega_i + \frac{\partial f}{\partial y_{Q_j}}v_{Q_j} = 0}, \tag{11.100}$$

iar în cazul unei cuple staţionare ca cea din fig. 11.18 ($x_{Q_i} = \text{const.}$; $y_{Q_i} = \text{const.}$; $\varphi_i = \varphi_i(t)$; $x_{Q_j} = \text{const.}$; $y_{Q_j} = \text{const}$; $\varphi_j = \varphi_j(t)$), aceste ecuaţii vor lua formele :

$$\boxed{f(\varphi_i, \varphi_j) = 0}, \tag{11.101}$$

şi

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}\,\omega_i + \frac{\partial f}{\partial \varphi_j}\,\omega_j = 0}. \tag{11.102}$$

b) ***Cupla prin fir sau tijă rigidă.*** Este vorba de aceeaşi cuplă examinată şi la subpunctul 2.1.1.2., numai că, datorită condiţiilor funcţionale (11.14) corespunzătoare cazului plan (cu : $z_{Q_i} \equiv 0$; $\psi_i \equiv 0$; $\theta_i \equiv 0$), ecuaţia de legătură (11.36) şi ecuaţia de transmisie a mişcării (11. 38) vor lua formele simplificate :

$$\boxed{[(x_{Q_i} - x_{Q_j}) - \alpha]^2 + [(y_{Q_i} - y_{Q_j}) - \beta]^2 - L_{ij}^2(t) = 0}, \tag{11.103}$$

respectiv

$$\boxed{\begin{aligned}&[(\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j}) - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}]\,[x_{Q_i} - x_{Q_j}) - \alpha] + \\ &+ \left[(\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j}) - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right][(y_{Q_i} - y_{Q_j}) - \beta] - L_{ij}\,\frac{\mathrm{d}L_{ij}}{\mathrm{d}t} = 0\end{aligned}} \tag{11.104}$$

cu ultimul termen nefigurînd în mod explicit în ecuaţia de transmisie a mişcării în cazul cuplei staţionare.

Trebuie făcută şi aici precizarea că încadrarea, în această lucrare, a legăturii pasive prin camă-tachet în categoria cuplelor cinematice plane de clasa întîi se explică, pe de o parte, prin raţiuni

Scanned with CamScanner

analoge celor menţionate în cazul legăturii prin articulaţie universală şi, pe de altă parte, prin faptul că în fond, dacă se neglijează rola de contact, acest tip de legătură pasivă este întru totul asimilabil unui reazem cu alunecare, cu elementul solidar cu tachetul supus, obişnuit, şi la anumite legături exterioare.

De altfel, acest mod de a privi problema legăturilor pasive aplicate unui sistem mecanic va permite, aşa cum se va vedea în continuare, şi stabilirea unei formule mult mai simple şi mai comode de utilizat pentru calculul numărului gradelor de libertate ale unui sistem mecanic, calcul absolut necesar rezolvării problemelor de dinamica sistemelor de rigide.

2) Cuple cinematice plane de clasa a II-a

Din această ultimă clasă de cuple cinematice plane, caracterizate prin condiţia

$$k = 2, \tag{11.105}$$

vor fi examinate următoarele trei tipuri, întîlnite frecvent în practica inginerească :

a) *Cupla disc circular-plan de sprijin.* Acest tip de cuplă cinematică plană se realizează fixînd de elementul (S_i) al unui sistem mecanic un disc circular (Dc), care se sprijină în permanenţă pe o porţiune de suprafaţă plană (Π_j) ataşată unui alt element (S_j) al sistemului mecanic, deplasarea relativă a discului pe suprafaţa de spri-

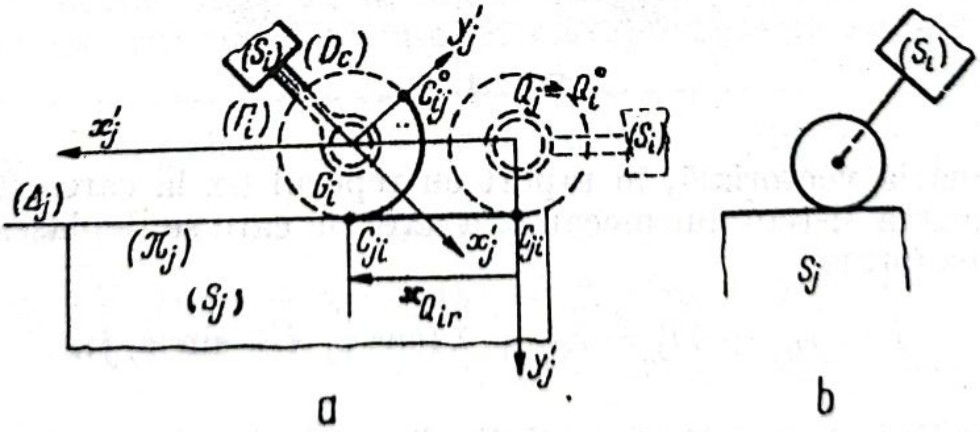


Fig. 11.19

jin fiind o mişcare plan-paralelă cu translaţia rectiliuie, efectuată prin rostogolire pură, (fig. 11.19, a) ; reprezentarea schematică a unui asemenea cuple se face ca în fig. 11.19, b.

Drept punct teoretic de cuplare se consideră punctul C_{ij} de contact al cercului (Γ_i), de secțiune transversală mediană a discului, cu dreapta (Δ_j), reprezentînd intersecția suplafeței plane (Π_j) din elementul (S_j) cu planul director al mișcării relative plan-paralele a discului — deci și a elementului (S_i) căruia îi este atașat —, în raport cu elementul (S_j).

Suprafața plană de sprijin (Π_j) își poate schimba uneori, după o lege cunoscută de timp, poziția în elementul (S_j) (cazul cuplei nestaționare), dar cel mai adesea ea rămîne invariabilă în elementul (S_j) considerat (cazul cuplei cinematice staționare).

Considerînd aici cazul cel mai des întîlnit în practica inginerească, al cuplei staționare și luînd originea Q_i a reperului $Q_i x_i' y_i'$ legat de elementul (S_i) în centrul discului și paralela la axa (Δ_j), după care se deplasează centrul discului în mișcarea relativă față de elementul (S_j), ca axă $Q_j x_j'$, învariabil legată de acest din urmă element, se vor alege astfel celelalte axe ale reperelor $Q_i x_i' y_i'$ și $Q_j x_j' y_j'$ încît reperele să fie drepte și în momentul inițial ele să coincidă, (fig. 11.20).

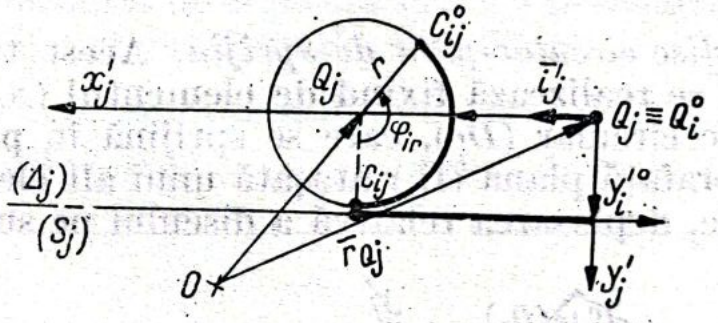


Fig. 11.20

Ecuația vectorială, în raport cu reperul fix la care este raportată mișcarea sistemului mecanic, a axei pe care se deplasează polul Q_i va avea forma

$$\bar{r} = \bar{r}_{Q_j} + \lambda \bar{i}_j' = \bar{r}_{Q_j} + \lambda (\cos \varphi_j \, \bar{i} + \sin \varphi_j \, \bar{j}), \qquad (11.106)$$

iar obligativitatea pentru polul Q_i de a rămîne în permanență pe această dreaptă se va traduce prin ecuația

$$\bar{r}_{Q_i} = \bar{r}_{Q_j} + \lambda_i \bar{i}_j' = \bar{r}_{Q_j} + \lambda_i (\cos \varphi_j \, \bar{i} + \sin \varphi_j \, \bar{j}), \qquad (11.107)$$

Scanned with CamScanner

care, prin proiectare pe axele fixe şi eliminarea lui λ_i, va conduce la o primă ecuaţie de legătură corespunzătoare acestei cuple cinematice, avînd forma :

$$\frac{x_{Q_i} - x_{Q_j}}{\cos \varphi_j} = \frac{y_{Q_i} - y_{Q_j}}{\sin \varphi_j}. \tag{11.108}$$

O a doua ecuaţie de legătură va fi de natură cinematică şi va exprima că lungimile elementelor de arc descrise de punctul teoretic de cuplare pe periferia cercului şi pe suprafaţa de sprijin sînt, în condiţiile rostogolirii pure, egale ; prin integrarea acestei relaţii diferenţiale se obţine, în baza modului de alegere a celor două repere (fig. 11.20), următoarea ecuaţie de legătură suplimentară :

$$r\,|\,\varphi_{i_r}\,| = |\,\bar{r}_{Q_i} - \bar{r}_{Q_j}\,| = \sqrt{(x_{Q_i} - x_{Q_j})^2 + (y_{Q_i} - y_{Q_j})^2}, \tag{11.109}$$

r fiind raza discului, iar $\varphi_{ir} = \varphi_i - \varphi_j$ fiind unghiul de rotaţie relativă a elementului (S_1) în raport cu elementul (S_j).

Cele două ecuaţii de legătură corespunzătoare cuplei disc circular — plan de sprijin vor putea fi scrise deci sub formele :

$$\boxed{\begin{aligned} &(x_{Q_i} - x_{Q_j})\sin \varphi_j - (y_{Q_i} - y_{Q_j})\cos \varphi_j = 0\,; \\ &(x_{Q_i} - x_{Q_j})^2 + (y_{Q_i} - y_{Q_j})^2 - r^2(\varphi_i - \varphi_j)^2 = 0 \end{aligned}} \tag{11.110}$$

Prin derivarea lor în raport cu timpul se obţin şi următoarele ecuaţii de transmisie a mişcării corespunzătoare acestei cuple :

$$\boxed{\begin{aligned} &(\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j})\,\sin \varphi_j - (\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j})\cos \varphi_j + \omega_j(x_{Q_i} - x_{Q_j})\cos \varphi_j + \\ &\qquad + \omega_j(y_{Q_i} - y_{Q_j})\sin \varphi_j = 0\,; \\ &(\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j})(x_{Q_i} - x_{Q_j}) + (\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j})(y_{Q_i} - y_{Q_j}) - \\ &\qquad - r^2(\omega_i - \omega_j)(\varphi_i - \varphi_j) = 0\,, \end{aligned}} \tag{11.111}$$

b) *Cupla articulaţie cilindrică*. Această cuplă, realizată cu ajutorul pieselor de legătură *ochi* (*Oc*) — *ureche* (*Uc*) — *bolţ* (*Bţ*), (fig. 11.21, a), sau alteori cu ajutorul piesei *buton de manivelă* (*Bt*), fig.

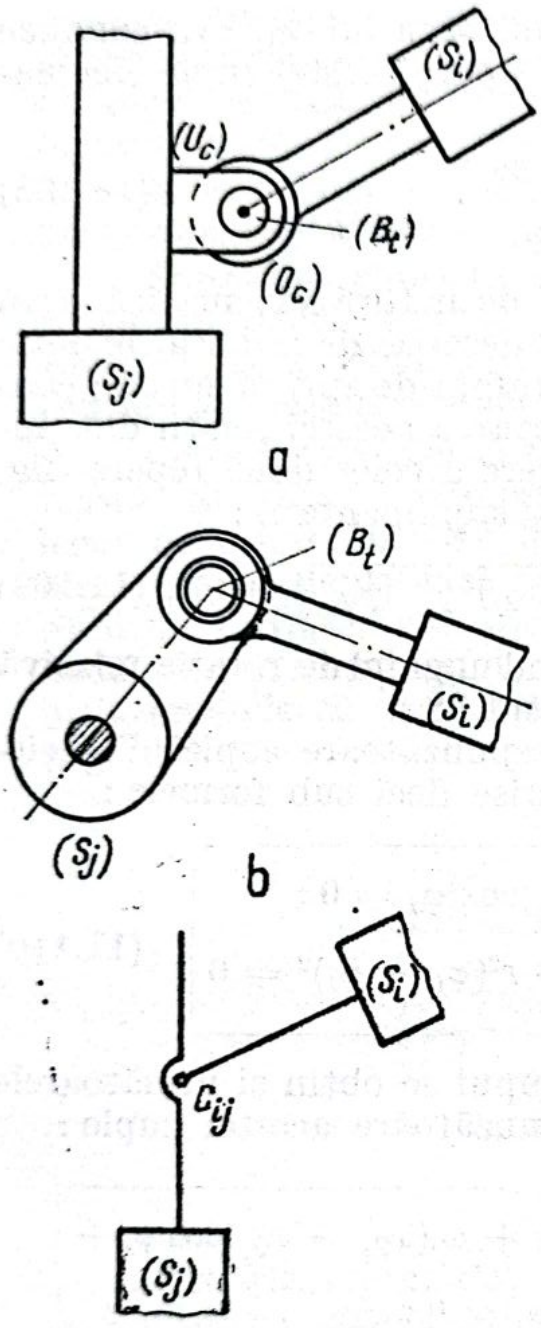


Fig. 11.21

11.21, b), permite celor două elemente cuplate prin ea, (S_i) și (S_j), să execute, ca mișcări relative, rotații în jurul unei axe comune, $(\Delta_{ij}) \equiv (\Delta_{ji})$, imobilizată în ambele elemente; reprezentarea schematică a acestei cuple se face ca în fig. 11.21 c.

Drept punct teoretic de cuplare se consideră centrul C_{ij} al ochiului (Oc) legat de elementul (S_i), respectiv centrul C_{ji} al porțiunii de bolț cuprinsă între cele două părți ale urechii (Uc), fixată de elementul (S_j); aceste puncte vor coincide în permanență în cazul cuplei staționare, iar în cazul cuplei nestaționare vectorul $\bar{b}_{ij} = \overrightarrow{C_{ji}\,C_{ij}} = \bar{b}_{ij}(t)$ va fi o funcție vectorială cunoscută de timp.

Considerînd cazul mai general, al cuplei nestaționare, condiția de cuplare a elementelor (S_i) și (S_j) se va traduce prin relația

$$\bar{r}_{C_{ij}} - \bar{r}_{C_{ji}} = \bar{b}_{ij}, \qquad (11.112)$$

respectiv prin ecuațiile scalare de proiecții pe axele fixe:

$$x_{C_{ij}} - x_{C_{ji}} = b_{ij_x}(t)\,;\; y_{C_{ij}} - y_{C_{ji}} = b_{ij_y}(t) \qquad (11.113)$$

Este suficient să se înlocuiască coordonatele, în raport cu reperul fix, ale punctelor C_{ij} și C_{ji} cu expresiile (11.89) și (11.90) pentru a se obține astfel următorul sistem de ecuații de legătură pentru cupla articulație cilindrică:

$$\begin{aligned} &x_{O_i} - x_{O_j} + x'_{C_{ij}} \cos\varphi_i - y'_{C_{ij}} \sin\varphi_i - x'_{C_{ji}} \cos\varphi_j + y'_{C_{ij}} \sin\varphi_j - b_{ij_x}(t) = 0\,; \\ &y_{O_i} - y_{O_j} + x'_{C_{ij}} \sin\varphi_i + y'_{C_{ij}} \cos\varphi_i - x'_{C_{ji}} \sin\varphi_j - y'_{C_{ji}} \cos\varphi_j - b_{ij_x}(t) = 0. \end{aligned} \qquad (11.114)$$

Scanned with CamScanner

Prin derivarea în raport cu timpul a ecuațiilor precedente, se obține și sistemul de ecuații de transmisie a mișcării corespunzătoare cuplei analizate :

$$\dot{x}_{Q_i} - \dot{x}_{Q_j} - \omega_i(x'_{c_{ij}} \sin\varphi_i + y'_{c_{ij}} \cos\varphi_i) + \omega_j(x'_{c_{ji}} \sin\varphi_j + y'_{c_{ji}} \cos\varphi_j) - \dot{b}_{ij_x}(t) = 0;$$

$$\dot{y}_{Q_i} - \dot{y}_{Q_j} + \omega_i(x'_{c_{ij}} \cos\varphi_i - y'_{c_{ij}} \sin\varphi_i) - \omega_j(x'_{c_{ji}} \cos\varphi_j - y'_{c_{ji}} \sin\varphi_j) - \dot{b}_{ij_y}(t) = 0, \quad (11.115)$$

cu ultimii termeni lipsind în cazul cuplei staționare ($\dot{b}_{ij_x} = \dot{b}_{ij_y} = 0$).

c) *Cupla plană de translație rectilinie.* Această ultimă cuplă ce urmează a mai fi examinată este identică, ca execuție tehnică, cu cupla prezentată la subpunctul 2.1.5.1, cu singura deosebire că solicitările aplicate elementelor (S_i) și (S_j) pe care le cuplează, (fig. 11.22, a), corespund unor distribuții plane de forțe, situate în planul fix în care se consideră că se deplasează centrele de masă ale celor două elemente ; o asemenea cuplă, reprezentată schematic în fig. 11.22,b, permite deci celor două rigide cuplate prin ea să aibă ca mișcări relative reciproce translații rectilinii în același plan fix, ales ca plan de coordonate Oxy.

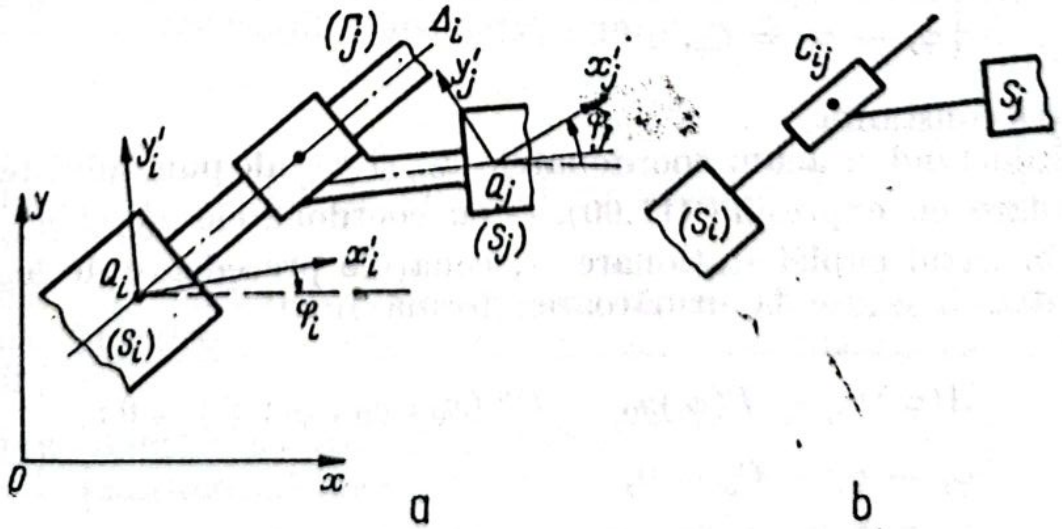


Fig.11.22

Considerînd, în continuare, numai cazul cuplei staționare, axa (Δ_i) a tijei de ghidare (Tj), solidară cu elementul (S_i), va avea în reperul $Q_i x_i' y_i'$, atașat invariabil elementului (S_i), ecuația

$$ax_i' = by_i' + c = 0, \tag{11.116}$$

cu a, b și c constante, această ecuație luînd, prin înlocuirea coordonatelor x_i' și y_i' ale unui punct curent al axei cu expresiile (11.94), forma

$$Ax + By + C = 0, \tag{11.117}$$

cu coeficienții A, B și C funcții acum de parametrii de poziție ai elementului (S_i) :

$$\begin{cases} A = a\cos\varphi_i - b\sin\varphi_i = A(\varphi_i); \\ B = a\sin\varphi_i + b\cos\varphi_i = B(\varphi_i); \\ C = c - x_{Q_i}(a\cos\varphi_i - b\sin\varphi_i) - y_{Q_i}(a\sin\varphi_i + b\cos\varphi_i) = \\ \qquad\qquad = C(x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i). \end{cases} \tag{11.118}$$

Condițiile de cuplare, asigurînd translația rectilinie relativă a elementului (S_j) față de elementul (S_i), se vor traduce prin relațiile

$$\begin{cases} A(\varphi_i)\, x_{C_{ji}} + B(\varphi_i)\, y_{C_{ji}} + C(x_{Q_i}, y_{Q_i}, \varphi_i) = 0; \\ \varphi_j - \varphi_i = C_0, \end{cases} \tag{11.119}$$

C_0 fiind o constantă.

Înlocuind și acum coordonatele $x_{C_{ji}}$ și $y_{C_{ji}}$ ale punctului teoretic de cuplare cu expresiile (11.90), — cu coordonatele $x'_{C_{ji}}$ și $y'_{C_{ji}}$ constante în cazul cuplei staționare —, ecuațiile precedente de legătură vor putea fi aduse la următoarea formă finală :

$$\boxed{\begin{aligned} &A(\varphi_i)x_{Q_j} + B(\varphi_i)y_{Q_j} + C^*(x_{Q_j}, y_{Q_i}, \varphi_i; \varphi_j) = 0; \\ &\varphi_j - \varphi_i - C_0 = 0, \end{aligned}} \tag{11.120}$$

cu

$$C^* = A(\varphi_i)[x'_{C_{ji}} \cos \varphi_j - y'_{C_{ji}} \sin \varphi_j] + \\ + B(\varphi_i)[x'_{C_{ji}} \sin \varphi_j + y'_{C_{ji}} \cos \varphi_j] + C, \tag{11.121}$$

prin derivarea lor în raport cu timpul rezultînd şi ecuaţiile de transmisie a mişcării corespunzătoare :

$$\boxed{\begin{aligned} &A(\varphi_i)\,\dot{x}_{Q_j} + B(\varphi_i)\,\dot{y}_{Q_j} + \omega_i\left[\frac{dA}{d\varphi_i}\,x_{Q_j} + \frac{dB}{d\varphi_i}\,y_{Q_j}\right] + \frac{dC^*}{dt} = 0\,; \\ &\omega_j - \omega_i = 0. \end{aligned}} \tag{11.122}$$

În încheierea prezentării celor mai uzuale cuple cinematice spaţiale şi plane se vor mai face următoarele două observaţii :

1) Ecuaţiile de legătură şi de transmisie a mişcării, stabilite sub forme mai generale în cadrul acestui subpunct, pot căpăta forme mult simplificate în cazul cuplelor staţionare, prin alegerea punctelor teoretice de cuplare fixe din elemente ca poli invariabil legaţi de elementele respective.

2) Pentru cuplele cinematice analizate pot fi scrise şi alte forme ale ecuaţiilor de legătură, echivalente celor stabilite în lucrarea de faţă, uneori chiar şi mai simple decît acestea, prin examinarea altor proprietăţi ale restricţiilor geometrice impuse de cuple elementelor cuplate.

11.3. *Transmisii de mişcări prin mecanisme uzuale*

Cele mai multe din mecanismele întîlnite în mod obişnuit în aplicaţiile practice fac parte din una din următoarele două mari categorii :

— mecanisme cu roţi de transmisie ;
— mecanisme cu bare.

Scanned with CamScanner

În cele ce urmează vor fi examinate cele mai uzuale tipuri de mecanisme din prima categorie, iar în legătură cu mecanismele din cea de-a doua categorie vor fi prezentate două din cele mai generale metode de studiere a lor, una corespunzătoare mecanismelor spațiale, iar cealaltă mecanismelor plane.

11.3.1. Mecanisme cu roți de transmisie

Acestei prime categorii de mecanisme îi aparțin următoarele trei grupe principale :

1°. Mecanisme cu roți de transmisie cu poziții relative fixe ale axelor de rotație proprie

Aceste mecanisme permit transmiterea unei rotații proprii de la un element (S_i) la un alt element (S_j), atunci cînd axele de rotație proprie ale acestor elemente, $(\Delta_i) \equiv Q_i z_i'$ și $(\Delta_j) \equiv Q_j z_j'$, sînt, ambele, imobilizate fie într-un alt element (S_k) al sistemului mecanic, fie într-un corp fix din mediul înconjurător, acesta fiind, de regulă în practica inginerească, *batiul* unei mașini, sau *șasiul* unui aparat.

Transmiterea de rotații proprii se realizează prin intermediul unor suprafețe de revoluție cu axele de revoluție coincizînd cu axele de rotație proprie, solidare cu elementele (S_i), respectiv (S_j) —porțiuni de hiperboloizi cu o pînză, porțiuni de conuri circulare drepte și porțiuni de cilindri circulari drepți — și purtînd numele generic de *roți de transmisie*; antrenarea *roții conduse* — și deci și a elementului condus — de către *roata conducătoare* poate fi realizată în următoarele două moduri :

— *Prin contact direct* între roțile de transmisie, asigurîndu-se, prin mijloace speciale, rostogolirea fără alunecare a suprafețelor de revoluție în contact în direcție normală la generatoarea comună. Mijloacele uzuale de evitare a alunecărilor sînt :

— executarea de profile speciale care se întrepătrund-numite *dinți* — pe suprafețele în contact, în care caz cuplajul este numit *angrenaj cu roți dințate;*

— crearea de suprafețe aspre în contact, în care situație cuplajul este numit *mecanism cu roți de fricțiune.*

— Prin *elemente flexibile de legătură* între roţile de transmisie, numite obişnuit *şaibe* şi în unele situaţii *role* —, elementele flexibile fiind reprezentate, de regulă, prin *curelele de transmisie*, sau prin *lanţurile cu zale de diverse tipuri.*

a) *Angrenaje cu roţi dinţate.* Principiul de transmisie a mişcării de rotaţie proprie în cazul acestor angrenaje este totdeauna următorul :

Cercurile de secţiune transversală, (Γ_i) şi (Γ_j), corespunzătoare unui punct $C_{ij} \equiv C_{ji}$ de contact de pe generatoarea comună a suprafeţelor de revoluţie ale roţilor primitive se rostogolesc fără alunecare unul pe altul, rezultînd deci condiţia

$$\text{lung } \overset{\frown}{C_{ij}\, C_{ij}^0} = \text{lung } \overset{\frown}{C_{ji}\, C_{ji}^0}, \qquad (11.123)$$

C_{ij}^0 şi C_{ji}^0 fiind poziţiile punctului de contact în cele două cercuri în momentul iniţial, (fig. 11.23, a), iar C_{ij} şi C_{ji} poziţiile lor într-un moment în care roata conducătoare a executat o rotaţie proprie de un unghi φ_i, (fig. 11.23, b).

Notînd cu R_i şi R_j razele celor două cercuri,relaţia (11. 123) va putea fi înlocuită cu următoarea

$$R_i \varphi_i = \mp R_j \varphi_i, \qquad (11.124)$$

semnul din faţa termenului din membrul drept urmînd a fi precizat în funcţie de semnele celor două unghiuri de rotaţie raportate la versorii $\bar{k}_i'$, respectiv $\bar{k}_j'$, astfel încît ambii termeni ai egalităţii să aibă acelaşi semn.

În cazul roţilor dinţate cu dantură normală, cercurile considerate în contact poartă numele de *cercuri de rostogolire*, iar distanţa p, dintre un plin şi un gol pe cercul de rostogolire, este

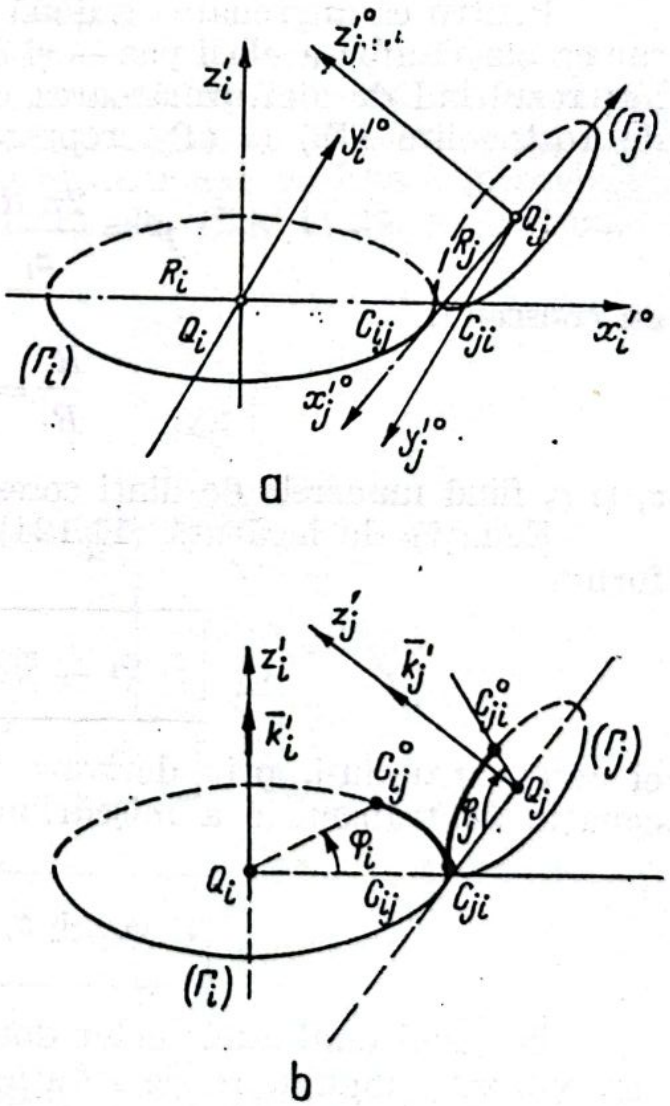


Fig.11.23

numită *pasul* dinților; între pasul p, numărul z de dinți și raza R a cercului de rostogolire al unei roți dințate există relația evidentă

$$zp = 2\pi R, \tag{11.125}$$

pasul putînd fi exprimat și cu ajutorul *modulului* dinților sub forma

$$p = \pi m, \tag{11.126}$$

unde modulul m este definit ca raportul dintre diametrul cercului primitiv și numărul z de dinți ai roții respective, adică

$$m = \frac{D}{z} = \frac{2R}{z}. \tag{11.127}$$

Pentru ca angrenarea a două roți dințate să aibă loc este necesar ca ele să aibă același pas — și deci și același modul — al dinților lor, rezultînd de aici următoarea condiție pentru roțile cu cercurile de rostogolire (Γ_i) și (Γ_j) reprezentate în fig. 11.23 :

$$p = \frac{2\pi R_i}{z_i} = \frac{2\pi R_j}{z_j}, \tag{11.128}$$

cu consecința

$$\frac{R_i}{R_j} = \frac{z_i}{z_j}, \tag{11.129}$$

z_i și z_r fiind numerele de dinți corespunzătoare.

Ecuația de legătură (11.124) va mai putea fi scrisă deci sub forma

$$\boxed{z_i \varphi_i \pm z_j \varphi_j = 0}, \tag{11.130}$$

ei corespunzîndu-i, prin derivare în raport cu timpul, următoarea ecuație de transmisie a mișcărilor de rotație proprie :

$$\boxed{z_i \omega_{r_i} \pm z_j \omega_{r_j} = 0}. \tag{11.131}$$

În cazul cînd axele celor două roți angrenate sînt fixe în spațiu, vitezele unghiulare de rotație proprie ale roților coincid chiar cu vitezele lor unghiulare absolute ; în asemenea situații, ecuația de

Scanned with CamScanner

transmisie a mișcării de la roata conducătoare ($\mathscr{R}_i$) la roata condusă ($\mathscr{R}_j$) se scrie sub forma

$$\boxed{\frac{\omega_j}{\omega_i} = \mp \frac{z_i}{z_j} = i_{ij}} \tag{11.132}$$

raportul

$$i_{ij} = \mp \frac{z_i}{z_r} \tag{11.133}$$

numindu-se *raport de transmisie* al angrenajului respectiv *.

În funcție de pozițiile relative ale axelor de rotație proprie ale celor două roți de transmisie, pot fi deosebite următoarele tipuri principale de angrenaje cu roți dințate:

— *Angrenaje cu roți dințate elicoidale.* Aceste angrenaje cu roți dințate, care au axele longitudinale ale dinților în formă de porțiuni de elici coaxiale de același pas și același unghi de înfășurare, permit transmiterea de rotații proprii în jurul unor axe nesituate în același plan, formînd un unghi oarecare între ele, (fig. 11.24, a), cel mai

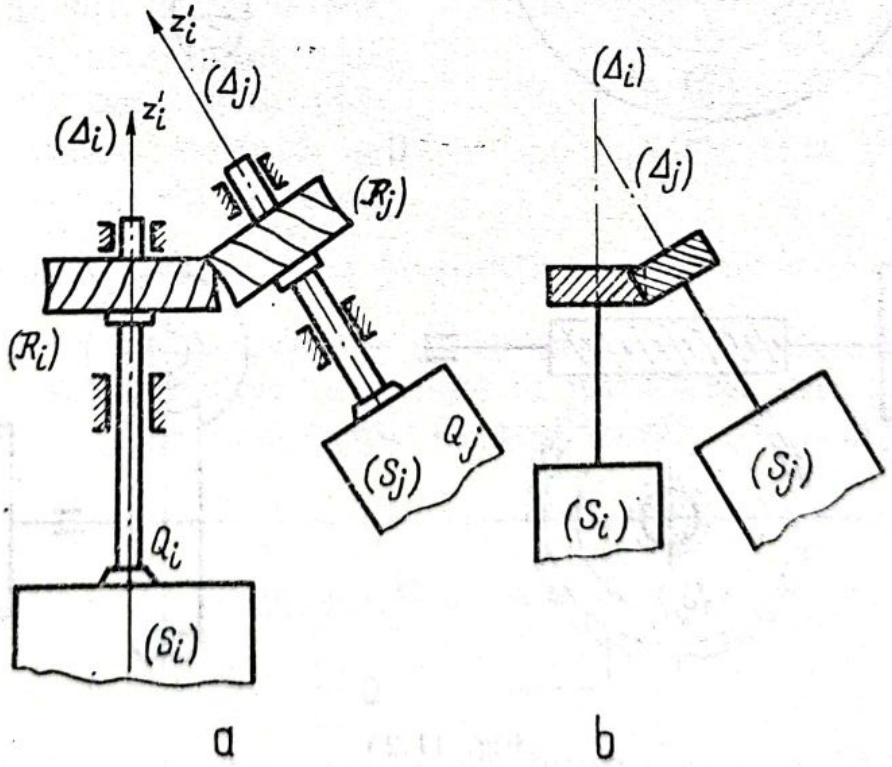


Fig. 11.24

* În multe lucrări raportul de transmisie se notează cu indicii inversați; în lucrarea de față va fi menținută peste tot notația de mai sus.

adesea valoarea acestui unghi fiind însă de $\pi/2$ radiani; reprezentarea schematică a unui asemenea angrenaj se face ca în fig. 11.24, b.

Ecuația de legătură are și acum forma (11.130), iar ecuația de transmisie a mișcării este reprezentată prin relația (11.131), respectiv prin relația (11.132), dacă axele celor două roți sînt fixe în spațiu.

Un caz oarecum limită al cuplajului prin roți elicoidale îl constituie *angrenajul șurub melc-roată melcată*, reprezentat în fig. 11.25,

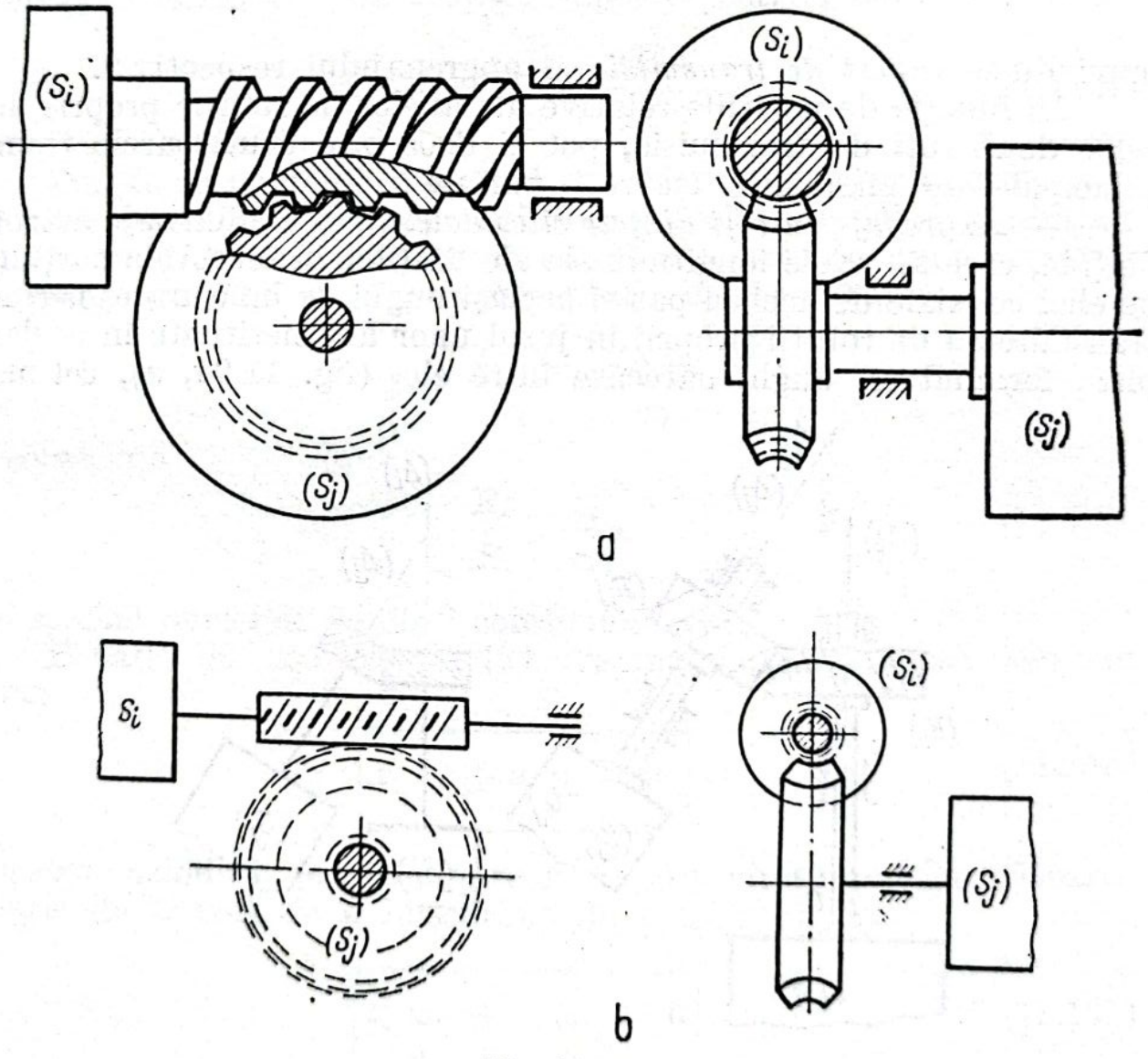


Fig. 11.25

a și schematic în fig. 11.25, b, angrenaj folosit în tehnică ca *reductor de viteză*, cu un raport de transmisie variind între 1 și 80 la mașini și ajungînd pînă la 500 la unele aparate de mare precizie și finețe.

Scanned with CamScanner

Acest angrenaj, în care sensul transmisiei este, din motive de autofrînare, ireversibil, are totdeauna ca element conducător un șurub (Sm), cu unul sau mai multe începuturi — adică cu una, sau mai multe elici care formează filetele —, acest element conducător purtînd numele de *șurub melc*, iar ca element condus o roată dințată ($\mathcal{R}m_j$), numită *roată melcată*, ai cărei dinți, cu un profil adecvat șurubului, pătrund în golurile dintre filete (fig. 11.26). Condițiile de angrenare implică și aici egalitatea dintre pasul roții dințate și distanța cuprinzînd un plin și un gol pe o generatoare a cilindrului în care au fost executate filetele.

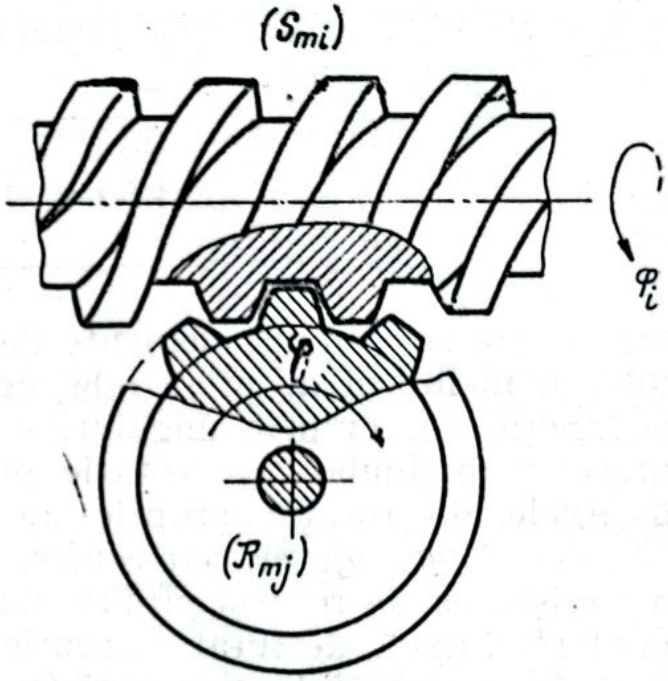


Fig. 11.26

Dacă șurubul are z_m începuturi, atunci în pasul uneia dintre elicele după care au fost construite filetele intră z_m asemenea distanțe, deci z_m pasuri ale roții melcate. În consecință, la o rotație completă de 2π radiani a șurubului melc, un număr de z_m dinți ai roții melcate vor trece prin dreptul punctului teoretic de contact între elemente, deci roata melcată se va roti cu un unghi egal cu $z_m \frac{2\pi}{z}$ radiani, $\frac{2\pi}{z}$ fiind unghiul de rotație corespunzător unui dinte.

Unghiul de rotație proprie φ_j, cu care roata melcată se va roti în cazul cînd șurubul melc se rotește în jurul axei sale de un unghi φ_i, va fi dat, în baza unei reguli de trei simple, de relația

$$\boxed{\varphi_j \pm \frac{z_m}{z_j} \varphi_i = 0,} \qquad (11.134)$$

care va reprezenta ecuația de legătură finită corespunzătoare acestui angrenaj.

Scanned with CamScanner

Prin derivare în raport cu timpul se obține și ecuația de transmisie a mișcării pentru acest cuplaj, sub forma

$$\boxed{\omega_{r_j} \mp \frac{z_m}{z_j}\,\omega_{r_i} = 0} \tag{11.135}$$

dacă angrenajul se află fixat pe un alt element în mișcare și sub forma

$$\boxed{\omega_j = \mp \frac{z_m}{z_j}\,\omega_i} \tag{11.136}$$

dacă axele celor două elemente de cuplare sînt fixe în spațiu; semnul din membrul drept al relațiilor precedente va fi stabilit și aici în funcție de semnele unghiurilor de rotație proprie, respectiv ale vitezelor unghiulare de rotație proprie, raportate la versorii aleși pe axele de rotație proprie ale elementelor.

— *Angrenaje cu roți conice.* Angrenajele cu roți conice transmit mișcarea de rotație proprie de la un element (S_i) la un alt element (S_j), axele de rotație proprie ale celor două roți de transmisie fiind concurente într-un punct O; unghiul dintre axele de rotație este, în majoritatea cazurilor, de $\pi/2$ radiani.

Roțile dințate conice au, de regulă, dinții drepți și pot fi fie cu contact exterior, (fig. 11.27, a), fie cu contact interior, (fig. 11.28, a), reprezentarea schematică a acestor angrenaje făcîndu-se ca în figurile 11.27, b, respectiv 11.28, b.

Convenindu-se ca semnele unghiurilor de rotație proprie ale roților să fie raportate fie la perechea de versori $\vec{i}_{\Delta_i}$ și $\vec{i}_{\Delta_j}$, orientați de la punctul de concurență 0 spre exteriorul roților, fie la perechea de versori $\vec{i}'_{\Delta_i} = -\vec{i}_{\Delta_i}$ și $\vec{i}'_{\Delta_j} = -\vec{i}_{\Delta_j}$, orientați de la punctul O spre roți, (fig. 11.27 și fig. 11.28), ecuația de legătură și ecuația de transmisie a mișcării vor avea și acum formele (11.130) și (11.131) — respectiv (11.132) pentru roțile cu axe fixe —, semnele superioare din relațiile menționate corespunzînd angrenării exterioare, iar cele inferioare angrenării interioare.

În legătură cu transmisia prin angrenaje cu roți conice mai trebuie făcută observația că pentru asigurarea transmisiei fără alunecări, vîrfurile celor două conuri din care au fost tăiate roțile trebuie să coincidă cu punctul O de intersecție a axelor roților.

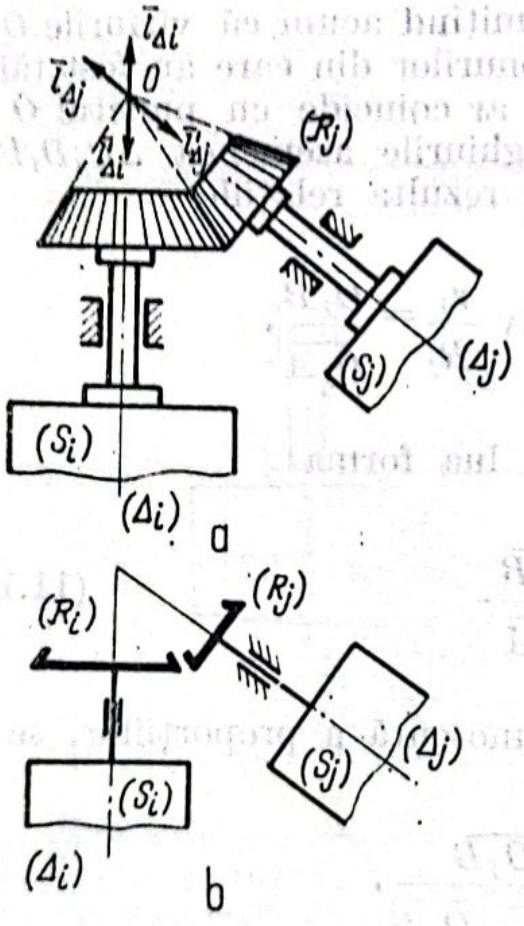


Fig. 11.27

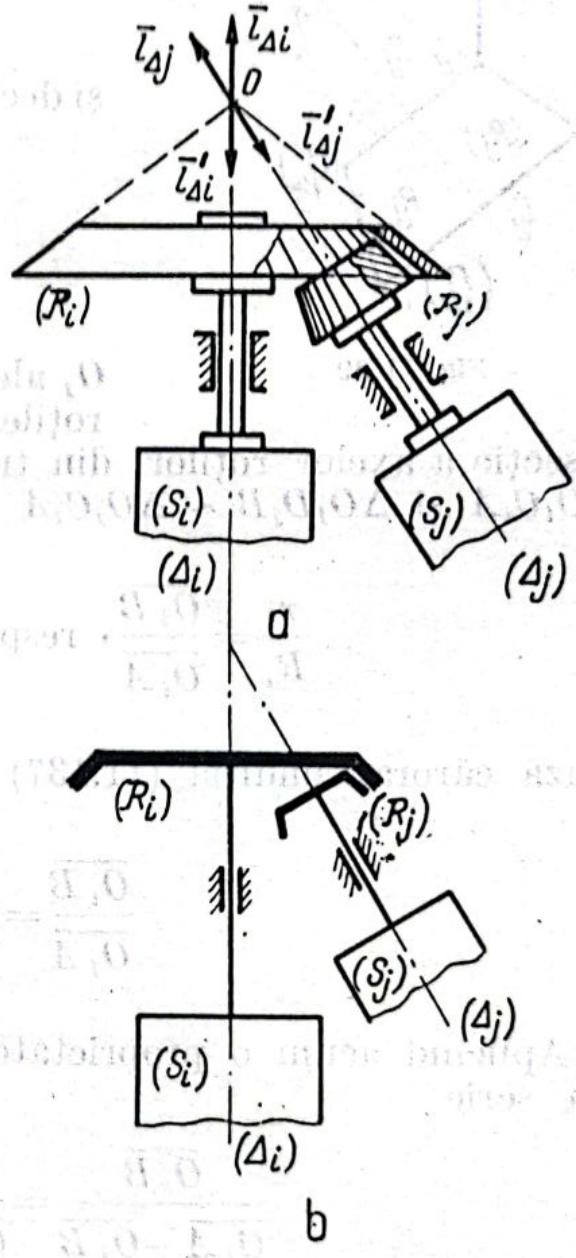


Fig. 11.28

Într-adevăr, considerînd în roțile $(\mathcal{R}_i)$ și $(\mathcal{R}_j)$ perechile de cercuri primitive în contact (Γ_{i_1}) și (Γ_{j_1}), respectiv (Γ_{i_2}) și (Γ_{j_2}), de raze R_i și R_j, respectiv r_i și r_j, (fig. 11.29) și ținînd seama de faptul că în

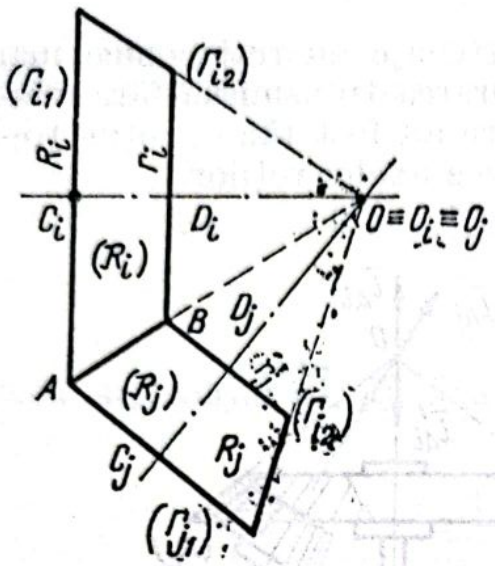


Fig. 11.29

absența alunecării raportul de transmisie va trebui să fie același în ambele perechi de cercuri, va rezulta relația

$$i_{ij} = -\frac{R_i}{R_j} = -\frac{r_i}{r_j}$$

și deci condiția

$$\frac{r_i}{R_i} = \frac{r_j}{R_j}. \qquad (11.137)$$

Admițînd acum că vîrfurile O_i și O_j ale conurilor din care au fost tăiate roțile nu ar coincide cu punctul O de intersecție a axelor roților, din triunghiurile asemenea $\Delta O_iD_iB \sim \Delta O_iC_iA$ și $\Delta O_jD_jB \sim \Delta O_jC_jA$ vor rezulta relațiile

$$\frac{r_i}{R_i} = \frac{\overline{O_iB}}{\overline{O_iA}}, \text{ respectiv } \frac{r_j}{R_j} = \frac{\overline{O_jB}}{\overline{O_jA}},$$

în baza cărora condiția (11.137) va lua forma

$$\frac{\overline{O_iB}}{\overline{O_iA}} = \frac{\overline{O_jB}}{\overline{O_jA}}. \qquad (11.138)$$

Aplicînd acum o proprietate cunoscută a proporțiilor, se va putea scrie

$$\frac{\overline{O_iB}}{\overline{O_iA} - \overline{O_iB}} = \frac{\overline{O_jB}}{\overline{O_jA} - \overline{O_jB}},$$

sau încă

$$\frac{\overline{O_iB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_jB}}{\overline{AB}}, \qquad (11.139)$$

cu consecința evidentă

$$\overline{O_i B} = \overline{O_j B}, \tag{11.140}$$

care, avînd în vedere coliniaritatea punctelor O_i, O_j și B, nu poate fi satisfăcută decît în cazul coincidenței punctelor O_i, O_j și O.

— *Angrenaje cu roți cilindrice.* Aceste angrenaje, formate din roți de transmisie cu axe de rotație proprie paralele și cu dinți drepți, permit transmiterea unei rotații proprii de la un element (S_i) la un alt element (S_j), axele de rotație proprie (Δ_i) și (Δ_j) ale celor două elemente fiind imobilizate fie într-un același element (S_k) al sistemului mecanic, fie într-un rigid fix din mediul înconjurător, acesta fiind, ca de obicei, batiul unei mașini sau șasiul unui aparat.

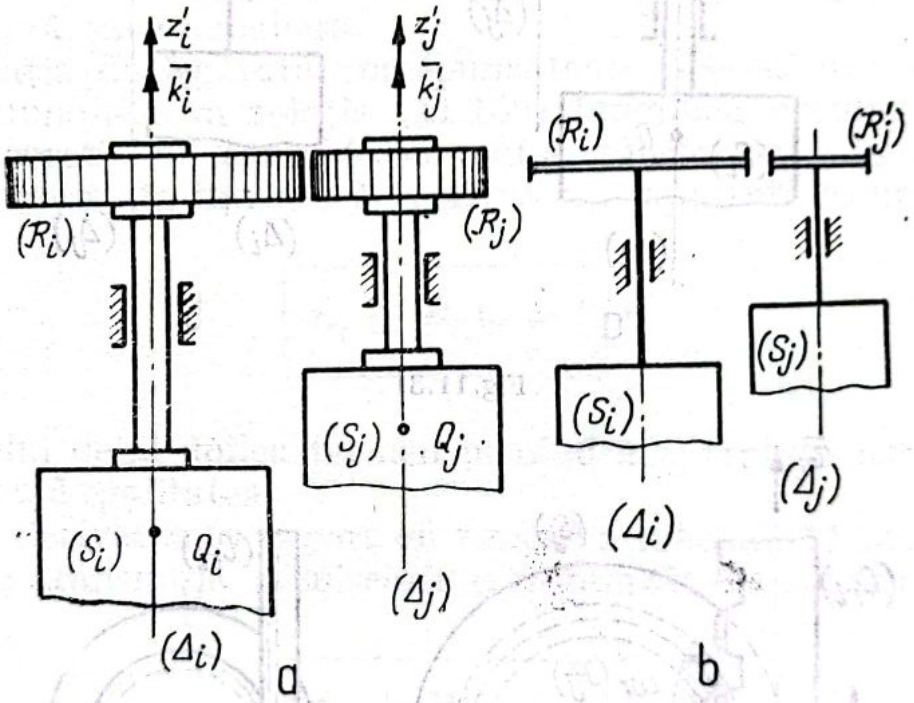


Fig. 11.30

Transmisia este totdeauna reversibilă, adică oricare din roți poate deveni roată conducătoare și cealaltă roată condusă.

Angrenajele cu roți cilindrice pot fi și ele fie cu contact exterior, (fig. 11.30, a), fie cu contact interior, (fig. 11. 31, a), reprezentările schematice ale lor făcîndu-se ca în figurile (11.30, b), respectiv (11.31, b).

Convenindu-se să se orienteze axele $(\Delta_i) \equiv Q_i z_i'$ și $(\Delta_j) \equiv Q_j z_j'$ în același sens, $(\bar{k}_i' = \bar{k}_j')$, ecuația de legătură și ecuația de transmisie a mișcării își vor păstra și acum formele (11.130) și (11.131) — res-

pectiv (11.132) pentru axe de rotaţie fixe —, semnele superioare din relaţii corespunzînd şi de astădată angrenajului exterior, iar semnele inferioare angrenajului interior.

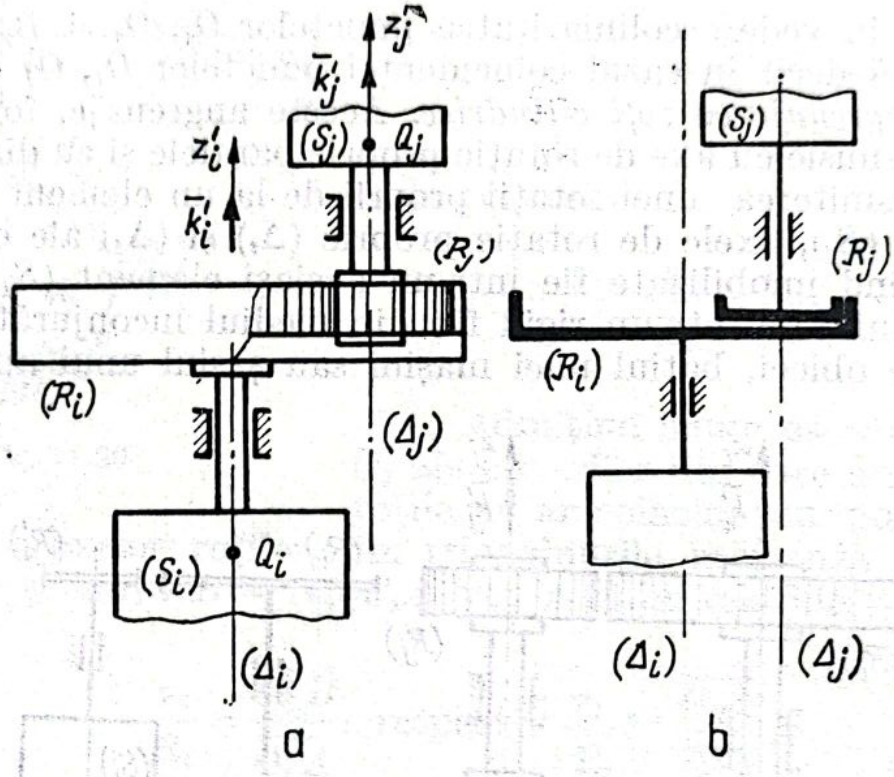


Fig.11.31

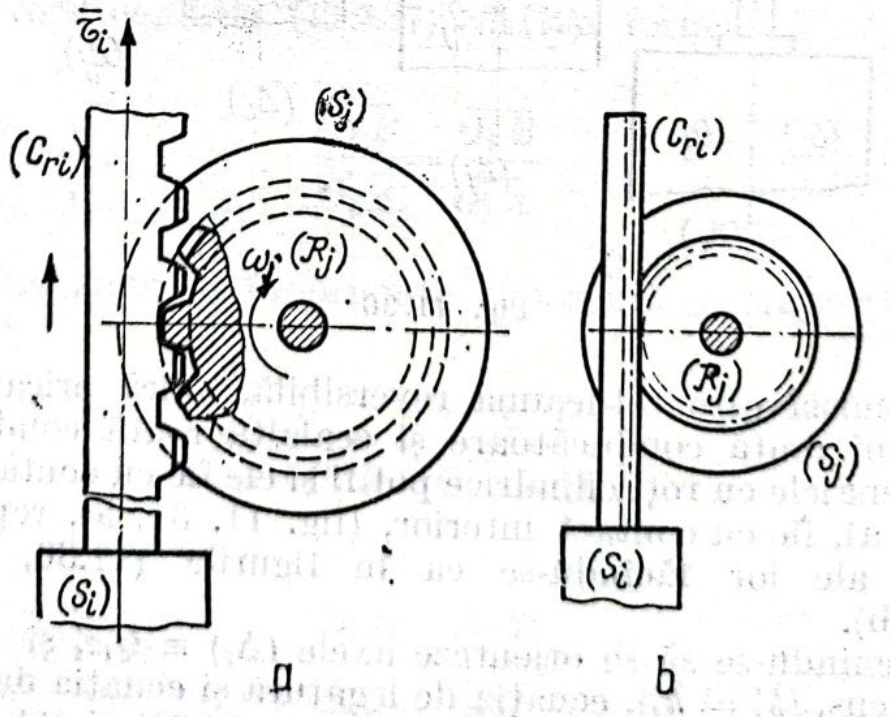


Fig.11.32

Un caz limită al angrenajului cu roți dințate cilindrice îl constituie *angrenajul cremalieră-roată dințată*, el corespunzînd situației cînd raza unuia dintre cercurile primitive devine infinită, adică, roata dințată corespunzătoare se transformă într-o bară rectilinie dințată purtînd numele de *cremalieră* (fig. 11.32, a), căreia i se asigură, prin ghidaje adecvate, o translație rectilinie în raport cu un rigid, acest rigid pe care este imobilizată și axa de rotație proprie a roții dințate putînd fi fie un alt element (S_k) al sistemului mecanic, fie un corp fix din mediul înconjurător, de regulă batiul unei mașini; reprezentarea schematică a angrenajului se face ca în fig. 11.32, b.

Transmisia prin acest angrenaj este reversibilă, el permițînd fie transformarea unei rotații proprii într-o translație rectilinie relativă, fie transformarea inversă, după cum elementul conducător este roata dințată, sau cremaliera.

Ecuația de legătură corespunzătoare acestui angrenaj se obține înlocuindu-se în relația (11.130) lungimea arcului descris de punctul teoretic de contact pe roata transformată în cremalieră, (S_i), cu coordonata intrinsecă relativă s_{r_i}, raportată la un versor τ_i:

$$\boxed{s_{r_i} \pm R_j \varphi_j = 0}, \tag{11.141}$$

semnul celui de-al doilea termen urmînd a fi stabilit astfel încît să fie satisfăcută egalitatea.

Prin derivarea în raport cu timpul a relației (11.141) se obține ecuația de transmisie a mișcării corespunzătoare acestui angrenaj

$$\boxed{v_{r_i} \pm R_j \omega_{r_j} = 0}, \tag{11.142}$$

respectiv

$$\boxed{v_i \pm R_j \omega_j = 0} \tag{11.144}$$

dacă corpul pe care este montat angrenajul este fix.

Revenind la angrenajele de roți dințate cilindrice, mai trebuie menționat faptul că în foarte multe situații întîlnite în aplicațiile tehnice, transmisia de rotații relative între două elemente (S_i) și (S_j)

Scanned with CamScanner

în raport cu un alt element (S_k) al sistemului mecanic, sau transmisia de rotații absolute în cazul elementelor fixate de batiu, se realizează nu prin angrenarea directă a roților dințate ($\mathcal{R}_i$) și ($\mathcal{R}_j$), solidare cu elementele precizate, ci prin intermediul unui subansamblu format din n perechi de roți dințate cilindrice cu contact exterior, cu axele de rotație relativă ale fiecărei perechi paralele la axele de rotație relativă față de elementul (S_k) ale celor două elemente cuplate

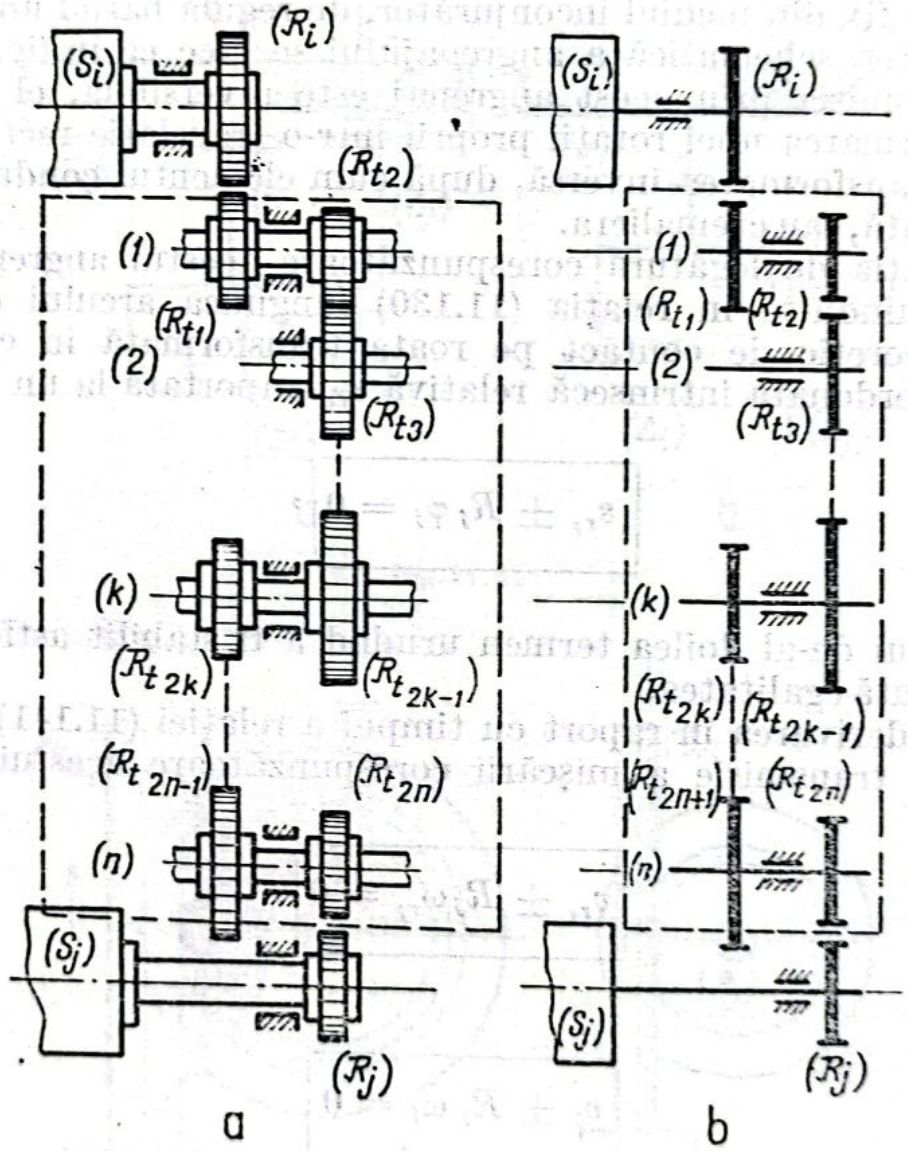


Fig.11.33

prin acest subansamblu și imobilizate în același rigid în care au fost fixate și axele de rotație relativă (Δ_i) și (Δ_j), (fig. 11.33, a); un asemenea subansamblu, reprezentat schematic în fig. 11.33, b), se numește *tren de angrenaje*.

Scanned with CamScanner

În fiecare pereche de asemenea roți solidare între ele, una din roți joacă, ca urmare a succesiunii cuplajelor intermediare, rol de roată conducătoare și cealaltă rol de roată condusă; de regulă, raportul dintre numărul de dinți al roții conduse și numărul de dinți al roții conducătoare este, la toate perechile, fie subunitar, fie supraunitar.

Considerînd o asemenea pereche de roți intermediare cu numărul de ordine $k(k = 1,2,\ldots,n)$, $(\mathscr{R}_{t_{2k-1}})$ și $(\mathscr{R}_{t_{2k}})$ — notația corespunzînd succesiunii cuplajelor de la elementul (S_i) către elementul (S_j), (fig. 11.33, b) — și admițînd, pentru fixarea ideilor, că este satisfăcută condiția

$$z_{t_{2k}} < z_{t_{2k-1}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.144}$$

vor rezulta rapoartele de transmisie

$$\frac{\omega_{t_{2k-1}}}{\omega_{t_{2k-2}}} = -\frac{z_{t_{2k-1}}}{z_{t_{2k-1}}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.145}$$

precum și egalitățile

$$\omega_{t_{2k-1}} = \omega_{t_{2k}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11.146}$$

justificate de fixarea solidară a roților fiecărei perechi pe același ax. (Indicele (t) se referă, peste tot, la tren).

Înmulțind între ele, membru, cu membru, relațiile (11.145) scrise pentru toate cele n perechi de roți și ținînd seama și de egalitățile (11.146), rezultă următoarea expresie a *raportului de transmisie al trenului de angrenaje*:

$$\boxed{\frac{\omega_{t_{2n}}}{\omega_{t_1}} = (-1)^n \frac{z_{t_2} z_{t_4} \ldots z_{t_{2n-2}}}{z_{t_3} z_{t_5} \ldots z_{t_{2n-1}}} = (-1)^n \rho_t = i_{t_{1,2n}}} \tag{11.147}$$

mărimea ρ_t purtînd numele de *rația trenului de angrenaje.*

În condițiile (11.144), trenul de angrenaje poartă numele de *reductor de turație* dacă elementul conducător este (S_i), $(\rho_t < 1;\ |\omega_{t_{2n}}| < |\omega_{t_1}|)$ și este numit *multiplicator de turație*, dacă elementul conducător este (S_j).

Scanned with CamScanner

Dacă se ţine seama acum şi de valoarea raportului de transmisie de la elementul (S_i), solidar cu roata $(\mathscr{R}_i)$ cu z_i dinţi :

$$\frac{\omega_{t_1}}{\omega_i} = -\frac{z_i}{z_{t_1}}, \tag{11.148}$$

precum şi de valoarea raportului de transmisie de la roata $(\mathscr{R}_{t_{2n}})$ la roata $(\mathscr{R}_j)$ cu z_j dinţi, solidară cu elementul (S_j), adică

$$\frac{\omega_j}{\omega_{t_{2n}}} = -\frac{z_{t_{2n}}}{z_j}, \tag{11.149}$$

rezultă, prin înmulţirea, membru cu membru, a relaţiilor (11.148) şi (11.149) şi ţinînd seama şi de relaţia (11.147), următoarea valoare pentru raportul de transmisie total de la elementul (S_i) la elementul (S_j) :

$$\boxed{\frac{\omega_j}{\omega_i} = \frac{z_i}{z_j}\frac{z_{t_{2n}}}{z_{t_1}}\frac{\omega_{t_{2n}}}{\omega_{t_1}} = (-1)^n \frac{z_i\, z_{t_{2n}}}{z_j\, z_{t_1}}\rho_t = (-1)^n \frac{z_i}{z_j}\frac{z_{t_2} z_{t_4} \ldots z_{t_{2n}}}{z_{t_1} z_{t_3} \ldots z_{t_{2n-1}}} = i_{ij}.} \tag{11.150}$$

În legătură cu angrenajele şi cu trenurile de angrenaje mai trebuie făcută menţiunea că prezenţa unei astfel de legături într-un sistem mecanic poate fi considerată echivalentă, din punct de vedere cinematic, unei cuple cinematice care introduce o ecuaţie de legătură între parametrii de poziţie ai elementelor cuplate prin ea ; dacă caracteristicile inerţiale ale roţilor de cuplare sînt neglijabile în raport cu cele ale elementelor cuplate şi pot fi neglijate şi frecările, echivalenţa menţionată poate fi acceptată şi din punct de vedere dinamic.

b) *Mecanisme cu roţi de fricţiune.* În cazul acestor transmisii, de regulă reversibile, antrenarea roţii conduse de către roata conducătoare se datorează forţelor de frecare care se dezvoltă în zona generatoarei comune a suprafeţelor în contact, forţe ale căror mărimi sînt majorate, de cele mai multe ori, şi prin acoperirea suprafeţei de revoluţie a uneia din roţi cu materiale cu valori ridicate ale coeficientului de frecare (piele, cauciuc, fibră etc.).

Scanned with CamScanner

Considerînd și acum două cercuri de secțiune transversală a roților de transmisie, (Γ_i) și (Γ_j), în contact în punctul $C_{ij} \equiv C_{ji}$, (fig. 11.34), la rotația de unghiul φ_i a roții conducătoare (S_i), ea va avea tendința să alunece în punctul de contact C_{ij} pe cercul (Γ_j), în sensul versorului $\bar{i}_{al_i}$; forța de frecare la alunecare $\Delta\Phi_{ij}$, exercitată de reazemul în punctul C_{ij} pe roata condusă asupra roții conducătoare va avea deci sensul invers sensului versorului $\bar{i}_{al_i}$. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, asupra cercului (Γ_j) va acționa forța de frecare la alunecare $\Delta\Phi_{ji} = -\Delta\Phi_{ij}$, care va antrena cercul (Γ_j) — și deci și roata condusă — în rotație în jurul axei $(\Delta_j) \equiv Q_j z'_j$.

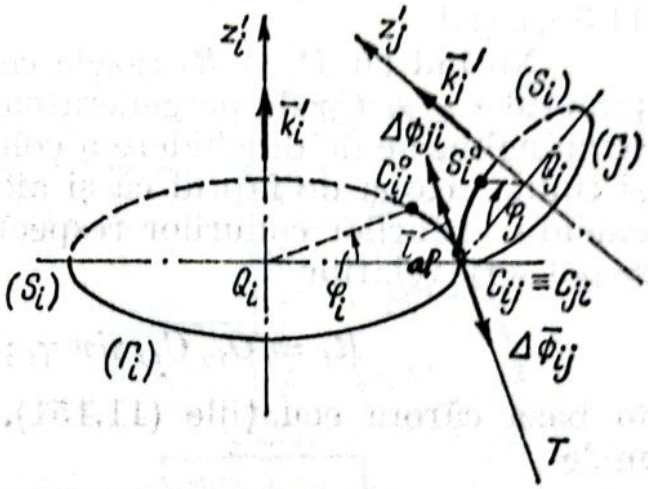


Fig. 11.34

Absența alunecării între cercurile în contact (Γ_i) și (Γ_j), de raze R_i și R_j, permite să se scrie și aici ecuația de legătură sub forma

$$\boxed{R_i \varphi_i \pm R_j \varphi_j = 0} \tag{11.151}$$

și ecuația de transmisie sub formele

$$\boxed{R_i \omega_{r_i} \pm R_j \omega_{r_j} = 0} \tag{11.152}$$

dacă axele de rotație sînt imobilizate într-un alt element al sistemului mecanic, respectiv

$$\boxed{\frac{\omega_j}{\omega_i} = \mp \frac{R_i}{R_j} = i_{ij}} \tag{11.153}$$

în cazul cînd axele de rotație sînt fixe în spațiu, precizarea semnului la cel de-al doilea termen urmînd a fi făcută ca și pînă acum, adică astfel încît să fie respectate egalitățile, ținîndu-se însă seama de

semnele unghiurilor de rotație proprie — respectiv ale vitezelor unghiulare — , raportate la versorii aleși pe axele de rotație proprie.

Pot fi întîlnite următoarele tipuri uzuale de transmisii prin roți de fricțiune :

— *Cuplaje prin roți de fricțiune conice.* Aceste cuplaje pot fi realizate fie cu contact exterior, (fig. 11.35, a), fie cu contact interior, (fig. 11.35, b), reprezentările schematice ale lor făcîndu-se ca în figurile 11.35, c și d.

Notînd cu R_i și R_j razele cercurilor transversale în contact în punctul $C_{ij} \equiv C_{ji}$ de pe generatoarea comună a roților și cu γ_i și γ_j semiunghiurile de deschidere a conurilor din care au fost tăiate roțile și ținînd seama de faptul că și aici evitarea alunecării implică coincidența vîrfurilor conurilor respective, $(O_i \equiv O_j \equiv O_{ij})$, (fig. 11.35), se pot scrie relațiile

$$R_i = \overline{O_{ij} C_{ij}} \sin \gamma_i \, ; \; R_j = \overline{O_{ij} C_{ij}} \sin \gamma_j,$$

în baza cărora ecuațiile (11.151), (11.152) și (11.153) vor lua formele

$$\boxed{\varphi_i \sin \gamma_i \mp \varphi_j \sin \gamma_j = 0} \tag{11.154}$$

respectiv

$$\boxed{\omega_{r_i} \sin \gamma_i \mp \omega_{r_j} \sin \gamma_j = 0} \tag{11.155}$$

și

$$\boxed{\frac{\omega_j}{\omega_i} = \mp \frac{\sin \gamma_i}{\sin \gamma_j} = i_{ij}} \tag{11.156}$$

pentru cazul cînd axele celor două roți sînt fixe în spațiu.

Dacă se convine ca sensurile unghiurilor de rotație proprie și ale vitezelor unghiulare de rotație proprie să fie raportate fie la perechea de versori $\bar{i}_{\Delta_i}$ și $\bar{i}_{\Delta_j}$, orientați de la punctul O_{ij} de concurență a axelor de rotație proprie spre exteriorul roților, fie la perechea de versori $\bar{i}'_{\Delta_i} = -\bar{i}_{\Delta_i}$ și $\bar{i}'_{\Delta_j} = -\bar{i}_{\Delta_j}$, orientați de la punctul O_{ij} spre roți, (fig. 11.35), atunci semnul superior în relațiile precedente corespunde contactului exterior, iar semnul inferior contactului interior.

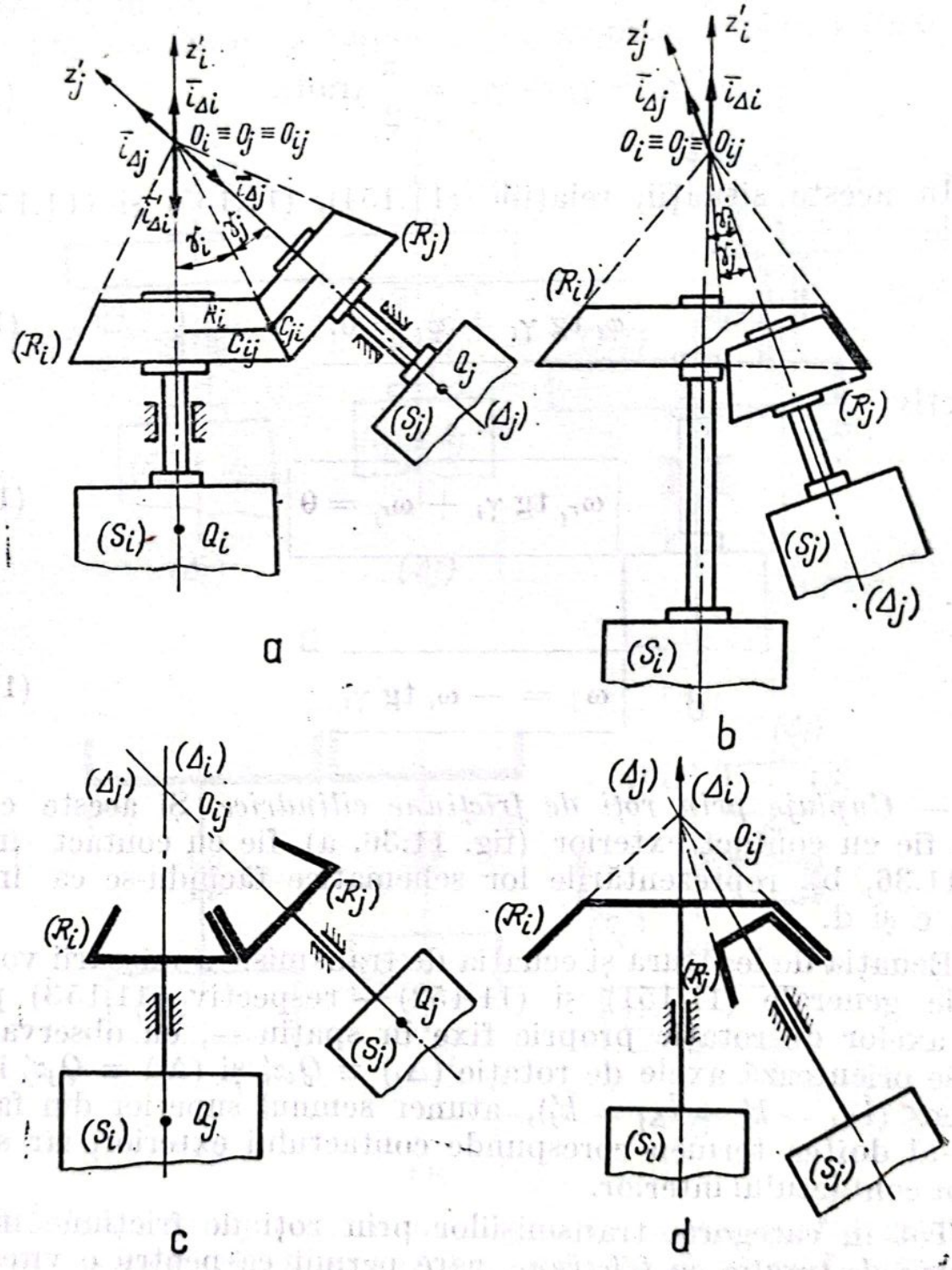


Fig. 11.35

Scanned with CamScanner

În multe cazuri roțile de frictiune sînt cu contact exterior și cu axele de rotație proprie ortogonale, adică este satisfăcută condiția

$$\gamma_i + \gamma_j = \gamma_{ij} = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}. \tag{11.157}$$

În aceste situații, relațiile (11.154), (11.155) și (11.156) iau formele

$$\boxed{\varphi_i \operatorname{tg} \gamma_i + \varphi_j = 0,} \tag{11.158}$$

respectiv

$$\boxed{\omega_{r_i} \operatorname{tg} \gamma_i + \omega_{r_j} = 0} \tag{11.159}$$

și

$$\boxed{\omega_j = - \omega_i \operatorname{tg} \gamma_i} \cdot \tag{11.160}$$

— *Cuplaje prin roți de frictiune cilindrice.* Și aceste cuplaje pot fi fie cu contact exterior (fig. 11.36, a), fie cu contact interior (fig. 11.36, b), reprezentările lor schematice făcîndu-se ca în fig. 11.36, c și d.

Ecuația de legătură și ecuația de transmisie a mișcării vor avea formele generale (11.151) și (11.152) — respectiv (11.153) pentru cazul axelor de rotație proprie fixe în spațiu —, cu observația că dacă se orientează axele de rotație $(\Delta_i) \equiv Q_i z_i'$ și $(\Delta_j) \equiv Q_j z_j'$ în același sens ($\bar{i}_{\Delta_i} = \bar{k}_i' = \bar{i}_{\Delta_j} = \bar{k}_j'$), atunci semnul superior din fața celui de-al doilea termen corespunde contactului exterior, iar semnul inferior contactului interior.

Tot în categoria transmisiilor prin roți de frictiune intră și *variatorii de turație cu frictiune*, care permit ca pentru o viteză unghiulară dată a roții conducătoare să se obțină, prin schimbarea poziției de contact al roților, diverse viteze unghiulare ale roții conduse, uneori și cu schimbare de sens a rotației proprii a acestei din urmă roți.

Scanned with CamScanner

Un asemenea variator de turație este reprezentat în fig. 11.37, a și schematic în fig. 11.37, b, el fiind alcătuit din roțile de fricțiune (R_i) și (R_j) cu axele concurente și ortogonale, cuplarea fiind astfel

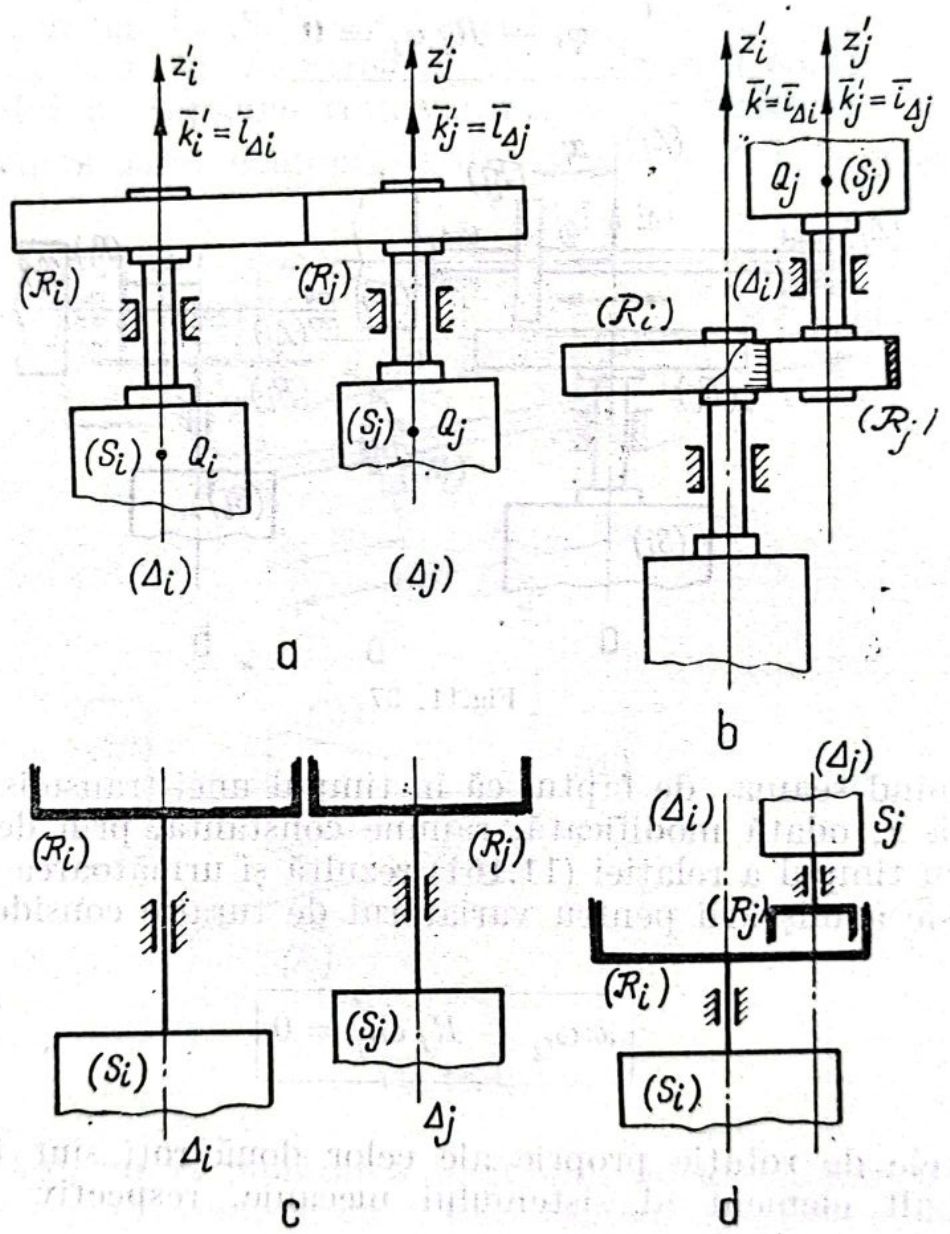


Fig.11.36

realizată încît, cu ajutorul unui dispozitiv nereprezentat în figură, distanța x a roții $(\mathcal{R}_j)$ la axa (Δ_i) a roții $(\mathcal{R}_i)$ să poată fi variată arbitrar între limitele permise de raza roții $(\mathcal{R}_i)$, atît de o parte, cît și de cealaltă parte a axei (Δ_i).

Alegînd versorii $\bar{i}_{\Delta_i}$ și $\bar{i}_{\Delta_j}$ ai celor două axe de rotație proprie ca în fig. 11.37 și convenind ca semnul variabilei x, ca și al unghiului

φ_j, să fie raportat la versorul $\bar{i}_{\Delta_j}$, iar al unghiului φ_i la versoru° $\bar{i}_{\Delta_i}$, ecuaţia de legătură corespunzătoare acestui cuplaj va avea forma

$$x\,\varphi_i - R_j\,\varphi_j = 0 \tag{11.161}$$

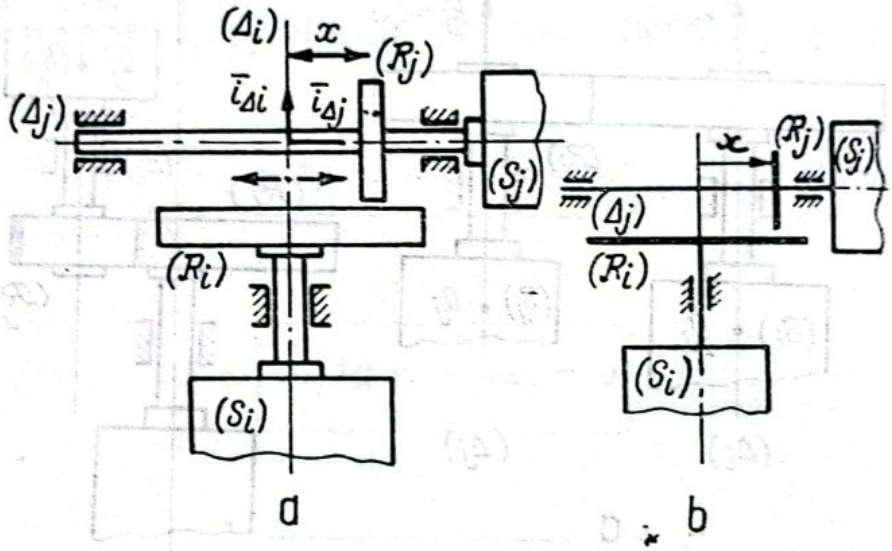


Fig.11. 37

Ţinînd seama de faptul că în timpul unei transmisii distanţa orientată x, odată modificată, rămîne constantă, prin derivarea în raport cu timpul a relaţiei (11.161) rezultă şi următoarea ecuaţie de transmisie a mişcării pentru variatorul de turaţie considerat :

$$x\,\omega_{r_i} - R_j\,\omega_{r_j} = 0 \tag{11.162}$$

dacă axele de rotaţie proprie ale celor două roţi sînt imobilizate într-un alt element al sistemului mecanic, respectiv

$$x\,\omega_i - R_j\,\omega_j = 0 \tag{11.163}$$

dacă axele de rotaţie sînt fixe în spaţiu.

Se observă, din ultimele relaţii, că după cum se consideră roata $(\mathscr{R}_i)$, sau roata $(\mathscr{R}_j)$, ca roată conducătoare, se obţine o varia-

ție liniară, sau iperbolică, cu distanța x, a vitezei unghiulare a elementului condus.

Un alt tip de variator de turație cu fricțiune este cel cu *tambur*, reprezentat în fig. 11.38, a și schematic în fig. 11.38, b.

Notînd cu r_j și R_j razele extreme ale roții conice $(\mathcal{R}_j)$, cu R'_j raza cercului de secțiune transversală corespunzătoare contactului în B pe generatoarea comună, la distanța $x = \overline{AB}$ de extremitatea

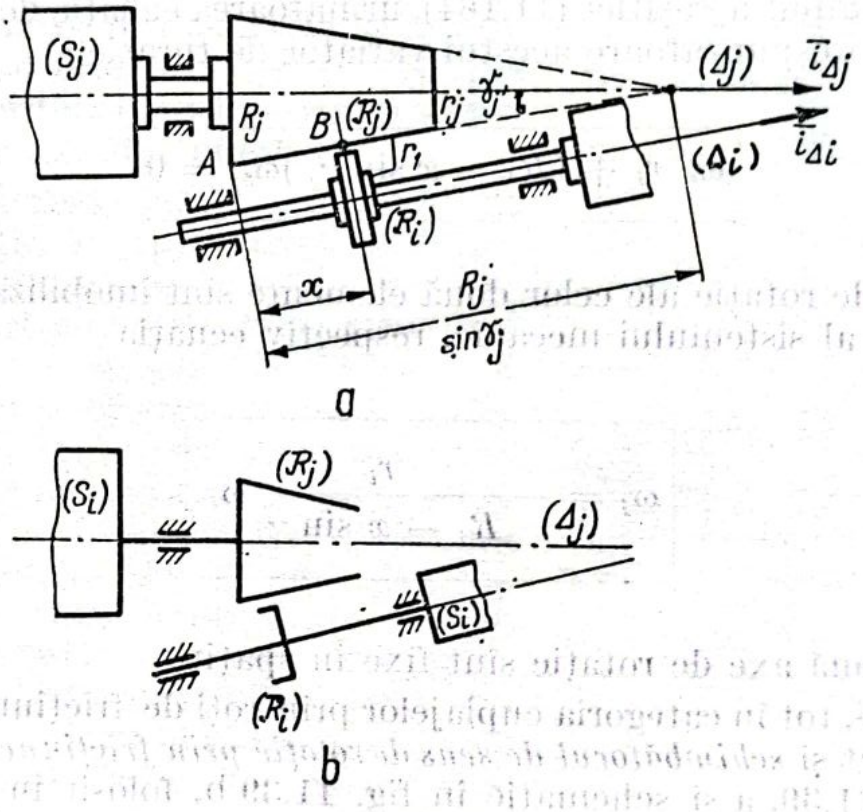


Fig. 11.38

A (fig. 11.38), cu γ_j jumătatea unghiului de deschidere a conului din care face parte roata și cu r_i raza tamburului, este evidentă relația

$$R'_j = R_j - x \sin \gamma_j$$

și deci următoarea ecuație de legătură corespunzătoare acestui cuplaj :

$$\boxed{r_i \varphi_i + (R_j - x \sin \gamma_j) \varphi_j = 0}, \qquad (11.164)$$

semnele unghiurilor de rotație fiind raportate la versorii $\vec{i}_{\Delta_i}$ și $\vec{i}_{\Delta_j}$, (fig. 11.38); distanța x va varia între limitele

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{R_j - r_j}{\sin \gamma_j}. \tag{11.165}$$

Avînd în vedere faptul că în timpul unei transmisii distanța x, odată modificată, rămîne constantă, va rezulta, prin derivarea în raport cu timpul a relației (11.164), următoarea ecuație de transmisie a mișcării corespunzătoare acestui variator de turație :

$$\boxed{\omega_{r_i} r_i + (R_j - x \sin \gamma_j)\omega_{r_j} = 0} \tag{11.166}$$

dacă axele de rotație ale celor două elemente sînt imobilizate într-un alt element al sistemului mecanic, respectiv ecuația

$$\boxed{\omega_j = -\frac{r_i}{R_j - x \sin \gamma_j}\omega_i} \tag{11.167}$$

dacă cele două axe de rotație sînt fixe în spațiu.

În fine, tot în categoria cuplajelor prin roți de fricțiune mai trebuie înglobat și *schimbătorul de sens de rotație prin fricțiune*, reprezentat în fig. 11.39, a și schematic în fig. 11.39 b, folosit în deosebi la presele de fricțiune.

În cazul acestei transmisii, elementul conducător este, de regulă, una din perechile de roți de fricțiune, $(\mathscr{R}'_i)$ sau $(\mathscr{R}''_i)$, fixate solidar pe aceeași axă (Δ_i) și care sînt deplasate de o parte și de alta a axei (Δ_j) astfel încît cînd una, cînd cealaltă, să se afle în contact cu roata condusă $(\mathscr{R}_j)$.

Este ușor de înțeles că în această situație modulul raportului de transmisie rămîne neschimbat, modificîndu-i-se numai, în funcție de poziția punctului de contact, semnul acestui raport.

a) *Mecanisme cu roți cuplate prin elemente flexibile.* Cuplajele prin elemente flexibile, utilizate pentru transmiterea de rotații proprii

între elemente cu axele de rotaţie situate la distanţe relativ mari între ele, se realizează prin înfăşurarea şi desfăşurarea unui fir de legătură la periferia roţilor de transmisie ; pentru evitarea alunecărilor, pe suprafeţele periferice ale roţilor se execută fie şanţuri de diferite profile, mărindu-se astfel suprafaţa de contact a firului cu roţile, fie dinţi de forme convenabile alese, în cazurile cînd firele sînt reprezentate prin lanţuri cu zale.

Deşi transmisiile prin fire pot fi realizate şi între roţi cu axele de rotaţie proprie avînd orientări oarecare în spaţiu, în majoritatea covărşitoare a situaţiilor, aceste axe sînt paralele.

Considerînd numai această din urmă situaţie, se va observa că transmisia de rotaţii se face cu aceleaşi sensuri, sau în sensuri contrare, după cum firul are *înfăşurare directă* (fig. 11.40, a şi 11.41, a), sau *înfăşurare încrucişată* (fig. 11.40, b şi 11.41, b) ; de asemenea, se va mai remarca că firul de transmisie poate fi deschis — ca în cazul transmisiei prin rolele de ghidare ($\mathcal{R}l_i$) şi ($\mathcal{R}l_j$) din fig. 11.40 —, sau poate fi închis pe el însuşi (fir fără sfîrşit) — ca în cazul transmisiei prin şaibele (Sb_i) şi (Sb_j) din fig. 11.41 —, în ultimul caz, dintre cele două ramuri ale firului de legătură considerînduse în acţiune numai ramura care se înfăşoară pe şaiba conducătoare.

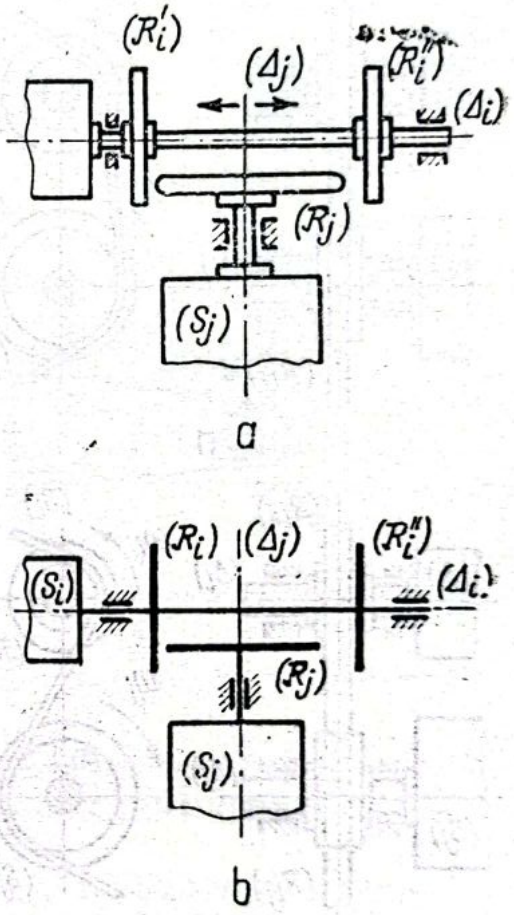


Fig. 11.39

Absenţa alunecării firului pe roata de transmisie va avea ca urmare egalitatea porţiunii de fir înfăşurată pe roata conducătoare cu a porţiunii de fir desfăşurate de pe roata condusă. Convenind ca sensurile de rotaţie ale celor două roţi să fie raportate la acelaşi versor, ecuaţia de legătură la transmisia prin elemente flexibile va avea forma

$$\boxed{R_i \varphi_i \mp R_j \varphi_j = 0} \qquad (11.168)$$

ei corespunzîndu-i ecuația de transmisie a mișcării

$$R_i\,\omega_{r_i} \mp R_j\,\omega_{r_j} = 0 \tag{11.169}$$

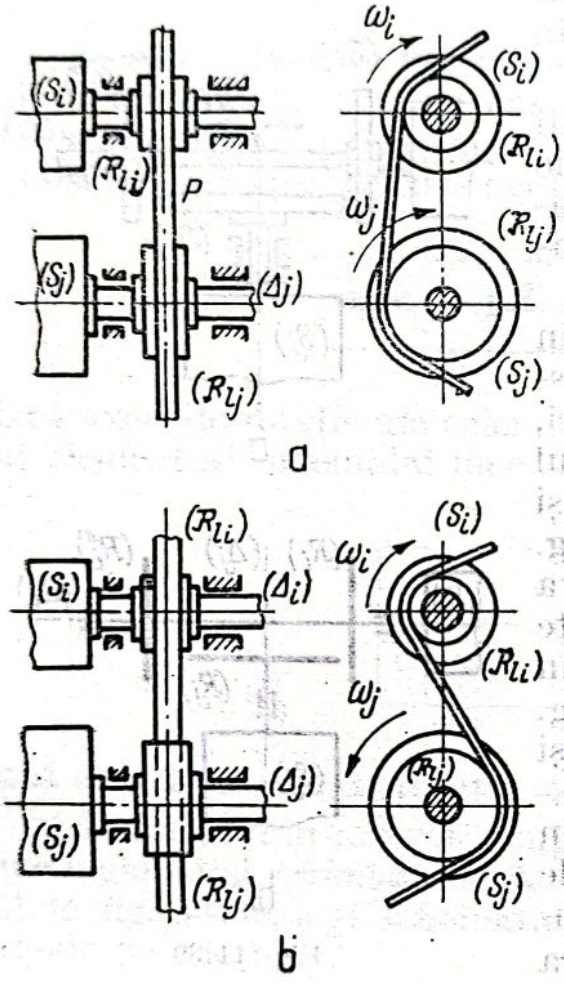


Fig. 11.40

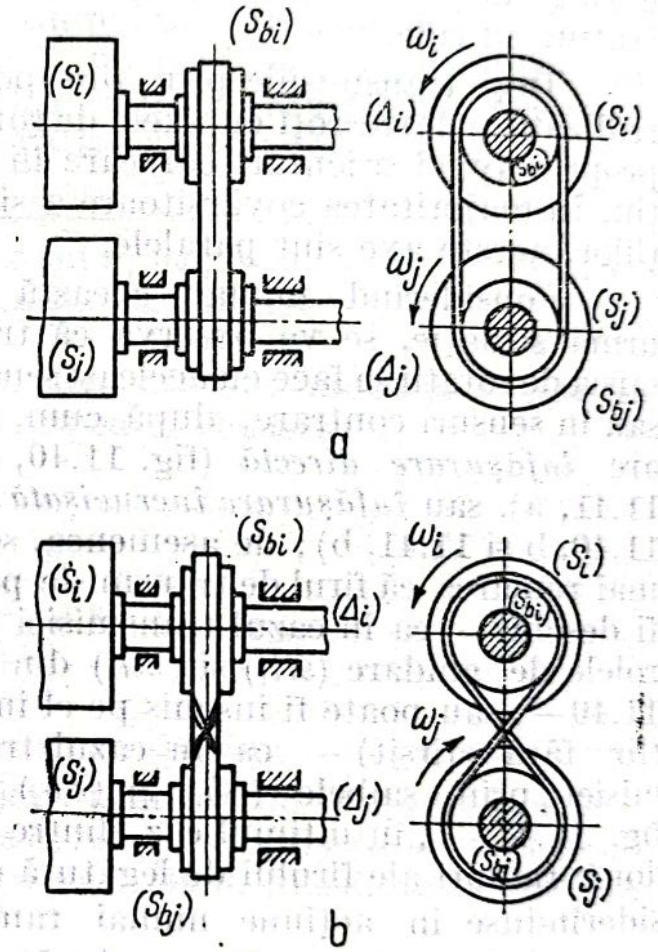


Fig. 11.41

dacă axele de rotație proprie sînt imobilizate într-un alt element al sistemului mecanic, aflat în mișcare, respectiv ecuația

$$\frac{\omega_j}{\omega_i} = \pm\frac{R_i}{R_j} = i_{ij} \tag{11.170}$$

dacă axele de rotați sînt fixe în spațui ; în relațiile precedente, R_i și R_j sînt razele roților de transmisie, iar semnul superior din fața celui

de-al doilea teremen corespunde înfășurării directe, în timp ce semnul inferior corespunde înfășurării încrucișate.

În legătură cu transmisiile prin fire „fără sfîrșit", mai trebuie subliniat faptul că pentru menținerea în stare tensionată a firului de legătură, necesară evitării alunecărilor, se utilizează o *rolă de tensionare*, plasată la una din cele două ramuri ale firului, care întinde firul

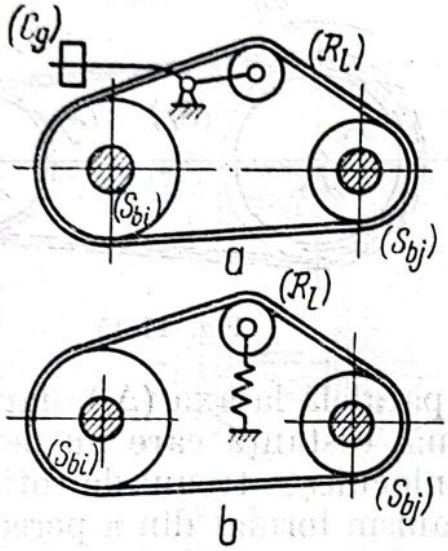


Fig. 11.42

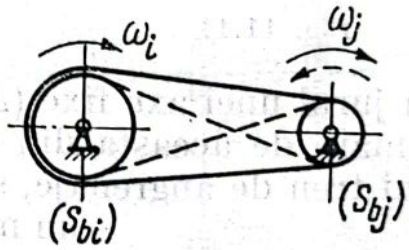


Fig. 11.43

fie prin acțiunea unei contragreutăți (Cg), (fig. 11.42, a), fie sub acțiunea unui arc elicoidal (fig. 11.42, b).

În funcție de natura elementului flexibil de legătură, aceste transmisii pot fi împărțite în următoarele tipuri mai importante, reprezentate schematic mai jos:

— *cuplaje prin curele de transmisie*, realizate din piele, sau cauciuc pînzat (fig. 11.43), trecute peste șaibele de transmisie, sau peste role de ghidare;

— *cuplaje prin cablu*, folosite în deosebi la mașinile de ridicat, o extremitate a cablului fiind înfășurată pe *tobă* (tambur), iar cealaltă extremitate trecînd cel mai adesea peste un scripete (fig. 11.44);

— *cuplaje prin lanțuri cu zale* de diverse tipuri, cel mai frecvent întîlnit fiind lanțul Galle (fig. 11.45); transmisiile prin lanțuri cu zale sînt utilizate în deosebi în cazurile cînd se urmărește obținerea unui raport de transmisie riguros constant, precum și în cazurile cînd trebuiesc transmise, pe lîngă rotații, și eforturi mari;

— *cuplaje prin benzi*, folosite la transportoarele de diverse tipuri întîlnite în deosebi în tehnica construcțiilor (fig. 11.46).

În cazurile cînd se urmărește realizarea unei reduceri sau multiplicări de turație, transmisă de la un element (S_i) în rotație în jurul unei axe fixe (Δ_i), la un alt element (S_j) al sistemului mecanic, în

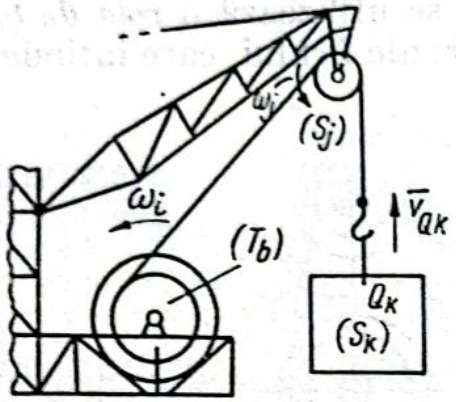


Fig. 11.44

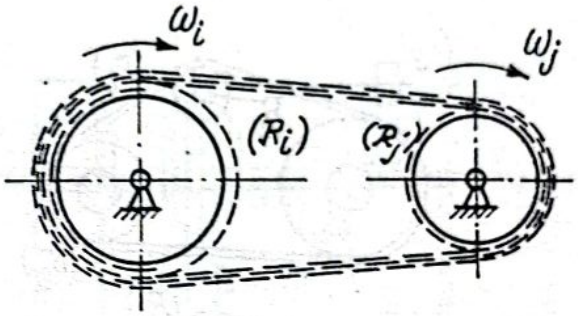


Fig. 11.45

rotație în jurul unei axe fixe (Δ_j) paralelă la axa (Δ_i), dar aflată la o distanță mare de aceasta din urmă, distanță care nu permite utilizarea unui tren de angrenaje, se înlocuiește trenul de roți dințate cu un mecanism format din n perechi de șaibe de transmisie cu axele de rotație ale fiecărei perechi de șaibe solidare între ele paralele la axele (Δ_i) și (Δ_j), (fig. 11.47, a); reprezentarea schematică a mecanismului se face ca în fig. 11.47, b.

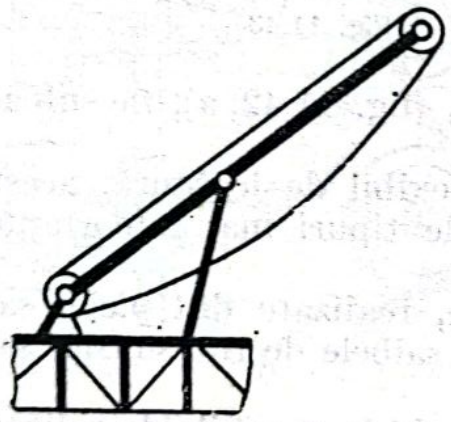


Fig. 11.46

Un raționament absolut analog celui folosit în cazul stabilirii raportului de transmisie la trenul de angrenaje conduce la o ecuație de transmisie a mișcării corespunzătoare acestui nou mecanism analogă formulei (11.147), cu singura deosebire că în locul numerelor de dinți vor figura acum razele șaibelor; se va putea scrie deci relația

$$\boxed{\frac{\omega_{M_{2n}}}{\omega_{M_1}} = (-1)^{l^*} \frac{R_2 R_4 \dots R_{2n-2}}{R_3 R_5 \dots R_{2n-1}} = (-1)^{l^*} \rho_M = i_{M_{1,2n}}} \qquad (11.171)$$

ρ_M fiind și aici *rația mecanismului*, iar $l^* < n$, reprezentînd numărul de înfășurări încrucișate utilizate în mecanism, singurele care, așa cum s-a arătat, pot schimba sensurile de rotație.

De asemenea, dacă se ține și acum seama de cuplajele cu elementele (S_i) și (S_j) — solidare cu șaibele (Sb_i) și (Sb_j), de raze R_i și, respectiv, R_j — ale mecanismului considerat, atunci se obține ur-

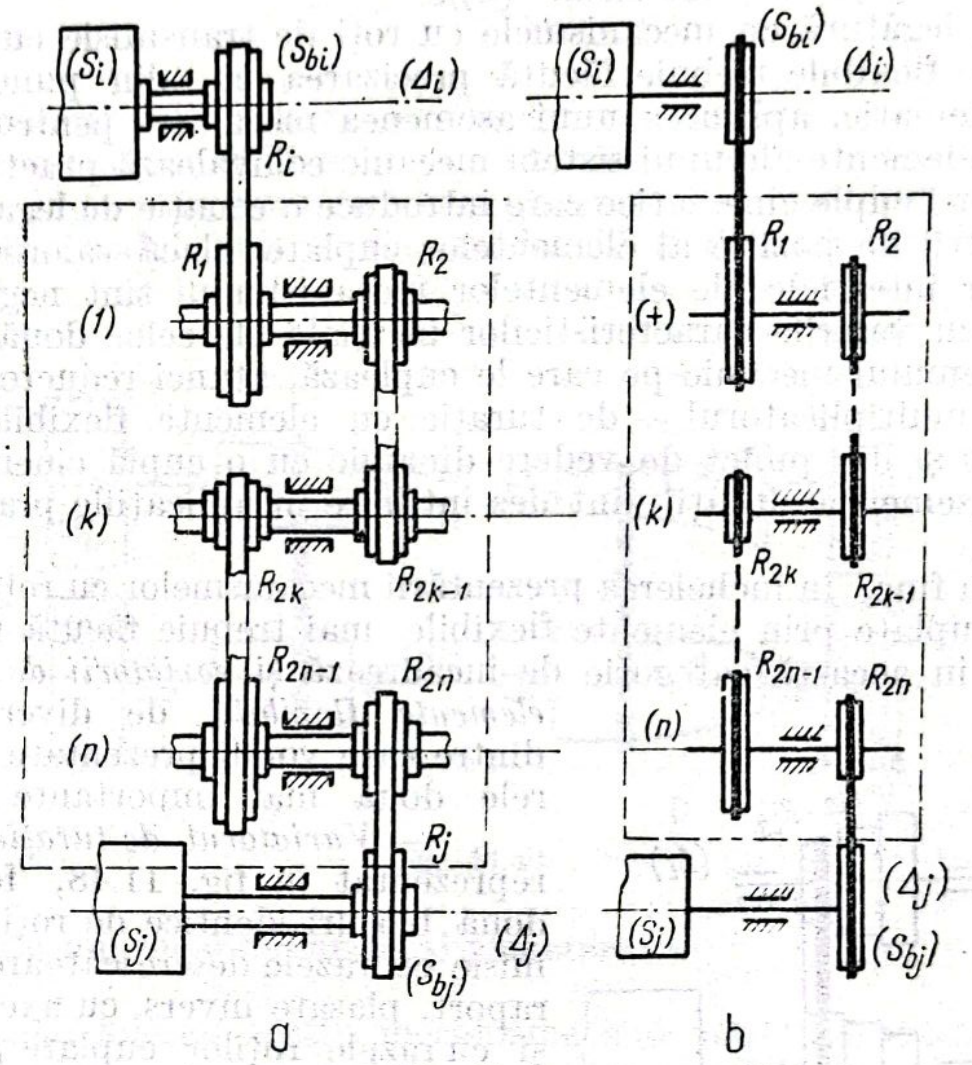


Fig. 11.47

mătoarea formulă, analogă formulei (11.150), pentru transmisia de rotații de la elementul (S_i) la elementul (S_j) al sistemului mecanic, transmisie realizată prin intermediul mecanismului reductor-multiplicator de turație cu elemente flexibile:

$$\frac{\omega_j}{\omega_i} = (-1)^{l'} \frac{R_i}{R_j} \cdot \frac{R_{n2}}{R_1} \frac{\omega_{M_{2n}}}{\omega_{M_1}} = (-1)^{l''+l'} \frac{R_i}{R_j} \frac{R_{2n}}{R_1} \rho_M = (-1)^l \frac{R_i}{R_j} \frac{R_2 R_4 \ldots R_{2n}}{R_1 R_3 \ldots R_{2n-1}} = i_{ij} \tag{11.172}$$

$l' < 2$ fiind numărul de înfăşurări încrucişate folosite între mecanism şi cele două elemente cuplate prin el, iar $l = l^* + l'$ numărul total de înfăşurări încrucişate utilizate în întreaga transmisie de la elementul (S_i) la elementul (S_j).

În legătură cu mecanismele cu roţi de transmisie cuplate prin elemente flexibile trebuie făcută precizarea că, din punct de vedere cinematic, aplicarea unui asemenea mecanism pentru cuplarea a două elemente ale unui sistem mecanic echivalează practic cu aplicarea unei cuple cinematice care introduce o ecuaţie de legătură între parametrii de poziţie ai elementelor cuplate; dacă valorile caracteristicilor interţiale ale elementelor mecanismului sînt neglijabile în raport cu valorile caracteristicilor inerţiale ale celor două elemente ale sistemului mecanic pe care le cuplează, atunci reductorul — respectiv multiplicatorul — de turaţie cu elemente flexibile poate fi asimulat şi din punct de vedere dinamic cu o cuplă cinematică.

Asemenea situaţii sînt des întîlnite în aplicaţiile practice concrete.

În fine, în încheierea prezentării mecanismelor cu roţi de transmisie cuplate prin elemente flexibile, mai trebuie făcută menţiunea că tot în această categorie de încadrează şi *variatorii de turaţie cu elemente flexibile*, de diverse tipuri, dintre care vor fi prezentate următoarele două mai importante:

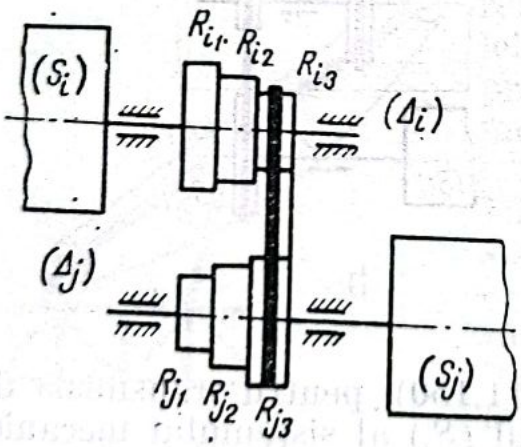


Fig. 11.48

— *Variatorul de turaţie în trepte*, reprezentat în fig. 11.48, format din două blocuri identice de roţi de transmisie cu razele descrescătoare în acelaşi raport, plasate invers, cu axele paralele şi cu razele roţilor cuplate prin curea satisfăcînd aceeaşi relaţie

$$R_{i_k} + R_{j_k} = C = \text{const.} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{11.173}$$

— *Variatorul de turaţie continuu*, alcătuit din doi conoizi de revoluţie cu axele paralele. În unele cazuri, aceştia sînt două trunchiuri de con identice şi dispuse invers pe axele de rotaţie proprie, (fig. 11.49, a), razele secţiunilor transversale cuplate prin curea satisfăcînd şi acum condiţia (11.173); în alte situaţii, curba generatoare a conoidului conducător este o porţiune de hiperbolă echilateră, deter

minată prin următoarea ecuație raportată la asimptotele O_iR_i și O_is (fig. 11.49, b) :

$$R_is = C_i = \text{const.}, \tag{11.174}$$

— R_i fiind raza conoidului în dreptul punctului curent C_i, iar s distanța acestui punct la o origine O_i aleasă pe axa de revoluție a conoidului (S_i) —, în timp ce curba generatoare a conoidului condus se determină astfel încît să fie satisfăcută și de astă dată condiția (11.173).

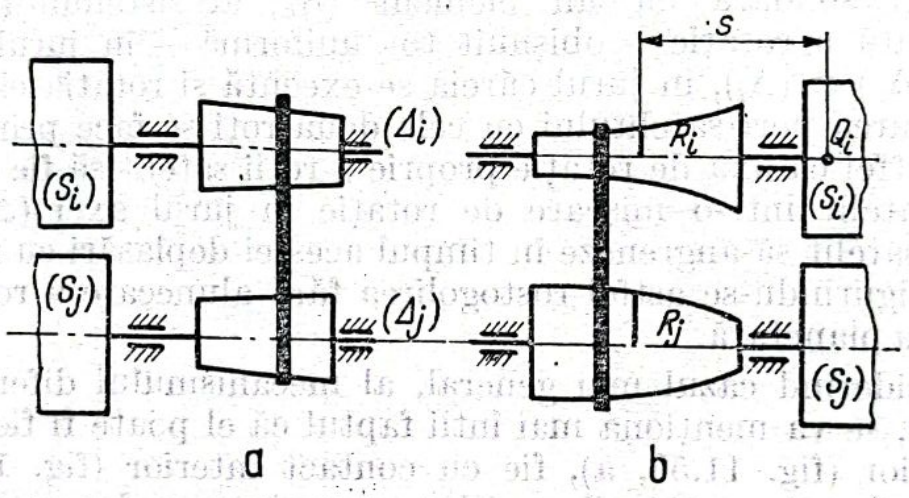


Fig. 11.49

2°. Mecanisme diferențiale și planetare

Cel mai adesea aceste mecanisme sînt părți constitutive ale unor mecanisme mai complexe, purtînd numele de *diferențiale*, care vor fi examinate ulterior ; în cazurile cînd sînt utilizate totuși ca mecanisme simple într-un sistem mecanic, rolul lor este de a compune două mișcări independente de rotație în jurul aceleiași axe fixe, provenind de la două elemente (S_i) și (S_k) ale sistemului mecanic, transformîndu-le într-o mișcare rezultantă transmisă unui al treilea element (S_j) al sistemului mecanic, această mișcare rezultantă putînd fi o mișcare în jurul unui punct fix, sau o mișcare plan-paralelă cu translația circulară, după cum este vorba de un *mecanism diferențial cu roți conice*, sau de un *mecanism diferențial cu roți cilindrice*.

În mod obișnuit aceste mecanisme se realizează cu roți dințate.

Orice mecanism diferențial, fie el cu roți conice sau cu roți cilindrice, are următoarele trei elemente mobile:

— *o roată conducătoare* ($\mathscr{R}_i$), purtînd încă și numele de *roată planetară*, solidară cu elementul (S_i) care transmute una din mișcările componente ale mișcării elementului condus, această mișcare componentă fiind o rotație — cel mai adesea uniformă — în jurul unei axe (Δ_i) imobilizată în spațiu (în batiul mașinii);

— *o roată condusă*, (R_i), numită încă și *roată satelit*, solidară cu elementul (S_j) la care se transmite mișcarea rezultantă;

— *o piesă intermediară de cuplare*, (P_s), purtînd denumirea de *port-satelit*, solidară cu un element (S_k) al sistemului mecanic, care execută o rotație — obișnuit tot uniformă — în jurul aceleiași axe fixe (Δ_k) $\equiv$ (Δ_i), în jurul căreia se execută și rotația elementului (S_i); cuplarea port-satelitului cu cele două roți se face prin cuple de rotație, astfel ca axa de rotație proprie a roții satelit să fie antrenată de port-satelit într-o mișcare de rotație în jurul axei (Δ_i) $\equiv$ (Δ_k), iar roata satelit să angreneze în timpul acestei deplasări cu roata planetară, asigurîndu-se astfel rostogolirea fără alunecare a roții satelit peste roata planetară.

Considerînd cazul mai general, al mecanismului diferențial cu roți conice, se va menționa mai întîi faptul că el poate fi fie cu contact exterior (fig. 11.50, a), fie cu contact interior (fig. 11.50, c); reprezentările schematice ale acestor mecanisme se fac ca în figurile 11.50, b și 11.50, d.

Este ușor de înțeles că rostogolirea fără alunecare a roții satelit ($\mathscr{R}_j$) peste roata planetară ($\mathscr{R}_i$) va implica și aici coincidența punctului O_{ij} de intersecție a axelor celor două roți cu vîrfurile conurilor din care au fost tăiate roțile.

Se vor considera cunoscute următoarele date constructive ale mecanismului:

— numerele de dinți ale roților angrenate, z_i al roții planetare și z_j al roții satelit;

— unghiurile γ_i și γ_j formate de generatoarea comună $OB'B$, corespunzătoare roților primitive, cu axele de rotație proprie ale celor două roți, suma lor — respectiv diferența lor în cazul roților cu contact interior — reprezentînd unghiul constant format de axele (Δ_i) și (Δ_j):

$$\gamma = \gamma_i \pm \gamma_j. \tag{11.175}$$

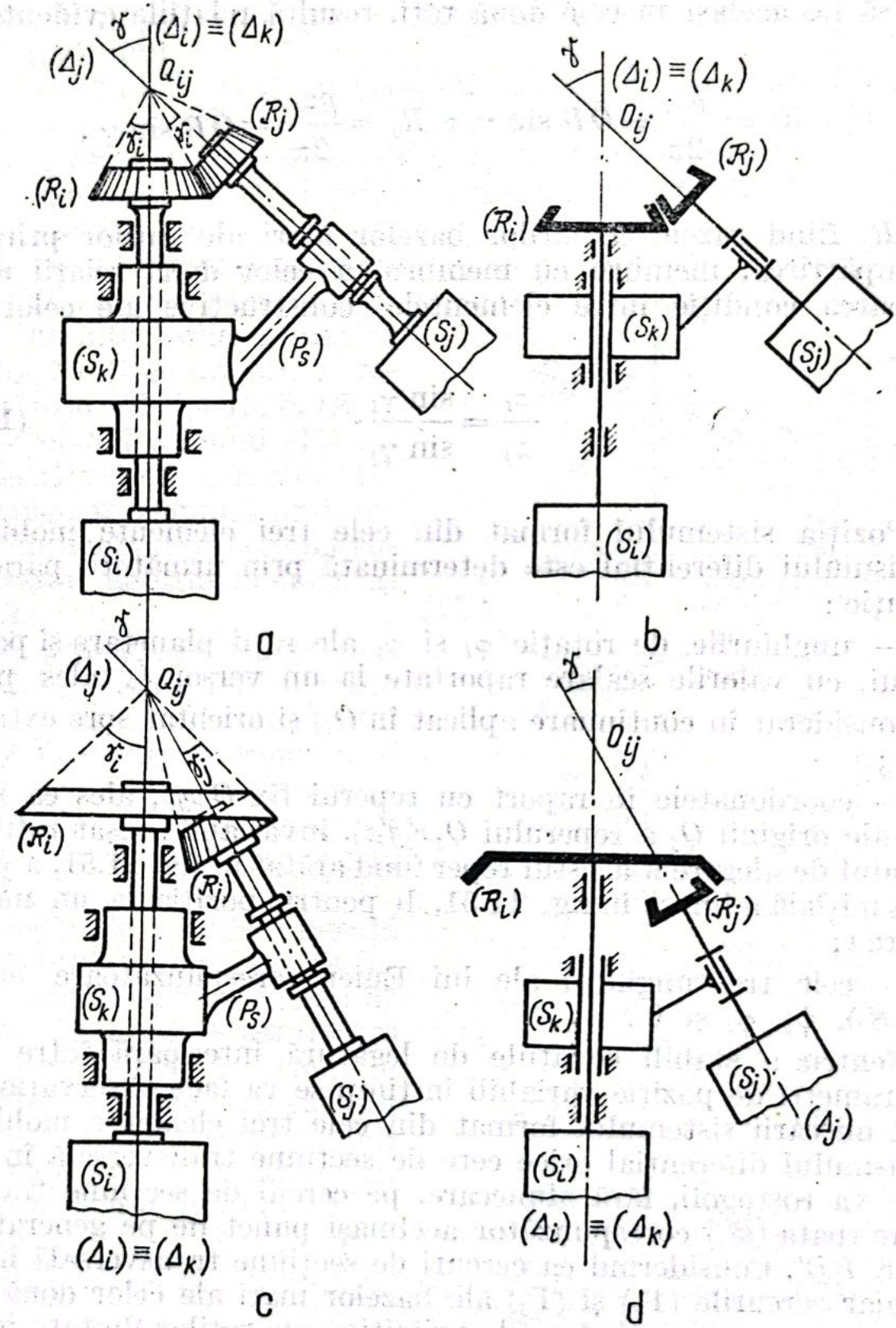


Fig. 11.50

Scanned with CamScanner

Ținînd seama de faptul că pentru realizarea angrenării pasul va trebui să fie același în cele două roți, rezultă relațiile evidente :

$$R_i = \frac{pz_i}{2\pi} = \overline{OB} \sin \gamma_i \; ; \; R_j = \frac{pz_j}{2\pi} = \overline{OB} \sin \gamma_j,$$

R_i și R_j fiind razele cercurilor bazelor mari ale roților primitive; prin împărțirea, membru cu membru, a celor două relații rezultă următoarea condiție între elementele constructive ale celor două roți :

$$\frac{z_i}{z_j} = \frac{\sin \gamma_i}{\sin \gamma_j}. \tag{11.176}$$

Poziția sistemului format din cele trei elemente mobile ale mecanismului diferențial este determinată prin următorii parametri de poziție :

— unghiurile de rotație φ_i și φ_k ale roții planetare și port-satelitului, cu valorile scalare raportate la un versor $\bar{i}_{\Delta_i}$ ales pe axa (Δ_i), considerat în continuare aplicat în O_{ij} și orientat spre exteriorul roților ;

— coordonatele în raport cu reperul fix $Oxyz$, ales ca în fig. 11.51, ale originii Q_j a reperului $Q_j x'_j y'_j z'_j$, invariabil atașat roții satelit, modul de alegere a acestui reper fiind arătat în fig. 11.51, a pentru poziția inițială a lui și în fig. 11.51, b pentru poziția la un moment oarecare t ;

— cele trei unghiuri ale lui Euler corespunzătoare elementului (S_j), ψ_j, φ_j și θ_j.

Pentru a stabili ecuațiile de legătură interioară între acești opt parametri de poziție variabili în timp se va face observația că în timpul mișcării sistemului format din cele trei elemente mobile ale mecanismului diferențial orice cerc de secțiune transversală în roata $(\mathscr{R}_j)$ se va rostogoli, fără alunecare, pe cercul de secțiune transversală din roata $(\mathscr{R}_i)$ corespunzător aceluiași punct de pe generatoarea comună BB'. Considerînd ca cercuri de secțiune transversală în contact chiar cercurile (Γ_i) și (Γ_j) ale bazelor mari ale celor două trunchiuri de con reprezentînd roțile primitive ale roților dințate în contact, rezultă că rostogolirea cercului (Γ_j) peste cercul (Γ_i) — ultimul

Scanned with CamScanner

în rotație, la rîndul lui, în jurul centrului O_i — se va face în următoarele condițiuni :

— centrul $O_j \equiv Q_j$ al cercului (Γ_j) — și deci, odată cu el, și punctul de contact $C_{ij} = C_{ji}$ dintre cercuri — se rotește în jurul axei (Δ_i) cu aceeași viteză unghiulară ca și port-satelitul ;

— normala în O_j al planul cercului (Γ_j) formează în permanență unghiul constant γ cu normala în O_i la planul cercului (Γ_i), trecînd mereu prin punctul fix O_{ij} de intersecție a axelor celor două roți ca urmare a rezemării roții $(\mathcal{R}_j)$ pe roata $(\mathcal{R}_i)$;

— planul cercului (Γ_j) intersectează planul cercului (Γ_i) după tangenta comună ambelor cercuri în punctul de contact corespunzător fiecărui moment al mișcării ;

— prin alegerea reperului $Q_j x'_j y'_j z'_j$, legat invariabil de roata $(\mathcal{R}_j)$, ca în fig. 11.51, linia nodurilor, $Q_j N_j$, corespunzătoare roții satelit, va fi în permanență paralelă la tangenta comună $C_{ij}T$ la cercurile (Γ_i) și (Γ_j) în contact.

Cupla de rotație aplicată port-satelitului și roții satelit introduce următoarele 5 ecuații de legătură între cei 8 parametrii de poziție variabili în timp ai sistemului mecanic reprezentat prin cele trei elemente mobile ale mecanismului, ecuații ușor de verificat din fig. 11.52 :

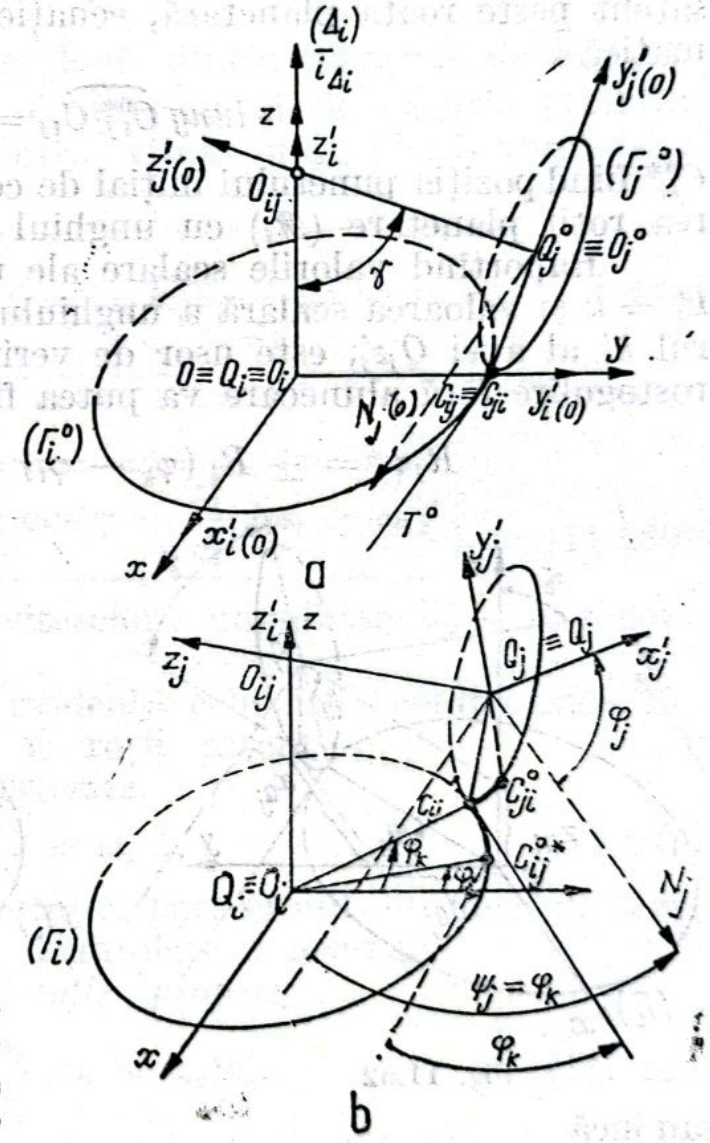


Fig. 11.51

$$\begin{cases} x_{Q_j} = -(R_i + R_j \cos\gamma)\sin\varphi_k = -\dfrac{p}{2\pi}(z_i + z_j \cos\gamma)\sin\varphi_k ; \\ y_{Q_j} = (R_i + R_j \cos\gamma)\cos\varphi_k = \dfrac{p}{2\pi}(z_i + z_j \cos\gamma)\cos\varphi_k ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{Q_j} = R_j \sin\gamma = \dfrac{p}{2\pi} z_j \sin\gamma; \\ \psi_i = \varphi_k; \\ \theta_j = \gamma. \end{cases} \tag{11.177}$$

La acest sistem de ecuaţii de legătură se va adăuga o a 6-a ecuaţie, corespunzătoare rostogolirii relative fără alunecare a roţii satelit peste roata planetară, ecuaţie care va traduce condiţia cinematică

$$lung\ \widehat{O_{ij}^{0*}\, O_{ij}} = \widehat{O_{ji}^{0}\, O_{ji}},$$

O_{ij}^{0*} fiind poziţia punctului iniţial de contact pe cercul (Γ_i), după rotirea roţii planetare $(\mathscr{R}_i)$ cu unghiul φ_i.

Raportînd valorile scalare ale unghiurilor φ_i şi φ_k la versorul $\bar{k}_i' = \bar{k}$ şi valoarea scalară a unghiului de rotaţie proprie φ_j la versorul $\bar{k}_j'$ al axei $Q_j z_j'$, este uşor de verificat că traducerea condiţiei de rostogolire fără alunecare va putea fi făcută acum prin relaţia

$$R_j \varphi_j = \pm R_i (\varphi_k - \varphi_i) = \mp R_i (\varphi_i - \varphi_k), \tag{11.178}$$

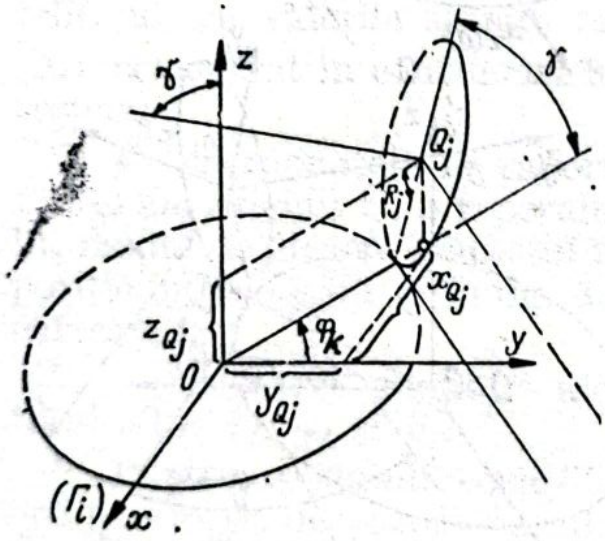


Fig. 11.52

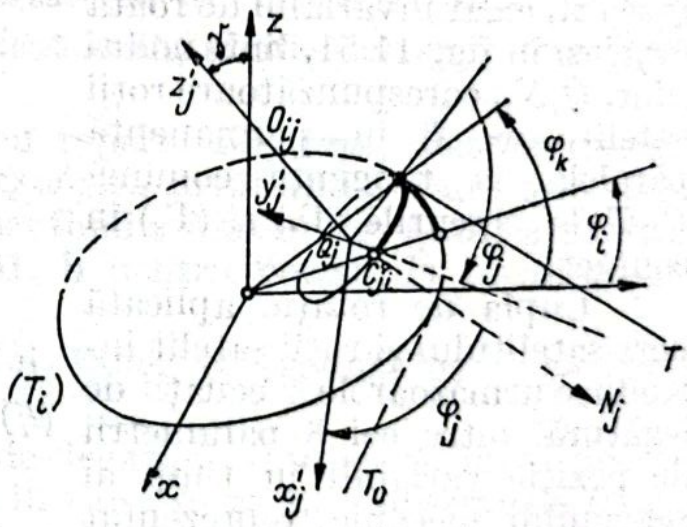


Fig. 11.53

sau încă

$$\varphi_j = \mp \frac{R_i}{R_j} (\varphi_i - \varphi_k) = \mp \frac{z_i}{z_j} (\varphi_i - \varphi_k), \tag{11.179}$$

semnul superior din membrul drept al ultimelor relaţii corespunzînd contactului exterior dintre cele două roţi, iar semnul inferior contactului interior (fig. 11.53).

Se poate trage deci concluzia că din cei 8 parametri de poziție variabili în timp ai mecanismului, numai 2 pot lua valori arbitrare — aceștia fiind unghiurile de rotație ale roții planetare și port-satelitului, φ_i și φ_k —, adică mecanismul diferențial are 2 grade de mobilitate, ($m_M = 2$); ultima concluzie rezultă, de altfel, și din aplicarea formulei (11.18), cu $n_M = 4$ (s-a adăugat și elementul fix, de care sînt legate, prin cuple de rotație, roata planetară și port-satelitul) și cu $n_{e_{M_{s,5}}} = 2$, $n_{i_{M_{s,5}}} = 1$ și $n_{i_{M_{s,1}}} = 1$.

Ținînd seama de ultimele două dintre ecuațiile de legătură (11.177), ($\dot{\psi}_j = \dot{\varphi}_k = \omega_k$; $\dot{\theta}_j = 0$), precum și de ecuația (11.178), rezultă următoarea expresie pentru viteza unghiulară absolută a roții satelit :

$$\boxed{\bar{\omega}_j = \dot{\varphi}_k \bar{k} \mp \frac{z_i}{z_j}(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_k)\bar{k}'_j = \omega_k \bar{k} \mp \frac{z_i}{z_j}(\omega_i - \omega_k)\bar{k}'_j} \qquad (11.179)$$

cu modulul dat de relația

$$\boxed{|\bar{\omega}| = \sqrt{\omega_k^2 \mp 2\frac{z_i}{z_j}\omega_k(\omega_i - \omega_k)\cos\gamma + \frac{z_i^2}{z_j^2}(\omega_i - \omega_k)^2}} \qquad (11.180)$$

ω_k și ω_i fiind valorile scalare ale vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_k$ și $\bar{\omega}_i$ raportate la versorul $\bar{k}$.

Relația (11.179) scoate în evidență cele două componente ale vitezei unghiulare instantanee a roții satelit :

— *viteza unghiulară de precesie*

$$\bar{\omega}_{jp} = \omega_k \bar{k}, \qquad (11.181)$$

al cărei sens depinde de sensul rotației port-satelitului, deci de semnul valorii scalare ω_k a vitezei unghiulare a acestuia ;

— *viteza unghiulară de rotație proprie*

$$\bar{\omega}_{jr} = \mp \frac{z_i}{z_j}(\omega_i - \omega_k)\bar{k}'_j, \qquad (11.182)$$

al cărei sens depinde atît de sensurile de rotație ale roții planetare și port-satelitului — deci de valorile scalare ale vitezelor lor unghiulare —, cît și de mărimile lor.

Se va mai observa că în relația (11.179) valorile scalare ale celor două componente, $\bar{\omega}_{j_p}$ și $\bar{\omega}_{j_r}$, ale vitezei unghiulare instantanee a roții satelit au fost raportate la perechea de versori $k'_i = \bar{k}$ și $\bar{k}'_j$ ai

axelor (Δ_i) și (Δ_j), versori care, consideraţi aplicaţi în punctul O_{ij} de intersecţie a celor două axe, sînt orientaţi, ambii, de la punctul O_{ij} spre exteriorul roţilor. Este uşor de înţeles însă că relaţia (11.179) îşi va păstra valabilitatea şi în cazul cînd valorile scalare ale celor două viteze unghiulare componente vor fi raportate la o pereche de versori $\bar{k}_i'^* = -\bar{k}_i'$ şi $\bar{k}_j'^* = -k_j'$, prientaţi de la punctul O_{ij} spre roţi, aşa cum rezultă din relaţia de mai jos:

$$\bar{\omega}_j = \omega_k \bar{k} \mp \frac{z_i}{z_j}(\omega_i - \omega_k)\bar{k}_j' = (-\omega_k)\bar{k}_i'^* \mp \frac{z_i}{z_j}[(-\omega_i) - (-\omega_k)]\bar{k}_j'^*,$$

dar că ea nu va mai fi valabilă în cazul cînd versorul uneia din axele roţilor este orientat spre exterior, iar celălalt spre roţi.

Se poate trage de aici concluzia că, pentru scrierea corectă a relaţiei (11.179), valorile scalare ale vitezelor unghiulare $\bar{\omega}_i$, $\bar{\omega}_k$ şi $\bar{\omega}_j$, vor trebui raportate fie la perechea de versori $\bar{i}_{\Delta_i} = \text{vers}\,(\Delta_i) = \bar{k}$ şi $\bar{i}_{\Delta_j} = \text{vers}\,(\Delta_j) = \bar{k}_j'$, orientaţi de la punctul O_{ij} spre exteriorul roţilor, (fig. 11.54) fie la perechea de versori $\bar{i}'_{\Delta_i} = -\bar{i}_{\Delta_i}$ şi $\bar{i}'_{\Delta_j} = -\bar{i}_{\Delta_j}$ orientaţi spre roţi.

Examinînd din nou fig. 11.54, se va mai observa că vectorul $\bar{\omega}_j = \omega_j \bar{i}_{\omega_j}$ — şi deci, în cazul de faţă, şi axa centrală a mişcării roţii satelit — formează cu axele (Δ_i) şi (Δ_j) ale celor două roţi unghiurile χ_i şi χ_j, determinate prin relaţiile

$$\begin{cases} \cos\chi_i = \bar{i}_{\omega_j}\bar{i}_{\Delta_i} = \dfrac{\bar{\omega}_j}{|\bar{\omega}_j|}\bar{k} = \\ \qquad = \dfrac{\omega_k \mp \dfrac{z_i}{z_j}(\omega_i - \omega_k)\cos\gamma}{\sqrt{\omega_k^2 \mp 2\dfrac{z_i}{z_j}\omega_k(\omega_i - \omega_k)\cos\gamma + \dfrac{z_i^2}{z_j^2}(\omega_i - \omega_k)^2}}; \\ \cos\chi_j = \bar{i}_{\omega_j}\bar{i}_{\Delta_j} = \dfrac{\bar{\omega}_j}{|\omega_j|}\bar{k}_j' = \\ \qquad = \dfrac{\omega_k\cos\gamma \mp \dfrac{z_i}{z_i}(\omega_i - \omega_k)}{\sqrt{\omega_k^2 \mp 2\dfrac{z_i}{z_j}\omega_k(\omega_i - \omega_k)\cos\gamma + \dfrac{z_i^2}{z_j^2}(\omega_i - \omega_k)^2}} \end{cases} \tag{11.183}$$

care permit să se tragă următoarele concluzii :

— unghiurile χ_i și χ_j depind de modul în care se efectuează rotația roții planetare și a port-satelitului, ele avînd valori constante numai în cazul cînd aceste rotații sînt uniforme ($\omega_i = \text{const}$; $\omega_k = \text{const}$) ;

— chiar atunci cînd sînt constante, unghiurile χ_i și χ_j nu coincid cu unghiurile constructive γ_i și γ_j ale roților, ale căror cosinusuri, obținute prin rezolvarea sistemului de ecuații

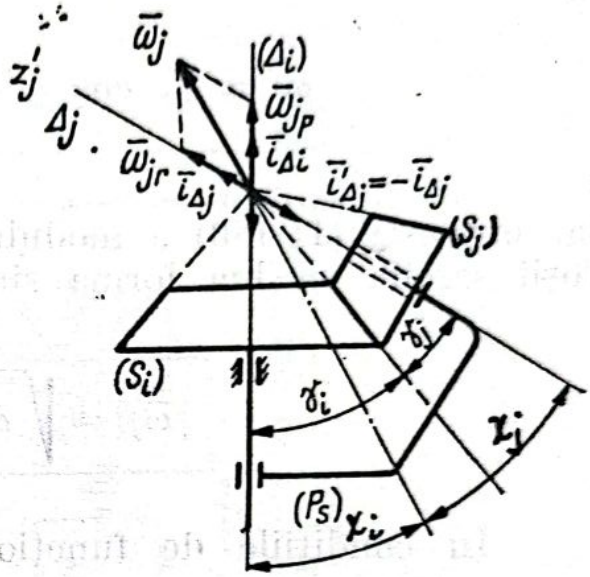


Fig. 11.54

$$\begin{cases} \gamma_i \pm \gamma_j = \gamma ; \\ \dfrac{\sin \gamma_i}{\sin \gamma_j} = \dfrac{z_i}{z_j}, \end{cases} \qquad (11.184)$$

au valorile

$$\cos \gamma_i = \frac{1 \pm \dfrac{z_i}{z_j} \cos \gamma}{\sqrt{1 \pm 2 \dfrac{z_i}{z_j} \cos \gamma + \dfrac{z_i^2}{z_j^2}}} ; \quad \cos \gamma_j = \frac{\cos \gamma \pm \dfrac{z_i}{z_j}}{\sqrt{1 \pm 2 \dfrac{z_i}{z_j} \cos \gamma + \dfrac{z_i^2}{z_j^2}}} . \qquad (11.185)$$

Scriind relația (11.179) sub forma

$$\bar{\omega}_j = \omega_j \bar{i}_{\omega_j} = \omega_k \bar{i}_{\Delta_i} \mp \frac{z_i}{z_j} (\omega_i - \omega_k) \bar{i}_{\Delta_j} \qquad (11.186)$$

și înmulțind-o scalar cu versorul $\bar{i}_{\omega_j}$ al vitezei unghiulare instantanee $\bar{\omega}_j$, se obține următoarea ecuație de transmisie a mișcării pentru mecanismul diferențial cu roți conice :

$$\boxed{\omega_j = \omega_k \cos \chi_i \mp \frac{z_i}{z_j} (\omega_i - \omega_k) \cos \chi_j .} \qquad (11.187)$$

Cel mai adesea, aceste mecanisme sînt cu contact exterior și cu unghiul $\gamma = \gamma_i + \gamma_j$ dintre axele celor două roți egal cu $\pi/2$ radiani; în aceste cazuri, relația (11.187) va lua forma

$$\boxed{\omega_j = \omega_k \cos \chi_i - \frac{z_i}{z_j} (\omega_i - \omega_k) \sin \chi_i} \tag{11.188}$$

iar expresia (11.180) a modulului vitezei unghiulare instantanee a roții satelit va lua forma simplificată:

$$\boxed{|\bar{\omega}_j| = \sqrt{\omega_k^2 + \frac{z_i^2}{z_j^2} (\omega_i - \omega_k)^2}} \tag{11.189}$$

În condițiile de funcționare

$$\omega_i \equiv 0, \tag{11.190}$$

adică cu roata planetară fixă, mecanismul analizat devine *mecanism planetar cu roți conice.*

Se verifică cu ușurință că în această ultimă situație rezultă consecințele

$$\chi_i = \gamma_i; \quad \chi_j = \gamma_j, \tag{11.191}$$

în baza cărora ecuațiile (11.187) și (11.188) vor lua formele:

$$\boxed{\omega_j = \omega_k \left(\cos \gamma_i \pm \frac{z_i}{z_j} \cos \gamma_j \right)}, \tag{11.192}$$

respectiv

$$\boxed{\omega_j = \omega_k \left(\cos \gamma_i + \frac{z_i}{z_j} \sin \gamma_i \right)}. \tag{11.193}$$

În condițiile constructive

$$\gamma_i = \gamma_j = \gamma = 0 \tag{11.194}$$

cu consecințele

$$\bar{k}'_i = \bar{k} = \bar{i}_{\Delta_i} = \bar{k}'_j = \bar{i}_{\Delta_j}; \qquad \chi_i = \chi_j = 0,$$

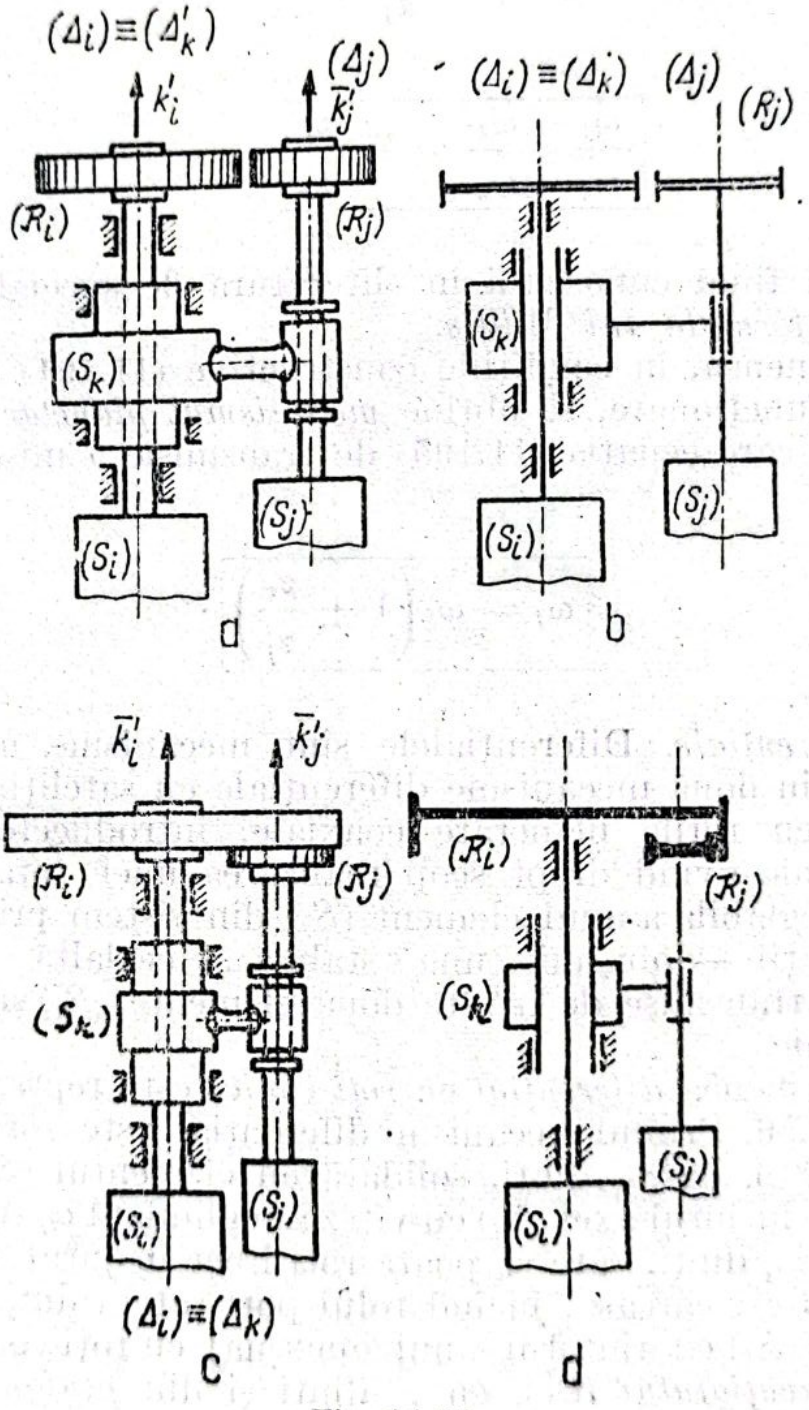


Fig. 11.55

se obține *mecanismul diferențial cu roți cilindrice* fie *epicicloidal* (cu contact exterior) — reprezentat în fig. 11.55, a și schematic în fig. 11.55, b —, fie *hipocicloidal* (cu contact interior) — reprezentat

Scanned with CamScanner

în fig. 11.55, c și schematic în fig. 11.55, d, pentru care ecuația (11.187) va lua forma

$$\omega_j = \omega_k \mp \frac{z_i}{z_j}(\omega_i - \omega_k), \tag{11.195}$$

sau încă

$$\boxed{\frac{\omega_j - \omega_k}{\omega_i - \omega_k} = \mp \frac{z_i}{z_j}}, \tag{11.196}$$

ultima formă fiind cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de *formula lui Willis*.

De asemenea, în condițiile constructive (11.194) și în condiția (11.190) de funcționare, se obține *mecanismul planetar cu roți cilindrice*, pentru care ecuația (11.195) de transmisie a mișcării ia forma

$$\boxed{\omega_j = \omega_k\left(1 \pm \frac{z_i}{z_j}\right)}. \tag{11.197}$$

c) *Diferențiale.* Diferențialele sînt mecanisme mai complexe, constituite din două mecanisme diferențiale cu sateliții solidar legați între ei și cu roțile planetare coaxiale, introducerea lor într-un sistem mecanic avînd drept scop realizarea unei rotații cu viteză unghiulară reglabilă a unui element (S_j) din sistem prin compunerea a două rotații — obișnuit, una stabilă și cealaltă reglabilă prin comandă —, transmise de la alte două elemente, (S_i) și (S_k) ale sistemului mecanic

Un asemenea *diferențial cu roți conice* este reprezentat schematic în fig. 11.56. Primul mecanism diferențial este format din roata planetară $(\mathcal{R}_{p_1})$, cu z_{p_1} dinți, solidară cu elementul (S_i) care transmite rotația în jurul axei (Δ_i) cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_i$ și din roata satelit $(\mathcal{R}_{s_1})$, cu z_{s_1} dinți, care se poate roti liber în jurul axei (Δ_s) fixată în carcasa (Cs); carcasa, jucînd rolul port-satelitului, este rotită tot în jurul axei (Δ_i) cu ajutorul unui angrenaj cu roți conice format din *coroana diferențialului* (Cr), cu z_c dinți și din *pinionul* (Pn), cu z_p dinți, solidar cu un element (S_k) al sistemului mecanic care execută o rotație în jurul axei fixe (Δ_k) cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_k$.

Raportînd valorile scalare ω_k și ω_c ale vitezelor unghiulare ale elementului (S_k) și carcasei (Cs) la perechea de versori $\bar{i}_1$ și $\bar{i}_2$, ori-

entaţi, primul dinspre punctul de intersecţie O^* a axelor (Δ_i) şi (Δ_k) spre coroană, iar ultimul spre exteriorul pinionului (fig. 11.56), viteza unghiulară a carcasei va fi dată de relaţia

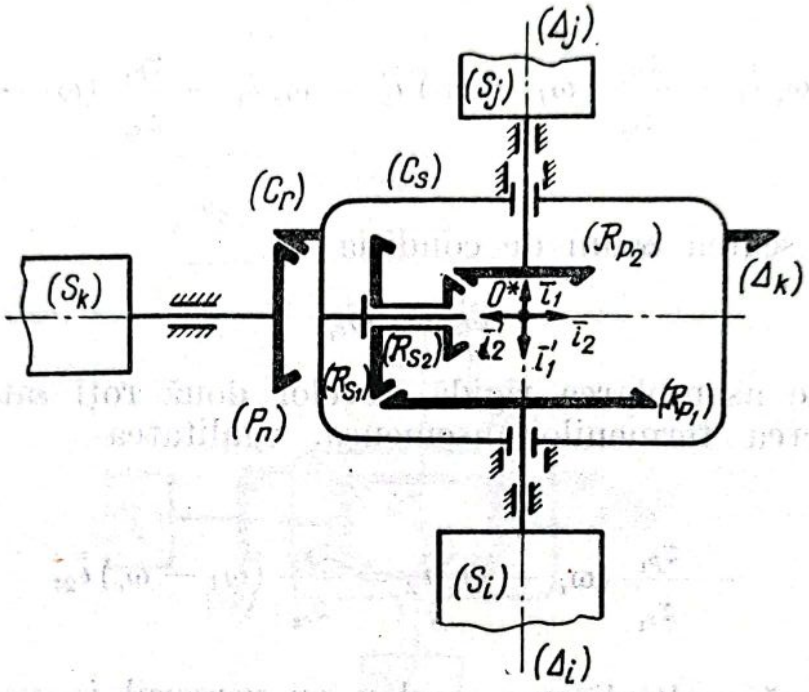


Fig. 11.56

$$\omega_c = \frac{z_p}{z_c}\,\omega_k. \tag{11.198}$$

Al doilea mecanism diferenţial este constituit din roata satelit $(\mathcal{R}_{s_2})$, cu z_{s_2} dinţi, solidară şi coaxială cu roata satelit $(\mathcal{R}_{s_1})$ şi din roata planetară $(\mathcal{R}_{p_2})$, cu z_{p_2} dinţi, ultima, solidară cu elementul (S_j) din sistemul mecanic, putîndu-se roti în jurul axei (Δ_j) aflată în prelungirea axei (Δ_i).

Aplicînd formula (11.179) primului mecanism diferenţial, cu valorile scalare ale vitezelor unghiulare ale roţii planetare şi carcasei raportate şi acum la versorul $\bar{i}_1$ şi cu valoarea scalară a vitezei unghiulare de rotaţie proprie a satelitului raportată la versorul $\bar{i}_2$ — perechea de versori $\bar{i}_1$ şi $\bar{i}_2$ fiind orientaţi de la punctul O^* spre exteriorul roţilor angrenate —, se va putea scrie relaţia

$$\bar{\omega}_{s_1} = \omega_c \bar{i}_1 - \frac{z_{p_1}}{z_{s_1}}(\omega_i - \omega_c)\bar{i}_2. \tag{11.199}$$

De asemenea, aplicînd formula (11.179) și celui de-al doilea mecanism diferențial, cu valorile scalare ale vitezelor unghiulare raportate la perechea de versori $\bar{i}_1$ și $\bar{i}'_2 = -\bar{i}_2$, orientați de la punctul O^* spre roțile respective, se poate scrie și a doua relație

$$\bar{\omega}_{s_2} = \omega_c \bar{i}_1 - \frac{z_{p_2}}{z_{s_2}} (\omega_j - \omega_c) \bar{i}'_2 = \omega_c \bar{i}_1 + \frac{z_{p_2}}{z_{s_2}} (\omega_j - \omega_c) \bar{i}_2. \tag{11.200}$$

Ținînd seama acum de condiția

$$\bar{\omega}_{s_2} = \bar{\omega}_{s_1}, \tag{11.201}$$

justificată de asamblarea rigidă a celor două roți satelit, rezultă, după reducerea termenilor asemenea, egalitatea

$$-\frac{z_{p_1}}{z_{s_1}} (\omega_i - \omega_c) \bar{i}_2 = \frac{z_{p_2}}{z_{s_2}} (\omega_j - \omega_c) \bar{i}_2,$$

de unde, după multiplicarea, scalar, cu versorul $\bar{i}_2$, va rezulta *formula diferențialului cu roți conice*:

$$\boxed{\omega_c \left(\frac{z_{p_1}}{z_{s_1}} + \frac{z_{p_2}}{z_{s_2}} \right) = \frac{z_{p_1}}{z_{s_1}} \omega_i + \frac{z_{p_2}}{z_{s_2}} \omega_j.} \tag{11.202}$$

Dacă se mai ține seama și de expresia (11198) a vitezei unghiulare a carcasei, rezultă următoarea relație între vitezele unghiulare ale celor trei elemente, (S_i), (S_j) și (S_k), cuplate prin diferențial:

$$\boxed{\frac{z_p}{z_c} \left(\frac{z_{p_1}}{z_{s_1}} + \frac{z_{p_2}}{z_{s_2}} \right) \omega_k = \frac{z_{p_1}}{z_{s_1}} \omega_i + \frac{z_{p_2}}{z_{s_2}} \omega_j.} \tag{11.203}$$

În condițiile constructive

$$z_{p_1} = z_{p_2}; \quad z_{s_1} = z_{s_2}, \tag{11.204}$$

echivalente contopirii roților satelit într-una singură, se obține *diferențialul automobilului*, reprezentat schematic în fig. 11.57, pentru care formulele (11.202) și (11.203) iau formele

$$\boxed{\omega_c = \frac{\omega_i + \omega_j}{2}}, \tag{11.205}$$

respectiv

$$\boxed{\omega_k = \frac{z_c}{z_p} \cdot \frac{\omega_i + \omega_j}{2}}. \tag{11.206}$$

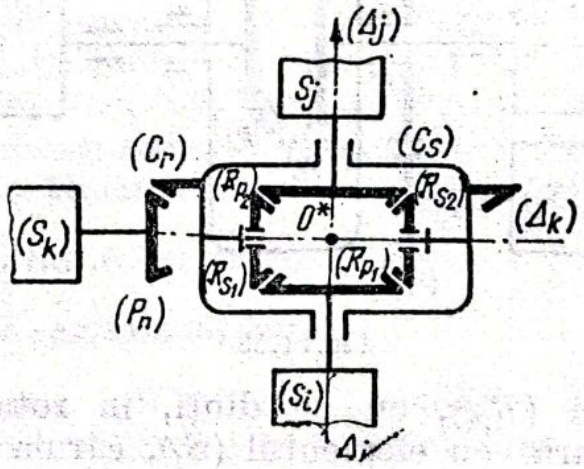


Fig. 11.57

Se menționează că în practică se folosește și cea de-a doua roată satelit, $(\mathcal{R}_{s_2})$, identică cu $(\mathcal{R}_{s_1})$ și așezată simetric cu aceasta din urmă în raport cu punctul O^* de intersecție a axelor $(\Delta_i) \equiv \equiv (\Delta_j)$ și (Δ_k), pentru a se asigura simetria diferențialului în raport cu axa comună de rotație a roților planetare.

De asemenea, prin asamblarea a două mecanisme diferențiale cu roți cilindrice, cu roțile satelit solidarizate și cu roțile planetare coaxiale, se obține *diferențialul cu roți cilindrice*, reprezntat schematic în fig. 11.58.

Primul mecanism diferențial este format din roata planetară $(\mathcal{R}_{p_1})$, cu z_{p_1} dinți, fixată de elementul (S_i) și în rotație în jurul axei fixe (Δ_i), precum și din roata satelit $(\mathcal{R}_{s_1})$, cu z_{s_1} dinți, în rotație liberă în jurul axei (Δ^*) imobilizată în carcasa (Cs), ultima având de regulă, formă cilindrică; carcasa se rotește cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_4$ în jurul aceleiași axe (Δ_i), ca urmare a antrenării coroanei (C_r) cu z_c dinți, de către pinionul (Pn), cu z_p dinți, ultimul solidar cu un a,l

element (S_k), al sistemului mecanic, în rotație în jurul axei (Δ_k) cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_k$. Se înțelege că relația (11.198) își va păstra și aici valabilitatea.

Cel de-al doilea mecanism diferențial este format din roata satelit (R_{s_2}), cu z_{s_2} dinți, solidară și coaxială cu roata satelit (R_{s_1}) și

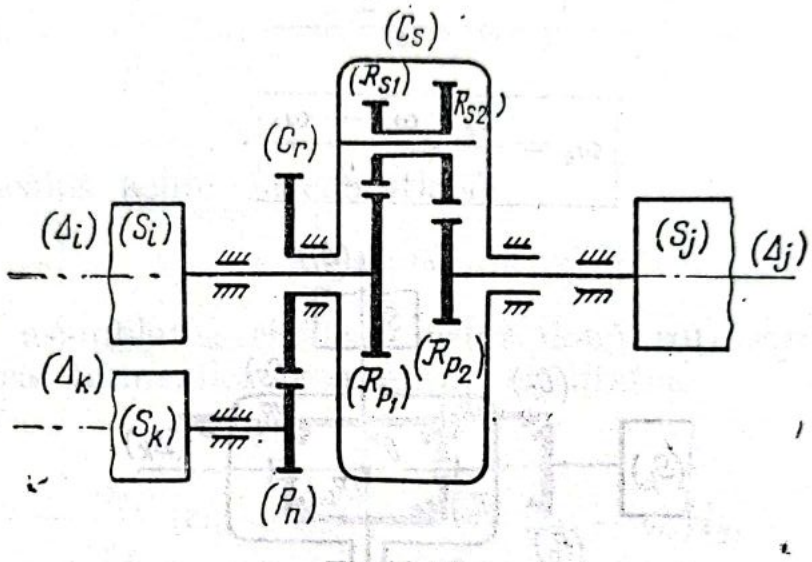


Fig.11.58

din roata planetară (R_{p_2}), cu z_{p_2} dinți, în rotație în jurul axei $(\Delta_j) = (\Delta_i)$ și solidară cu elementul (S_j), căruia i se transmite rotația rezultînd din suprapunerea rotațiilor primite de la elementele (S_i) și (S_j).

Aplicînd formula lui Willis celor două mecanisme diferențiale componente, rezultă relațiile

$$\frac{\omega_{s_1} - \omega_c}{\omega_i - \omega_c} = -\frac{z_{p_1}}{z_{s_1}}; \quad \frac{\omega_{s_2} - \omega_c}{\omega_j - \omega_c} = -\frac{z_{p_2}}{z_{s_2}} \tag{11.207}$$

Împărțind între ele, membru cu membru, aceste relații și ținînd seama și de condiția

$$\omega_{s_2} = \omega_{s_1} \tag{11.208}$$

justificată și aici de legătura rigidă dintre cele două roți satelit, rezultă următoarea *formulă a diferențialului cu roți cilindrice*:

$$\boxed{\frac{\omega_j - \omega_c}{\omega_i - \omega_c} = \frac{z_{p_1} z_{s_2}}{z_{s_1} z_{p_2}}}. \tag{11.209}$$

Dacă se mai ţine seama şi de relaţia (11.198), se obţine şi următoarea ecuaţie de transmisie a mişcării între elementele (S_i), (S_j) şi (S_k) cuplate prin diferenţial:

$$\boxed{\omega_j = \frac{z_{p_1} z_{s_2}}{z_{s_1} z_{p_2}} \omega_i - \frac{z_p}{z_c}\left(1 - \frac{z_{p_1} z_{s_2}}{z_{s_1} z_{p_1}}\right)\omega_k.} \qquad (11.210)$$

Şi în legătură cu utilizarea diferenţialelor într-un sistem mecanic trebuie făcută menţiunea că în multe situaţii, datorită valorilor mici ale caracteristicilor inerţiale ale elementelor ce le compun, diferenţialele pot fi considerate numai ca piese de legătură între trei elemente ale unui sistem mecanic, care execută rotaţii în jurul unor axe fixe în spaţiu, introducînd, în baza relaţiilor (11.203) sau (11.210), o ecuaţie de legătură între cele trei unghiuri de rotaţie ale elementelor cuplate; în asemenea situaţii, diferenţialele vor putea fi asimilate deci cu nişte cuple cinematice.

11.3.2. Mecanisme cu bare

1°. Mecanisme spaţiale cu bare

Pentru studierea, sub aspectul cinematic, a mecanismelor spaţiale cu bare au fost elaborate în ultimul timp numeroase metode, prezentate în tratatele de specialitate de teoria mecanismelor şi maşinilor.

Una din aceste metode, care s-a impus cu precădere în lumea specialiştilor în domeniu, pe de o parte, prin caracterul unitar al ei şi prin generalitatea aplicării ei la toate categoriile şi tipurile de mecanisme cu bare, indiferent de clasele cuplelor conţinute şi, pe de altă parte, prin posibilitatea adaptării ei la tehnica modernă de calcul, este *metoda tensorial-matriceală* a profesorilor D. Mangeron şi C. Drăgan de la Institutul politehnic Iaşi.

Această metodă, expusă în lucrarea de faţă pentru că ea permite şi stabilirea ecuaţiilor de legătură şi a ecuaţiilor de transmisie a mişcării într-un lanţ cinematic spaţial, are la bază următoarele idei fundamentale:

1) Orice mecanism spaţial cu bare, constituit cu cuple de clase arbitrare, poate fi transformat într-un mecanism spaţial echivalent, numit *mecanism redus*, constituit numai cu cuple cinematice de clasa a V-a şi, în ultimă instanţă, chiar numai cu cuple şurub-piuliţă

(cupla de translație este echivalentă cu o cuplă șurub-piuliță de pas infinit, iar cupla de rotație cu o cuplă șurub-piuliță de pas zero), adăugîndu-se mecanismului, în schimb, un număr suplimentar de bare, unele cu lungime variabilă. (Justificarea procedeului de înlocuire a unui mecanism complex cu mecanismul redus echivalent fiind o problemă de strictă specialitate, nu este prezentată în lucrarea de față).

2) Lanțurile cinematice complexe ale mecanismului se descompun într-un număr minim de „circuite simple", astfel încît fiecare element al mecanismului și fiecare cuplă să aparțină cel puțin unui circuit, care va trebui să conțină și batiul, metoda aplicîndu-se apoi fiecărui circuit simplu în parte.

3) În fiecare circuit simplu se face o numerotare a elementelor în ordinea în care se succed în lanțurile cinematice respective, plecîndu-se de la elementul fix ca element zero; notarea poate fi făcută fie în sensul în care se transmite mișcarea, fie în sens invers.

4) Fiecărui element (S_i) al unui asemenea circuit simplu i se asociază un reper cartezian triortogonal drept, $(\mathscr{R}'_i) \equiv Q_i\, x'_i\, y'_i\, z'_i$, covenabil ales, după criterii care urmăresc simplificarea la maximum a ecuațiilor de legătură stabilite cu ajutorul acestei metode. (Aceste criterii nu vor fi menționate în lucrarea de față, care își propune să prezinte numai metoda generală).

Considerînd un astfel de circuit simplu, format din n elemente mobile (S_i), $(i = 1,2,\ldots, n)$ și din elementul fix (S_0), se va raporta poziția unui element oarecare (S_0) al circuitului la reperul $(R'_j) \equiv Q_j\, x'_j\, y'_j\, z'_j$, invariabil atașat unui alt element (S_j) al circuitului, (fig. 11.59), această poziție fiind determinată prin următorii parametri de poziție:

— cele trei coordonate carteziene ale polului Q_i în raport cu reperul $(\mathscr{R}'_j)$, notate în continuare cu simbolurile $x^j_{Q_i}$, $y^j_{Q_i}$ și $z^j_{Q_i}$;

— trei din cele nouă consinusuri directoare ale axelor reperului $(\mathscr{R}'_i)$ în raport cu axele reperului $(\mathscr{R}'_j)$, neaparținînd aceleiași relații fundamentale, notate ca în tabelul de mai jos:

	$\bar{i}'_j$	$\bar{j}'_j$	$\bar{k}'_j$
$\bar{i}'_i$	$\alpha^{j,i}_{xx}$	$\alpha^{j,i}_{xy}$	$\alpha^{j,i}_{xz}$
$\bar{j}'_i$	$\alpha^{j,i}_{yx}$	$\alpha^{j,i}_{yy}$	$\alpha^{j,i}_{yz}$
$\bar{k}'_i$	$\alpha^{j,i}_{zx}$	$\alpha^{j,i}_{zy}$	$\alpha^{j,i}_{zz}$

(11.211)

Scanned with CamScanner

Acești parametri de poziție, corespunzători mișcării relative a elementului (S_i) în raport cu elementul (S_j), (fig. 11.60), vor putea fi exprimați în funcție de parametrii de poziție ai mișcărilor absolute ale celor două elemente, efectuate în raport cu reperul fix $(\mathscr{R}) \equiv$

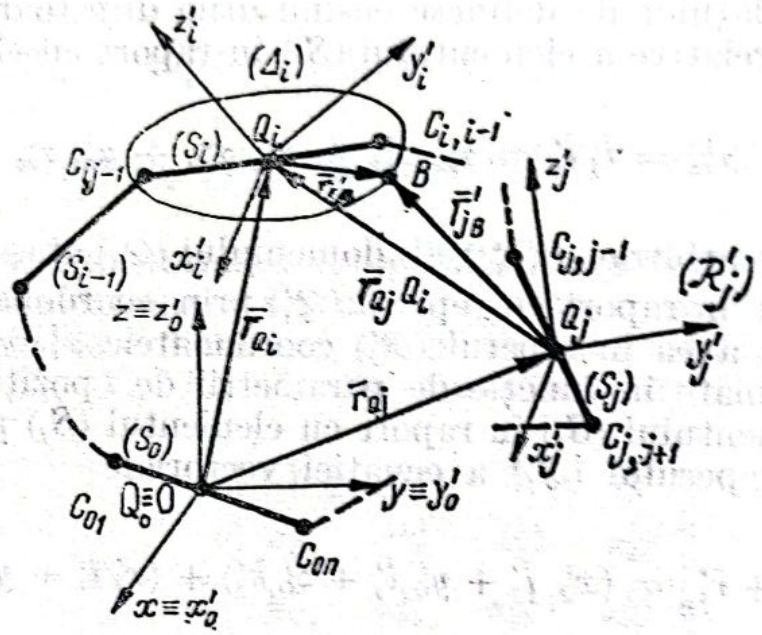
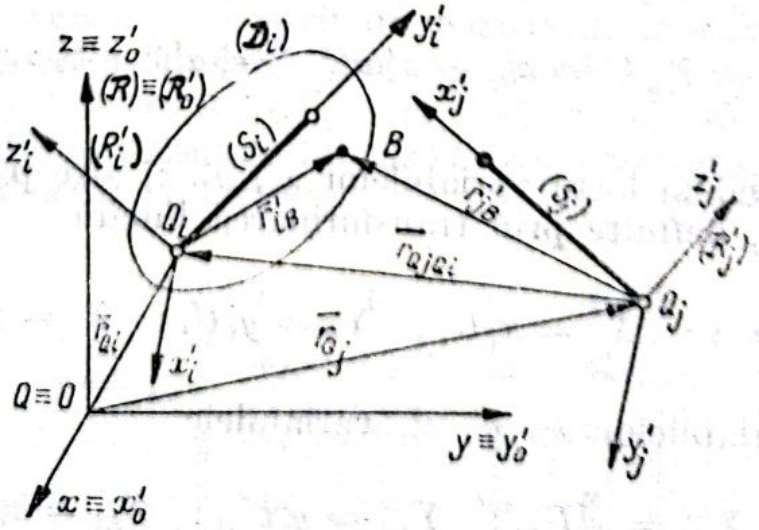


Fig. 11.59

$\equiv Oxyz$, atașat, de regulă, elementului fix, $((\mathscr{R}) \equiv (\mathscr{R}_0'))$, în baza relației evidente din fig. 11.60:

$$\bar{r}_{Q_jQ_i} = \bar{r}_{Q_i} - \bar{r}_{Q_j} = (x_{Q_i} - x_{Q_j})\bar{i} + (y_{Q_i} - y_{Q_j})\bar{j} + (z_{Q_i} - z_{Q_j})\bar{k},$$



Pig. 11.60

cu consecințele

$$x^j_{Q_i} = \bar{r}_{Q_jQ_i}\bar{i}'_j = (x_{Q_i} - x_{Q_j})\,\alpha^j_{xx} + (y_{Q_i} - y_{Q_j})\alpha^j_{xy} + (z_{Q_i} - z_{Q_j})\alpha^j_{xz}, \tag{11.212}$$

etc.

precum și a relațiilor de definesc cosinusurile directoare corespunzătoare mișcării relative a elementului (S_i) în raport cu elementul (S_j):

$$\alpha^{j,i}_{xx} = \bar{i}'_j\,\bar{i}'_i = \alpha^j_{xx}\,\alpha^i_{xx} + \alpha^j_{xy}\,\alpha^i_{xy} + \alpha^j_{xz}\,\alpha^i_{xz} \tag{11.213}$$

etc.

Un punct arbitrar $B(\bar{r}'_{i_B})$ al domeniului $(\mathscr{D}_i)$ atașat elementului $S_i)$, determinat în raport cu reperul $(\mathscr{R}'_i)$ prin coordonatele x'_i, y'_i, z'_i, (fig. 11.60), va avea în reperul $(\mathscr{R}'_j)$ coordonatele x^j_i, y^j_i, z^j_i, care vor putea fi exprimate în funcție de parametrii de poziție ai mișcării relative a elementului (S_i) în raport cu elementul (S_j) prin proiectarea pe axele reperului $(\mathscr{R}'_j)$ a ecuației vectoriale

$$\bar{r}'_{j_B} = \bar{r}_{Q_jQ_i} + \bar{r}'_{i_B} = (x^j_{Q_i}\,\bar{i}'_j + y^j_{Q_i}\bar{i}'_j + z^j_{Q_i}\bar{k}'_j) + (x'_i\,\bar{i}'_i + y'_i\,\bar{j}'_i + z'_i\,\bar{k}'_i)$$

evidentă din fig. 11.59, rezultînd astfel expresiile

$$\left|\begin{aligned} x^j_i &= \bar{r}'_{j_B}\bar{i}'_j = x^j_{Q_i} + x'_i\,\alpha^{j,i}_{xx} + y'_i\,\alpha^{j,i}_{yx} + z^i_i\,\alpha^{j,i}_{zx};\\ y^j_i &= \bar{r}'_{j_B}\bar{j}'_j = y^j_{Q_i} + x'_i\,\alpha^{j,i}_{xy} + y'_i\,\alpha^{j,i}_{yy} + z'_i\,\alpha^{j,i}_{zy};\\ z^j_i &= \bar{r}'_{j_B}\bar{k}'_j = z^j_{Q_i} + x'_i\,\alpha^{j,i}_{xz} + y'_i\,\alpha^{j,i}_{yz} + z'_i\,\alpha^{j,i}_{zz} \end{aligned}\right. \tag{11.1214}$$

Introducînd în locul variabilelor x'_i, y'_i, z'_i alte patru variabile, U_i, X_i, Y_i, Z_i, definite prin transformarea liniară

$$U_i = 1;\quad X_i = x'_iU_i;\quad Y_i = y'_iU_i;\quad Z_i = z'_iU_i \tag{11.215}$$

și în locul variabilelor x^j_i, y^j_i, z^j_i, variabilele

$$U_{j,i} = 1;\quad X_{j,i} = x^j_iU_{j,i};\quad Y_{j,i} = y^j_iU_{j,i};\quad Z_{j,i} = z^j_iU_{j,i}, \tag{11.216}$$

definite printr-o transformare liniară analoagă celei precedente, relaţiile (11.214) pot fi aduse la forma

$$\begin{cases} U_{j,i} = 1 \cdot U_i + 0 \cdot X_i + 0 \cdot Y_i + 0 \cdot Z_i ; \\ X_{j,i} = x^j_{Q_i} U_i + \alpha^{j,i}_{xx} X_i + \alpha^{j,i}_{yx} Y_i + \alpha^{j,i}_{zx} Z_i ; \\ Y_{j,i} = y^j_{Q_i} U_i + \alpha^{j,i}_{xy} X_i + \alpha^{j,i}_{yy} Y_i + \alpha^{j,i}_{zy} Z_i ; \\ Z_{j,i} = z^j_{Q_i} U_i + \alpha^{j,i}_{xz} X_i + \alpha^{j,i}_{yz} Y_i + \alpha^{j,i}_{zz} Z_i, \end{cases} \tag{11.217}$$

ele definind o transformare ortogonală afină într-un spaţiu euclidian cvadridimensional. În acest spaţiu se defineşte un tensor ortogonal afin de ordinul doi, cu matricea formată din coeficienţii variabilelor U_i, X_i, Y_i, Z_i din transformarea (11.217), adică de forma

$$\mathbf{T}^{(j,i)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^j_{Q_i} & \alpha^{j,i}_{xx} & \alpha^{j,i}_{yx} & \alpha^{j,i}_{zx} \\ y^j_{Q_i} & \alpha^{j,i}_{xy} & \alpha^{j,i}_{yy} & \alpha^{j,i}_{zy} \\ z^j_{Q_i} & \alpha^{j,i}_{xz} & \alpha^{j,i}_{yz} & \alpha^{j,i}_{zz} \end{matrix} \right\|, \tag{11.218}$$

acest tensor purtînd numele de *tensor de poziţie al elementuui* (S_i) în raport cu elementul (S_j).

Dacă elementul (S_j) este elementul fix (S_0), $(j = 0)$, căruia i se ataşează reperul fix $(\mathscr{R}'_0) \equiv (\mathscr{R})$ la care se raportează mişcare mecanismului, atunci parametrii de poziţie ai mişcării relative a elementului (S_i) faţă de acest element coincid cu parametrii de poziţie ai mişcării lui absolute $(x^0_{Q_i} = x_{Q_i}$; $y^0_{Q_i} = y_{Q_i}$; $z^0_{Q_i} = z_{Q_i}$, $\alpha^{0i}_{xx} = \alpha^i_{xx}$, $\ldots$, $\alpha^{0i}_{zz} = \alpha^i_{zz})$ şi tensorul de poziţie corespunzător acestei mişcări absolute va avea matricea

$$\mathbf{T}^{(0,i)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{Q_i} & \alpha^i_{xx} & \alpha^i_{yx} & \alpha^i_{zx} \\ y_{Q_i} & \alpha^i_{xy} & \alpha^i_{yy} & \alpha^i_{zx} \\ z_{Q_i} & \alpha^i_{xz} & \alpha^i_{yz} & \alpha^i_{zz} \end{matrix} \right\| \tag{11.219}$$

Scanned with CamScanner

De asemenea, dacă elementul (S_j) coincide cu elementul (S_{i-1}), $(j = i - 1)$, care precede elementul (S_i) în circuitul simplu considerat, în ordinea de numerotare adoptată, matricea (11.218) va lua forma

$$\mathbf{T}^{(i-1,i)} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{Q_i}^{i-1} & \alpha_{xx}^{i-1,i} & \alpha_{yx}^{i-1,i} & \alpha_{zx}^{i-1,i} \\ y_{Q_i}^{i-1} & \alpha_{xy}^{i-1,i} & \alpha_{yy}^{i-1,i} & \alpha_{zy}^{i-1,i} \\ z_{Q_i}^{i-1} & \alpha_{xz}^{i-1,i} & \alpha_{yz}^{i-1,i} & \alpha_{zz}^{i\ 1,i} \end{array} \right\| \tag{11.220}$$

În calculul tensorial se demonstrează că matricea de transformare (11.219) poate fi exprimată în funcție de matricele de transformare succesivă (11.220) sub forma

$$\boxed{\mathbf{T}^{(0,i)} = \mathbf{T}^{(0,1)}\ \mathbf{T}^{(1,2)} \ldots \mathbf{T}^{(i-2,\,i-1)}\ \mathbf{T}^{(i-1,\,i)}} \tag{11.221}$$

Aceasta este relația generală care va permite stabilirea ecuațiilor de legătură corespunzătoare unui circuit dat.

Într-adevăr, pentru fiecare valoare a indicelui i — deci pentru fiecare dintre elementele mobile ale circuitului simplu considerat —, identificarea componentelor din ultimele trei linii ale matricei $\mathbf{T}^{(0,i)}$ cu componentele corespunzătoare din ultimele trei linii ale matricei produs din membrul drept al relației (11.221), va conduce la un număr de 12 ecuații între parametrii de poziție ai mișcării absolute elementului (S_i) și cei ai mișcărilor relative succesive ale elementelor precedente elementului (S_i); dintre aceste ecuații, independente între ele sînt numai un număr egal cu clasa cuplei care leagă elementul (S_i) de elementul precedent (S_{i-1}), adică, în condițiile mecanismului redus, numai cinci.

Alegînd deci convenabil ecuațiile independente și înlocuind în ele parametrii de poziție ai mișcărilor relative cu expresiile lor (11.212) și (11.213), în funcție de parametrii de poziție ai mișcărilor absolute ale elementelor, se obține sistemul de ecuații de legătură corespunzătoare cuplei cinematice care leagă fiecare element al circuitului de cele precedente, luate în ordinea numerotării.

Scanned with CamScanner

La închiderea circuitului simplu considerat, adică la revenirea la elementul fix ($(S_{n+1}) \equiv (S_0)$), ($i = n + 1 \leftrightarrow o$), relația (11.221) va lua forma

$$\mathbf{T}^{(0,0)} = \mathbf{T}^{(0,1)}\,\mathbf{T}^{(1,2)} \ldots \mathbf{T}^{(n+,n)}\,\mathbf{T}^{(n,0)},$$

sau încă, observînd că în această situație ($(\mathscr{R}'_{n+1}) \equiv \mathscr{R}'_0) \equiv (\mathscr{R})$; $Q_0 \equiv 0$; $x^0_{Q_0} = y^0_{Q_0} = z^0_{Q_0} = 0$; $\alpha^{0,0}_{xx} = \alpha^{0,0}_{yy} = \alpha^{0,0}_{zz} = 1$; $\alpha^{0,0}_{yy} = \ldots = \alpha^{0,0}_{zy} = 0$), matricea $\mathbf{T}^{(0,0)}$ se reduce la matricea unitate

$$\mathbf{T}^{(0,0)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \mathbf{E}, \tag{11.222}$$

se mai poate scrie

$$\boxed{\mathbf{T}^{(0,1)} \cdot \mathbf{T}^{(1,2)} \ldots \mathbf{T}^{(n-2,\,n-1)} \cdot \mathbf{T}^{(n-1,\,n)} \cdot \mathbf{T}^{(n,\,0)} = \mathbf{E}}, \tag{11.223}$$

această egalitate purtînd numele de *ecuația de închidere a circuitului simplu* considerat.

Identificarea componentelor ultimelor trei linii ale matricei produs din membrul stîng al ultimei relații cu componentele corespunzătoare ale ultimelor trei linii ale matricei unitare permite să se scrie un număr de alte 12 ecuații finale de legătură care, așa cum se va arăta în paragraful următor, vor da posibilitatea să se exprime parametrii de poziție ai mișcărilor absolute ale elementelor în funcție de un număr determinat de variabile independente între ele, putînd determina în mod univoc poziția sistemului mecanic reprezentat prin circuitul considerat și care se numesc, din acest motiv, *parametri de poziție independenți*.

Prin derivarea în raport cu timpul a tensorului de poziție cu matricea (11.219) se obține *tensorul viteză al mișcării absolute a elementului* (S_i), cu matricea

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}^{(0,i)}}{\mathrm{d}t} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{x}_{Q_i} & \dot{\alpha}^i_{xx} & \dot{\alpha}^i_{yx} & \dot{\alpha}^i_{zx} \\ \dot{y}_{Q_i} & \dot{\alpha}^i_{xy} & \dot{\alpha}^i_{yy} & \dot{\alpha}^i_{xy} \\ \dot{z}_{Q_i} & \dot{\alpha}^i_{xz} & \dot{\alpha}^i_{yz} & \dot{\alpha}^i_{zz} \end{matrix} \right\| \tag{11.224}$$

Scanned with CamScanner

iar prin derivarea tensorului de poziție cu matricea (11.220) se obține și *tensorul viteză al mișcării relative a elementului* (S_i) *în raport cu elementul* (S_{i-1}), cu matricea

$$\frac{d\mathbf{T}^{(i-1,\,i)}}{dt} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{x}_{Q_i}^{i-1} & \dot{\alpha}_{xx}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{yx}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{zx}^{i-1,\,i} \\ \dot{y}_{Q_i}^{i-1} & \dot{\alpha}_{xy}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{yy}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{zy}^{i-1,\,i} \\ \dot{z}_{Q_i}^{i-1} & \dot{\alpha}_{xz}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{yz}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{zz}^{i-1,\,i} \end{Vmatrix}. \tag{11.225}$$

Denumirea de „tensori viteză" este justificată de faptul că matricele precedente conțin toate elementele necesare pentru determinarea parametrilor cinematici de ordinul întîi, atît ai mișcărilor absolute ale elementelor, cît și ai mișcărilor lor relative în raport cu elementele care le preced în circuitul simplu considerat.

Într-adevăr, ultimele trei elemente ale primei coloane din matricele (11.224) și (11.225) determină vitezele de translație ale elementelor respective în mișcările lor absolute și relative în raport cu elementele care le preced în circuit, reprezentate prin matricele coloană

$$\mathbf{V}_{Q_i} = \begin{Vmatrix} \dot{x}_{Q_i} \\ \dot{y}_{Q_i} \\ \dot{z}_{Q_i} \end{Vmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{V}_{Q_i}^{i-1} = \begin{Vmatrix} \dot{x}_{Q_i}^{i-1} \\ \dot{y}_{Q_i}^{i-1} \\ \dot{z}_{Q_i}^{i-1} \end{Vmatrix} \tag{11.226}$$

Considerînd mișcarea elementului (S_{i-1}) ca mișcare de transport în mișcarea absolută a elementului (S_i), este evidentă relația vectorială

$$\bar{v}_{Q_i} = \bar{v}_{Q_{i-1}} + \bar{v}_{Q_i}^{i-1} = \bar{v}_{Q_i} + (\dot{x}_{Q_i}^{i-1}\,\bar{i}_{i-1}' + \dot{y}_{Q_i}^{i-1}\,\bar{j}_{i-1}' + \dot{z}_{Q_i}^{i-1}\,\bar{k}_{i-1}'), \tag{11.227}$$

cu următoarele proiecții pe axele reperului fix

$$\begin{cases} \dot{x}_{Q_i} = \dot{x}_{Q_{i-1}} + \dot{x}_{Q_i}^{i-1}\,\alpha_{xx}^{i-1} + \dot{y}_{Q_i}^{i-1}\,\alpha_{yx}^{i-1} + \dot{z}_{Q_i}^{i-1}\,\alpha_{zx}^{i-1}; \\ \dot{y}_{Q_i} = \dot{y}_{Q_{i-1}} + \dot{x}_{Q_i}^{i-1}\,\alpha_{xy}^{i-1} + \dot{y}_{Q_i}^{i-1}\,\alpha_{yy}^{i-1} + \dot{z}_{Q_i}^{i-1}\,\alpha_{zy}^{i-1}; \\ \dot{z}_{Q_i} = \dot{z}_{Q_{i-1}} + \dot{x}_{Q_i}^{i-1}\,\alpha_{xz}^{i-1} + \dot{y}_{Q_i}^{i-1}\,\alpha_{yz}^{i-1} + \dot{z}_{Q_i}^{i-1}\,\alpha_{zz}^{i-1}. \end{cases} \tag{11.228}$$

Scanned with CamScanner

Dacă se notează cu

$$\alpha_{i-1} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{xx}^{i-1} & \alpha_{xy}^{i-1} & \alpha_{xz}^{i-1} \\ \alpha_{yx}^{i-1} & \alpha_{yy}^{i-1} & \alpha_{yz}^{i-1} \\ \alpha_{zx}^{i-1} & \alpha_{zy}^{i-1} & \alpha_{zz}^{i-1} \end{matrix} \right\| \tag{11.229}$$

matricea cosinusurilor directoare ale axelor reperului $(\mathscr{R}'_{i-1})$ în raport cu axele reperului fix, se verifică cu uşurinţă că relaţiile (11.228) pot fi scrise sub următoarea formă concentrată, matriceală :

$$\boxed{\mathbf{V}_{Q_i} = \mathbf{V}_{Q_{i-1}} + \alpha_{i-1}^T \mathbf{V}_{Q_i}^{i-1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)} \tag{11.230}$$

ele constituind prima serie de relaţii care vor furniza o parte din ecuaţiile de transmisie a mişcării în circuitul simplu considerat.

De asemenea, cu ajutorul matricelor

$$\dot{\alpha}_i = \left\| \begin{matrix} \dot{\alpha}_{xx}^{i} & \dot{\alpha}_{xy}^{i} & \dot{\alpha}_{xz}^{i} \\ \dot{\alpha}_{yx}^{i} & \dot{\alpha}_{yy}^{i} & \dot{\alpha}_{yz}^{i} \\ \dot{\alpha}_{zx}^{i} & \dot{\alpha}_{zy}^{i} & \dot{\alpha}_{zz}^{i} \end{matrix} \right\| \quad \text{şi} \quad \dot{\alpha}_i^{i-1} = \left\| \begin{matrix} \dot{\alpha}_{xx}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{xy}^{i-1,\,1} & \dot{\alpha}_{xz}^{i-1,\,i} \\ \dot{\alpha}_{yx}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{yy}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{yz}^{i-1,\,i} \\ \dot{\alpha}_{zx}^{i-1,\,i} & \dot{\alpha}_{zy}^{1-i,\,i} & \dot{\alpha}_{zz}^{i-1,\,i} \end{matrix} \right\| \tag{11.231}$$

formate din elementele ultimelor trei linii şi ultimelor trei coloane ale matricelor (11.224) şi (11.225), va putea fi stabilită o a doua serie de relaţii, dintre care unele vor putea fi alese ca ecuaţii de transmisie a mişcării în circuitul examinat.

Considerînd şi acum mişcarea relativă a unui element (S_i) în raport cu un alt element (S_j) al circuitului simplu, se va remarca că pentru un observator fix în reperul $(\mathscr{R}'_j)$, ataşat invariabil elementului (S_j), variaţiile versorilor axelor reperului $(\mathscr{R}'_i)$, solidar cu elementul (S_i), sînt provocate de rotaţiile instantanee relative ale elementului (S_i) în raport cu elementul (S_j), deci de viteza unghiulară instantanee relativă a elementului (S_i) în raport cu elementul (S_j), notată $\overline{\omega}_i^j$, ceea ce înseamnă că pentru derivatele relative în raport cu timpul ale versorilor axelor reperului $(\mathscr{R}'_j)$ — derivate notate cu simbolurile $\dot{\vec{i}}_i'^j$, $\dot{\vec{j}}_i'^j$ şi $\dot{\vec{k}}_i'^j$ şi considerate din punctul de vedere al ob-

servatorului fixat în reperul $(\mathscr{R}_j')$ — vor putea fi scrise expresii analoage formulelor lui Poisson din mișcarea absolută, adică se va putea scrie

$$\dot{\bar{i}}_i'^j = \bar{\omega}_i^j \times \bar{i}_i'; \quad \dot{\bar{j}}_i'^j = \bar{\omega}_i^j \times \bar{j}_i'; \quad \dot{\bar{k}}_i'^j = \bar{\omega}_i^j \times \bar{k}_i', \tag{11.232}$$

sau încă, exprimînd analitic în raport cu reperul $(\mathscr{R}_i')$ vectorul $\bar{\omega}_i^j = \omega_{i_{x_i}}^j \bar{i}_i' + \omega_{i_{y_i}}^j \bar{j}_i' + \omega_{i_{z_i}}^j \bar{k}_i'$, mai rezultă

$$\dot{\bar{i}}_i'^j = \omega_{i_{z_i}}^j \bar{j}_i' - \omega_{i_{y_i}}^j \bar{k}_i'; \quad \dot{\bar{j}}_i'^j = -\omega_{i_{z_i}}^j \bar{i}_i' + \omega_{i_{x_i}}^j \bar{k}_i';$$
$$\dot{\bar{k}}_i'^j = \omega_{i_{y_i}}^j \bar{i}_i' - \omega_{i_{x_i}}^j \bar{j}_i', \tag{11.233}$$

cu

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}}'^j = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha_{xx}^{j,i} \bar{i}_j' + \alpha_{xy}^{j,i} \bar{j}_j' + \alpha_{xz}^{j,i} \bar{k}_j']_r = \dot{\alpha}_{xx}^{j,i} \bar{i}_j' + \dot{\alpha}_{xy}^{j,i} \bar{j}_j' + \dot{\alpha}_{xz}^{j,i} \bar{k}_j'; \\ \dot{\bar{j}}_i'^j = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha_{yx}^{j,i} \bar{i}_j' + \alpha_{yy}^{j,i} \bar{j}_j' + \alpha_{yz}^{j,i} \bar{k}_j']_r = \dot{\alpha}_{yx}^{j,i} \bar{i}_j' + \dot{\alpha}_{yy}^{j,i} \bar{j}_j' + \dot{\alpha}_{yz}^{j,i} \bar{k}_j'; \\ \dot{\bar{k}}_i'^j = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha_{zx}^{j,i} \bar{i}_j' + \alpha_{zy}^{j,i} \bar{j}_j' + \alpha_{zz}^{j,i} \bar{k}_j']_r = \dot{\alpha}_{zx}^{j,i} \bar{i}_j' + \dot{\alpha}_{zy}^{j,i} + \dot{\alpha}_{zz}^{j,i} \bar{k}_j'. \end{cases} \tag{11.234}$$

Prin înmulțirea, scalar, a relațiilor (11.233) cu versorii axelor reperului $(\mathscr{R}_i')$ și exprimarea analitică a produselor scalare dintre versori și derivatele lor relative cu ajutorul proiecțiilor lor pe axele reperului $(\mathscr{R}_j')$, rezultă următoarele expresii ale proiecțiilor pe axele reperului $(\mathscr{R}_i')$ ale vitezei unghiulare instantanee relative a elementului (S_i) în raport cu elementul (S_j):

$$\omega_{i_{x_i}}^j = \dot{\bar{j}}_i'^j \bar{k}_i' = -\dot{\bar{k}}_i'^j \bar{j}_i' = \dot{\alpha}_{yx}^{j,i} \alpha_{zx}^{j,i} + \dot{\alpha}_{yy}^{j,i} \alpha_{zy}^{j,i} + \dot{\alpha}_{yz}^{j,i} \alpha_{zz}^{j,i} =$$
$$= -[\dot{\alpha}_{zx}^{j,i} \alpha_{yx}^{j,i} + \dot{\alpha}_{zy}^{j,i} \alpha_{yy}^{j,i} + \dot{\alpha}_{zz}^{j,i} \alpha_{yz}^{j,i}];$$
$$\omega_{i_{y_i}}^j = \dot{\bar{k}}_i'^j \bar{i}_i' = -\dot{\bar{i}}_i'^j \bar{k}_i' = \dot{\alpha}_{zx}^{j,i} \alpha_{xx}^{j,i} + \dot{\alpha}_{zy}^{j,i} \alpha_{xy}^{j,i} + \dot{\alpha}_{zz}^{j,i} \alpha_{xz}^{j,i} =$$
$$= -[\dot{\alpha}_{xx}^{j,i} \alpha_{zx}^{j,i} + \dot{\alpha}_{xy}^{j,i} \alpha_{zy}^{j,i} + \dot{\alpha}_{xz}^{j,i} \alpha_{zz}^{j,i}];$$
$$\omega_{i_{z_i}}^j = \dot{\bar{i}}_i'^j \bar{j}_i' = -\dot{\bar{j}}_i'^j \bar{i}_i' = \dot{\alpha}_{xx}^{j,i} \alpha_{yx}^{j,i} + \dot{\alpha}_{xy}^{j,i} \alpha_{yy}^{j,i} + \dot{\alpha}_{xz}^{j,i} \alpha_{yz}^{j,i} =$$
$$= -[\dot{\alpha}_{yx}^{j,i} \alpha_{xx}^{j,i} + \dot{\alpha}_{yy}^{j,i} \alpha_{xy}^{j,i} + \dot{\alpha}_{yz}^{j,i} \alpha_{xz}^{j,i}]. \tag{11.235}$$

Considerînd matricea antisimetrică asociată vectorului viteză unghiulară relativă $\overline{\omega}_i^j$, adică

$$\tilde{\omega}_i^j = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{i_{z_i}}^j & \omega_{i_{y_i}}^j \\ \omega_{i_{z_i}}^j & 0 & -\omega_{i_{x_i}}^j \\ -\omega_{i_{y_i}}^j & \omega_{i_{x_i}}^j & 0 \end{Vmatrix} \tag{11.236}$$

precum și matricele pătratice

$$\alpha_{j,i} = \begin{Vmatrix} \alpha_{xx}^{j,i} & \alpha_{xy}^{j,i} & \alpha_{xz}^{j,i} \\ \alpha_{yx}^{j,i} & \alpha_{yy}^{j,i} & \alpha_{yz}^{j,i} \\ \alpha_{zx}^{j,i} & \alpha_{zy}^{j,i} & \alpha_{zz}^{j,i} \end{Vmatrix}; \qquad \dot{\alpha}_{j,i} = \begin{Vmatrix} \dot{\alpha}_{xx}^{j,i} & \dot{\alpha}_{xy}^{j,i} & \dot{\alpha}_{xz}^{j,i} \\ \dot{\alpha}_{yx}^{j,i} & \dot{\alpha}_{yy}^{j,i} & \dot{\alpha}_{yz}^{j,i} \\ \dot{\alpha}_{zx}^{j,i} & \dot{\alpha}_{zy}^{j,i} & \dot{\alpha}_{zz}^{j,i} \end{Vmatrix} \tag{11.237}$$

se poate verifica cu ușurință că relațiile (11.235) pot fi înlocuite prin relația matriceală concentrată

$$\tilde{\omega}_i^j = \alpha_{j,i}\,\dot{\alpha}_{j,i}^T = -\,\dot{\alpha}_{j,i}\,\alpha_{j,i}^T, \tag{11.238}$$

$\alpha_{j,i}^T$ și $\dot{\alpha}_{j,i}^T$ fiind transpusele matricelor $\alpha_{j,i}$, respectiv $\dot{\alpha}_{j,i}$.

Pentru $j = 0$, $((S_j) \equiv (S_0))$, matricele precedente vor corespunde mișcării absolute a elementului (S_i), cu

$$\tilde{\omega}_i^0 = \tilde{\omega}_i = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_{i_z} & \omega_{i_y} \\ \omega_{i_z} & 0 & -\omega_{i_x} \\ -\omega_{i_y} & \omega_{i_z} & 0 \end{Vmatrix} \tag{11.239}$$

și

$$\alpha_{0,i} = \alpha_i = \begin{Vmatrix} \alpha_{xx}^i & \alpha_{xy}^i & \alpha_{xz}^i \\ \alpha_{yx}^i & \alpha_{yy}^i & \alpha_{yz}^i \\ \alpha_{zx}^i & \alpha_{zy}^i & \alpha_{zz}^i \end{Vmatrix}; \qquad \dot{\alpha}_{0,i} = \dot{\alpha}_i = \begin{Vmatrix} \dot{\alpha}_{xx}^i & \dot{\alpha}_{xy}^i & \dot{\alpha}_{xz}^i \\ \dot{\alpha}_{yx}^i & \dot{\alpha}_{yy}^i & \dot{\alpha}_{yz}^i \\ \dot{\alpha}_{zx}^i & \dot{\alpha}_{zy}^i & \dot{\alpha}_{zz}^i \end{Vmatrix} \tag{11.240}$$

Scanned with CamScanner

și relația (11.238) va lua forma

$$\tilde{\omega}_i = \alpha_i \dot{\alpha}_i^T = -\dot{\alpha}_i \alpha_i^T. \tag{11.241}$$

Pentru $j = i - 1$, $((S_j) = (S_{i-1}))$, adică pentru mișcarea relativă a elementului (S_i) în raport cu elementul care îl precede în circuit în ordinea de numerotare adoptată, relația (11.238) va lua forma

$$\tilde{\omega}_i^{i-1} = \alpha_{i-1,i} \dot{\alpha}_{i-1,i}^T = -\dot{\alpha}_{i-1,i} \alpha_{i-1,i}^T. \tag{11.242}$$

Între matricea α_i și matricele succesive $\alpha_{i-1,i}$ există, așa cum se demonstrează în calculul matriceal, o relație analogă relației (11.221), adică se poate scrie

$$\boxed{\alpha_i = \alpha_{0,1} \alpha_{1,2} \ldots \alpha_{i-2,i-1} \alpha_{i-1,i}} \tag{11.243}$$

Revenind la elementul (S_i), considerat în mișcare relativă în raport cu elementul precedent (S_{i-1}), a cărui mișcare va juca rolul de mișcare de transport pentru mișcarea absolută a elementului (S_i), între vitezele unghiulare absolute, relative și de transport ale elementului (S_i), $(\bar{\omega}_{i_a} = \bar{\omega}_i;\ \bar{\omega}_{i_t} = \bar{\omega}_{i-1};\ \bar{\omega}_{i_r} = \bar{\omega}_i^{i-1})$, poate fi scrisă relația cunoscută

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{i-1} + \bar{\omega}_i^{i-1}. \tag{11.244}$$

În transcrierea matriceală, această relație va lua, ținînd seama și de egalitatea (11.242), forma

$$\boxed{\begin{array}{l}\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_{i-1} + \alpha_{i-1,i} \dot{\alpha}_{i-1,i}^T = \tilde{\omega}_{i-1} - \dot{\alpha}_{i-1,i} \alpha_{i-1,i}^T \\ (i = 1,2, \ldots, n)\end{array}}^{*)}. \tag{11.245}$$

Pentru fiecare valoare a lui i se obține, prin identificarea celor trei componente distincte ale matricelor din ambii membri ai relației

* Se face mențiunea că în lucrarea de față, pentru folosirea consecventă a unui mod unitar de notare, indicii atașați diverselor simboluri utilizate au fost scriși în ordine inversă celei adoptate în lucrările autorilor metodei și respectate și în tratatele și cursurile de Teoria mecanismelor și mașinilor.

Scanned with CamScanner

și relația (11.238) va lua forma

$$\tilde{\omega}_i = \alpha_i \dot{\alpha}_i^T = - \dot{\alpha}_i \alpha_i^T . \tag{11.241}$$

Pentru $j = i - 1$, $((S_j) = (S_{i-1}))$, adică pentru mișcarea relativă a elementului (S_i) în raport cu elementul care îl precede în circuit în ordinea de numerotare adoptată, relația (11.238) va lua forma

$$\tilde{\omega}_i^{i-1} = \alpha_{i-1,i} \dot{\alpha}_{i-1,i}^T = - \dot{\alpha}_{i-1,i} \alpha_{i-1,i}^T . \tag{11.242}$$

Între matricea α_i și matricele succesive $\alpha_{i-1,i}$ există, așa cum se demonstrează în calculul matriceal, o relație analogă relației (11.221), adică se poate scrie

$$\boxed{\alpha_i = \alpha_{0,1} \alpha_{1,2} \ldots \alpha_{i-2,i-1} \alpha_{i-1,i}} \tag{11.243}$$

Revenind la elementul (S_i), considerat în mișcare relativă în raport cu elementul precedent (S_{i-1}), a cărui mișcare va juca rolul de mișcare de transport pentru mișcarea absolută a elementului (S_i), între vitezele unghiulare absolute, relative și de transport ale elementului (S_i), $(\bar{\omega}_{i_a} = \bar{\omega}_i ;\ \bar{\omega}_{i_t} = \bar{\omega}_{i-1} ;\ \bar{\omega}_{i_r} = \bar{\omega}_i^{i-1})$, poate fi scrisă relația cunoscută

$$\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_{i-1} + \bar{\omega}_i^{i-1} . \tag{11.244}$$

În transcrierea matriceală, această relație va lua, ținînd seama și de egalitatea (11.242), forma

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_{i-1} + \alpha_{i-1,i} \dot{\alpha}_{i-1,i}^T = \tilde{\omega}_{i-1} - \dot{\alpha}_{i-1,i} \alpha_{i-1,i}^T \\ (i = 1,2, \ldots, n) \end{array}}^{*)} . \tag{11.245}$$

Pentru fiecare valoare a lui i se obține, prin identificarea celor trei componente distincte ale matricelor din ambii membri ai relației

---

* Se face mențiunea că în lucrarea de față, pentru folosirea consecventă a unui mod unitar de notare, indicii atașați diverselor simboluri utilizate au fost scriși în ordine inversă celei adoptate în lucrările autorilor metodei și respectate și în tratatele și cursurile de Teoria mecanismelor și mașinilor.

Scanned with CamScanner

precedente, cîte un sistem de 3 relaţii între parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor circuitului simplu considerat, în general nu toate independente.

Din sistemul de ecuaţii matriceale (11.230) şi (11.245) se vor putea alege totdeauna numărul de ecuaţii de transmisie a mişcării corespunzător cuplei cinematice considerate, număr de asemenea egal cu clasa cuplei.

În afară de faptul că metoda prezentată mai sus permite o tratare generală, unitară, a problemei stabilirii ecuaţiilor de legătură şi de transmisie a mişcării în mecanismele spaţiale cu bare, precum şi în afară de faptul că ea se pretează mai mult decît oricare dintre celelalte metode la introducerea tehnicii moderne de calcul şi în acest capitol al mecanicii, metoda expusă mai prezintă şi avantajul de a permite alegerea, din totalul ecuaţiilor de dependenţă dintre parametrii de poziţie şi cinematici de ordinul întîi, a celor mai simple relaţii ca ecuaţii de legătură şi ca ecuaţii de transmisie a mişcării.

2°. Mecanisme plane cu bare

Mecanismele plane cu bare sînt realizate, în majoritatea covărşitoare a situaţiilor, prin articulaţii şi cuple de translaţie, adică prin cuple plane de clasa a doua.

Considerînd, în cele ce urmează, numai aceste cazuri, formula (11.19) de calcul al numărului gradelor de mobilitate al unui mecanism plan va lua forma particulară

$$\boxed{m_M = 3\,(n_M - 1) - 2(n_{e_{M_{p,2}}} + n_{i_{M_{p,2}}}).} \qquad (11.246)$$

Stabilirea ecuaţiilor de legătură interioară pentru un astfel de mecanism va putea fi făcută urmărindu-se succesiunea elementelor lui în ordinea în care se transmite mişcarea şi scriind ecuaţiile de legătură corespunzătoare fiecărei cuple în parte aşa cum au fost ele stabilite la punctul precedent (2); derivarea în raport cu timpul a ecuaţiilor de legătură va furniza şi sistemul de ecuaţii de transmisie a mişcării în mecanismul considerat.

În unele cazuri, ecuaţiile de transmisie a mişcării pot fi stabilite direct, fără să se cunoască în prealabil ecuaţiile de legătură, folo-

Scanned with CamScanner

sindu-se numeroase metode analitice, grafice sau grafo-analitice, elaborate în cadrul disciplinei de teoria mecanismelor și mașinilor pe baza diverselor teoreme privind distribuția vitezelor în mișcarea plan-paralelă, între ele figurînd și cele două teoreme prezentate în primul volum al lucrării, în cinematica mișcării plan-paralele a rigidului: teorema proiecțiilor vitezelor și teorema coliniarității extremităților vitezelor punctelor unui segment de dreaptă în mișcarea plan paralelă; una din cele mai generale dintre metodele analitice va fi prezentată și în lucrarea de față, ea purtînd numele de *metoda centrelor instantanee de rotație.*

Această metodă se bazează pe observația că dacă se cunoaște poziția, într-un moment oarecare, a centrului instantaneu de rotație, C_{oj}, al unui element (S_j) al mecanismului, (fig. 11.61), precum și

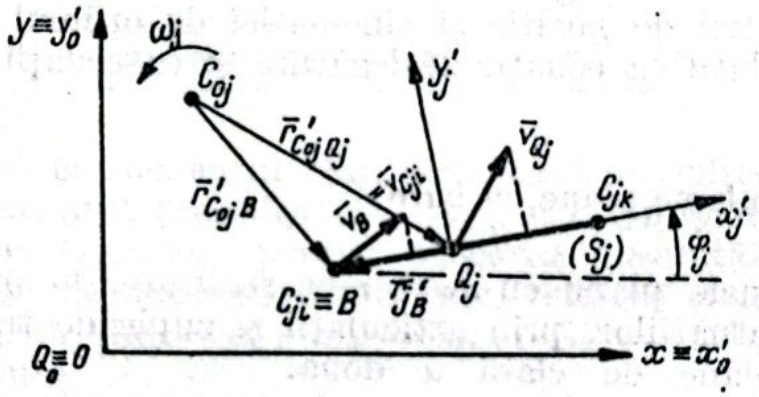


Fig. 11.61

viteza $\bar{v}_B$ a unui punct $B\,(\bar{r}_{j_B})$ al elementului, atunci este posibilă determinarea parametrilor cinematici de ordinul întîi ai acestui element, $\bar{v}_{Q_j}$ și $\bar{\omega}_j$, în baza relațiilor stabilite în cinematica mișcării plan-paralele a rigidului:

$$\bar{v}_B = \bar{\omega}_j \times \bar{r}_{C_{oj}B}\,; \qquad \bar{v}_{Q_j} = \bar{\omega}_j \times \bar{r}'_{C_{oj}Q_j}. \tag{11.247}$$

Urmărind succesiunea elementelor în ordinea în care se transmite mișcarea de la elementul motor, punctul B dintr-un element oarecare (S_j) cu viteza cunoscută va fi totdeauna punctul teoretic de cuplare cu elementul precedent (S_i), punct care, aparținînd și elementului (S_i), în mișcare cu parametrii cinematici $\bar{v}_{Q_i}$ și $\bar{\omega}_i$ deja cunoscuți, va avea viteza

$$\bar{v}_{C_{ji}} = \bar{v}_{C_{ij}} = \bar{v}_{Q_i} + \bar{\omega}_i \times \bar{r}'_{Q_iC_{ij}},$$

determinată; cunoscînd și poziția centrului instantaneu de rotație C_{oj} a elementului (S_j), poziție aflată pe perpendiculara în $C_{ij} \equiv C_{ji}$ la viteza $\bar{v}_{C_{ji}}$, (fig. 11.60), va rezulta relația

$$\bar{v}_{C_{ji}} = \bar{\omega}_j \times \bar{v}_{C_{oj}C_{ji}},$$

de unde se va scoate valoarea modulului vitezei unghiulare instantanee a elementului (S_j):

$$|\bar{\omega}| = \frac{|\bar{v}_{C_{ji}}|}{\overline{C_{oj}C_{ji}}}, \tag{11.248}$$

cu segmentul $\overline{C_{oj}C_{ji}}$ exprimat, pe bază de considerații geometrice, ca o funcție de parametrii de poziție ai elementului (S_j) — cel mai adesea, ca o funcție de unghiul de rotație φ_j. Semnul valorii scalare a vitezei unghiulare $\bar{\omega}_j$ va fi stabilit cu ajutorul sensului rotației elementului (S_j) în jurul punctului C_{oj}, sens indicat de viteza $\bar{v}_{C_{ji}}$.

Odată determinată viteza unghiulară $\bar{\omega}_j$, viteza de translație a elementului respectiv va putea fi calculată cu ajutorul celei de-a doua dintre relațiile (11.247), modulul ei avînd valoarea

$$|\bar{v}_{Q_j}| = |\bar{\omega}_j|\,\overline{C_{oj}Q_j} = \frac{\overline{C_{oj}Q_j}}{\overline{C_{oj}C_{ji}}}|\bar{v}_{Cji}|, \tag{11.249}$$

cu segmentul $\overline{C_{oj}Q_j}$ determinat, de asemenea, în funcție de parametrii de poziție ai elementului (S_j), pe bază de considerații geometrice (fig. 11.62).

Cunoscînd parametrii cinematici $\bar{v}_{Q_j}$ și $\bar{\omega}_j$, se poate trece la determinarea vitezei punctului teoretic de cuplare cu elementul următor, (S_k), $C_{jk} \equiv C_{kj}$, apoi se repetă procedeul de mai sus de determinare a parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementului (S_k) ș.a.m.d.

Condiția esențială pentru aplicarea acestei metode constă în necesitatea cunoașterii, în prealabil, a pozițiilor centrelor instantanee ale elementelor mecanismelor în diverse momente ale mișcării. Uneori, această poziție a centrului instantaneu C_{oj} al unui element (S_j) poate fi determinată prin aceea că, pe lîngă viteza punctului C_{ji},

de cuplare cu elementul precedent, se mai cunoaște, din modul de funcționare a mecanismului, direcția vitezei unui alt punct al elementului (S_j) — de exemplu, a punctului C_{kj}, (fig. 11.62), de cuplare cu un alt element (S_k) al mecanismului —, centrul instantaneu de rotație C_{oj} aflîndu-se în acest caz la intersecția perpendicularelor duse în punctele C_{ji} și C_{jk} pe direcțiile vitezelor celor două puncte; în alte situații, aceste poziții vor putea fi stabilite, la mecanismele cu bare articulate, pe baza unei teoreme ce va fi demonstrată în continuare, purtînd numele de *teorema coliniarității centrelor instantanee de rotație.*

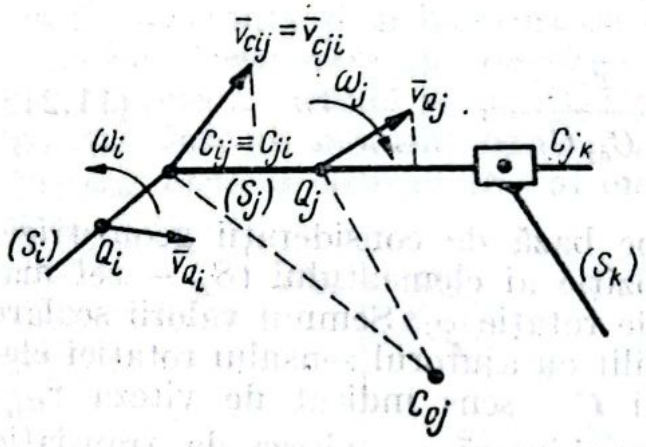


Fig. 11.62

În legătură cu denumirea teoremei, trebuie făcută mai întîi precizarea că în categoria centrelor instantanee de rotație au fost trecute toate cele trei tipuri de centre de rotație care pot fi întîlnite la mecanismele plane cu bare articulate și anume:

— *centrele fixe de rotație*, reprezentate prin punctele teoretice de articulație cu batiul a elementelor mecanismului și care vor fi notate cu indicii de ordine ai celor două elemente cuplate, batiului revenindu-i, ca de obicei, indicele zero (de exemplu, C_{io} va reprezenta centrul de rotație al elementului (S_i) în raport cu batiul);

— *centre permanente mobile de rotație*, reprezentate prin punctele teoretice de articulație dintre două elemente ale mecanismului și notate cu indicii de ordine corespunzători celor două elemente (de exemplu, C_{ij} va reprezenta centrul permanent de rotație relativă a elementului (S_j) în raport cu elementul (S_i)).

— *centre instantanee propriu zise*, reprezentate prin centrele instantanee ale mișcărilor plan-paralele ale elementelor mecanismului, fie absolute, față de batiu, fie relative, față de alte elemente ale mecanismului; și aceste din urmă centre vor fi notate tot cu indicii de ordine ai elementelor față de care se consideră mișcările relative. (de exemplu, C_{ij} va reprezenta centrul instantaneu de rotație al mișcării plan-paralele relative a elementului (S_i) în raport cu elementul (S_j), iar C_{oi} va reprezenta centrul instantaneu de rotație al mișcării absolute, față de batiu, a elementului (S_i).

Considerînd în continuare, două figuri plane, (S_i) și (S_j), în mișcare plan-paralelă în planul Oxy (fig. 11.63), cu vitezele unghiulare

$$\bar{\omega}_i = \omega_i \bar{k}'_i = \omega_i \bar{k}\,; \qquad \bar{\omega}_j = \omega_j \bar{k}' = \omega_j \bar{k},$$

se reamintește că, în concordanță cu precizările făcute în cinematica mișcării plan-paralele a rigidului, aceste două mișcări plan-paralele vor putea fi reduse la două rotații efectuate în jurul centrelor instantanee de rotație propriu zise C_{oi} și C_{oj}, cu aceleași viteze unghiulare $\bar{\omega}_i$, respectiv $\bar{\omega}_j$, acestea fiind, după cum se știe, independente de pol.

Pentru un observator invariabil legat de reperul $Q_i x'_i y'_j$, atașat figurii (S_i), elementul (S_j) va executa o mișcare de rotație instantanee relativă, efectuată cu viteza unghiulară relativă

$$\bar{\omega}_{j_r} = \bar{\omega}^i = \bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i = \bar{\omega}_j + (-\bar{\omega}_i) \tag{11.250}$$

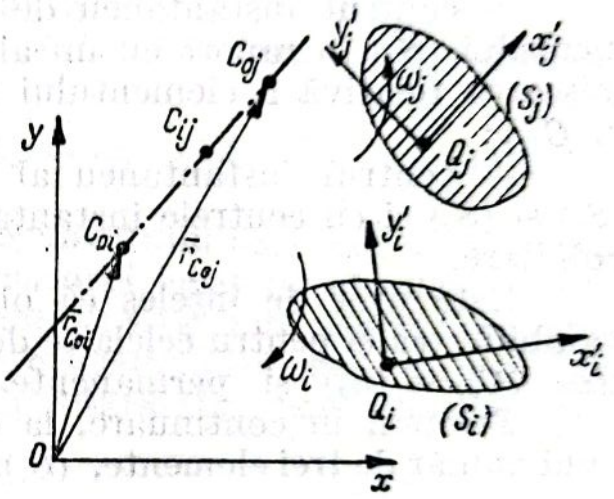


Fig. 11.63

$\bar{\omega}_i$ jucînd rol de viteză unghiulară de transport.

Centrul instantaneu propriu zis al acestei rotații instantanee relative va fi centrul C_{ij} al vectorilor paraleli $\bar{\omega}_j$ și $(-\bar{\omega}_i)$, centru aflat, după cum se știe, pe dreapta $C_{oi}C_{oj}$ ce unește punctele de aplicație ale vectorilor paraleli și cu vectorul de poziție determinat în raport cu polul fix prin relația

$$\bar{r}_{C_{ij}} = \frac{\bar{\omega}_j \bar{r}_{C_{oj}} - \omega_i \bar{r}_{C_{oj}}}{\omega_j - \omega_i}\,. \tag{11.251}$$

Dacă s-ar considera acum mișcarea relativă a elementului (S_i) în raport cu elementul (S_j), rotația instantanee s-ar efectua cu viteza unghiulară

$$\bar{\omega}'_i = \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j = \bar{\omega}_i + (-\bar{\omega}_j) \tag{11.252}$$

în jurul centrului C_{ji} al vectorilor paraleli $\bar{\omega}_i$ și $(-\bar{\omega}_j)$, centru situat tot pe dreapta $C_{oi}C_{oj}$ și determinat în raport cu polul 0 prin vectorul de poziție

$$\bar{r}_{C_{ji}} = \frac{\omega_i \bar{r}_{C_{oi}} - \omega_j \bar{r}_{C_{oj}}}{\omega_i - \omega_j} = \frac{\omega_j \bar{r}_{C_{oj}} - \omega_i \bar{r}_{C_{oi}}}{\omega_j - \omega_i} = \bar{r}_{C_{ij}}. \tag{11.253}$$

Ultima relație permite să se facă următoarele două observații:

— centrul instantaneu de rotație în mișcarea relativă a elementului (S_i) în raport cu un alt element (S_j) este același ca și în mișcarea relativă a elementului (S_j) față de elementul (S_i), $(C_{ij} \equiv C_{ji})$;

— centrul instantaneu al mișcărilor relative ale elementelor (S_i) și (S_j) și cu centrele instantanee ale mișcărilor lor absolute sînt coliniare.

Este ușor de înțeles că observațiile precedente își păstrează valabilitatea și pentru celelalte două categorii de centre instantanee: fixe $(C_{oi} \equiv C_{io})$ și permanente mobile $(C_{ij} \equiv C_{ji})$.

Trecînd, în continuare, la examinarea mișcărilor relative ale unui număr de trei elemente, (S_i), (S_j) și (S_k), ale unui sistem mecanic format din bare articulate, aflate în mișcare plan-paralelă în planul director fix Oxy, (fig. 11.64) și considerînd și acum un observator invariabil legat de reperul $Q_i x_i' y_i'$ atașat elementului (S_i), pentru acest observator mișcarea relativă a elementului (S_j) va fi o rotație instantanee în jurul centrului instantaneu de rotație relativă C_{ij}, efectuată cu viteza unghiulară

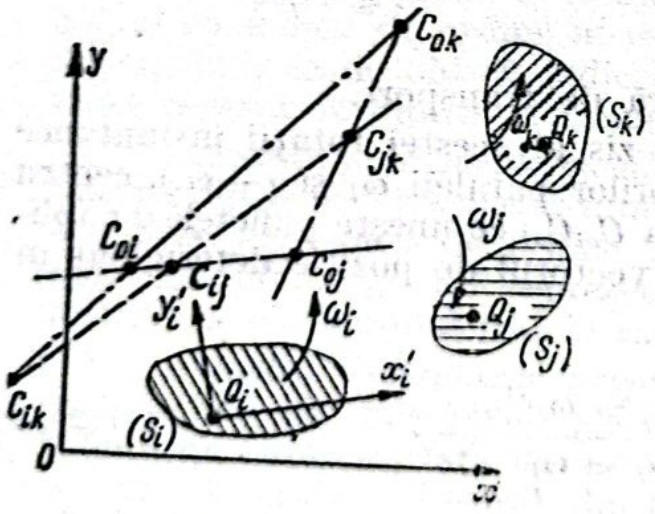


Fig. 11.64

$$\bar{\omega}_j^i = \bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i, \tag{11.254}$$

iar mișcarea relativă a elementului (S_k) va fi o rotație instantanee efectuată în jurul centrului instantaneu de rotație C_{jk}, cu viteza unghiulară relativă

$$\bar{\omega}_k^i = \bar{\omega}_k - \bar{\omega}_i \tag{11.255}$$

Tot pentru acest observator, mișcarea relativă a elementului (S_k) în raport cu elementul (S_j) va fi o rotație instantanee relativă, efectuată cu viteza unghiulară relativă

$$\bar{\omega}^j_{k_{(i)}} = \bar{\omega}^i_k - \bar{\omega}^i_j = \bar{\omega}^i_k + (-\bar{\omega}^i_j) \tag{11.256}$$

în jurul unui centru instantaneu de rotație $C_{jk_{(i)}}$ — indicele inferior (i) precizează că mișcările relative sînt raportate la elementul (S_i) — acest centru, reprezentînd și aici centrul vectorilor paraleli $\bar{\omega}^i_k$ și $(-\bar{\omega}^i_j)$, trebuind să se afle pe dreapta $C_{ij}C_{ik}$.

Observînd că în baza relațiilor (11.254) și (11.255) egalitatea (11.256) ia forma

$$\bar{\omega}^j_{k_{(i)}} = \bar{\omega}^i_k - \bar{\omega}^i_j = \bar{\omega}_k - \bar{\omega}_j = \bar{\omega}^j_k, \tag{11.257}$$

adică rotația instantanee relativă a elementului (S_k) față de elementul (S_j) este aceeași și pentru observatorul legat de elementul (S_i) și pentru observatorul legat de elementul (S_j) și, mai general, pentru observatorul legat de oricare dintre celelalte elemente, rezultă că poziția centrului instantaneu relativ de rotație $C_{jk_{(i)}}$ este independentă de poziția observatorului $(C_{jk_{(i)}} \equiv C_{jk})$.

Se poate enunța deci următoarea teoremă:

„Centrele instantanee ale rotațiilor relative ale unui număr de două elemente oarecare ale unui lanț cinematic plan, în raport cu al treilea element și cu centrul rotațiilor relative ale primelor două elemente considerate sînt coliniare".

Remarcînd că numărul de trei al centrelor instantanee relative ale celor trei elemente considerate rezultă din posibilitățile de combinare, fără repetiție, $(C_{ij} = C_{ji})$, a numerelor de ordine i, j și k ale elementelor respective $(3 = C^2_3)$, se poate trage concluzia că numărul total de centre instantanee relative corespunzătoare unui mecanism cu n elemente mobile și un element fix, va fi dat de relația

$$\boxed{N_C = C^2_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}.} \tag{11.258}$$

Este recomandabil, pentru determinarea sistematică a pozițiilor, la un moment dat, ale tuturor acestor centre corespunzătoare

unui mecanism determinat, să se respecte următoarele etape de lucru :

— determinarea, pe baza formulei (11.258), a numărului total de centre instantanee de rotație corespunzătoare mecanismului dat ;

— numerotarea centrelor cunoscute — fixe și permanente mobile — conform convenției adoptate în expunerea precedentă ;

— determinarea, în funcție de datele cunoscute, a centrelor instantanee relative propriu zise, alegîndu-se astfel ordinea de determinare încît pentru fiecare din centrele necunoscute C_{jk} ($j, k = 0,1,2, \ldots, n$; $j \neq k$), să existe, în tabelul centrelor cunoscute, două serii de cîte două centre de forma

$$C_{jk} \begin{Bmatrix} C_{jh} ; & C_{jl} \\ C_{kh} ; & C_{kl} \end{Bmatrix}, \tag{11.259}$$

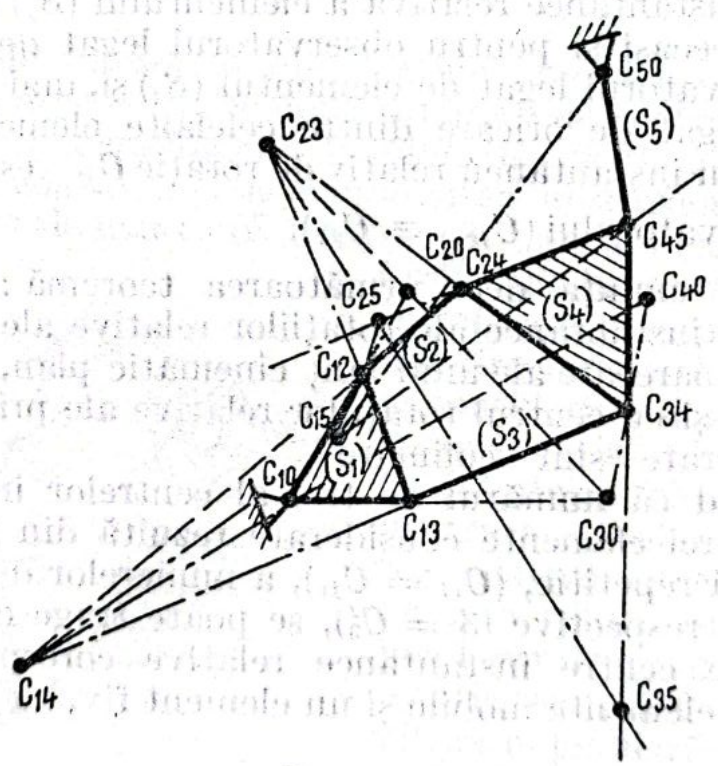


Fig. 11.65

h și k fiind numerele de ordine ale altor două elemente, (S_h) și (S_k), ale mecanismului ; în această situație, centrul C_{jk} se va găsi la intersecția dreptelor $C_{jh}C_{kh}$ și $C_{jl}\ C_{kl}$.

Pentru ilustrarea modului de aplicare a acestor recomandări se va considera mecanismul din fig. 11.65, format din 5 elemente mobile și unul fix ($n = 5$).

Scanned with CamScanner

Numărul total al centrelor instantanee de rotație, determinat cu ajutorul formulei (11.258), este de

$$N_C = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15,$$

cu următoarea distribuție :

— centrele fixe de rotație sînt în număr de 2, C_{10} și C_{50} ;

— centrele permanente mobile de rotație sînt în număr de 5 C_{12}, C_{13}, C_{24}, C_{34} și C_{45} ;

— centrele instantanee relative propriu zise de rotație, necunoscute, sînt în număr de 8, C_{14}, C_{15}, C_{20}, C_{23}, C_{25}, C_{30}, C_{35} și C_{40}.

Se observă că pentru centrul C_{14} se cunosc seriile de centre

$$C_{14}\left\{\begin{matrix} C_{12}\,;\ C_{13} \\ C_{42}\,;\ C_{43} \end{matrix}\right\}$$

și deci acest centru se va găsi la intersecția dreptelor $C_{12}\,C_{42}$ și $C_{13}C_{43}$.

Se poate trece acum la centrul C_{15}, pentru care se cunosc seriile de centre

$$C_{15}\left\{\begin{matrix} C_{14}\,;\ C_{10} \\ C_{54}\,;\ C_{50} \end{matrix}\right\},$$

rezultînd deci că acest centru se va găsi la intersecția dreptelor $C_{14}C_{45}$ și $C_{10}C_{50}$.

Urmărind succesiunea, menționată mai sus, a centrelor necunoscute și procedînd ca și mai înainte, rezultă concluziile :

— centrul C_{20} încă nu poate fi determinat ;

— centrul C_{23} se va afla la intersecția dreptelor $C_{12}C_{13}$ și $C_{24}C_{34}$;

— centrul C_{25} se va găsi la intersecția dreptelor $C_{24}C_{54}$ și $C_{21}C_{51}$;

— centrul C_{30} încă nu poate fi determinat ;

— centrul C_{35} se va găsi la intersecția dreptelor $C_{34}C_{54}$ și $C_{32}C_{52}$;

— centrul C_{40} se va găsi la intersecția dreptelor $C_{45}C_{05}$ și $C_{41}C_{01}$;

— centrul C_{30}, la care se revine acum, se va găsi la intersecția dreptelor $C_{31}C_{01}$ și $C_{34}C_{04}$;

— centrul C_{20}, ultimul necunoscut, se va găsi la intersecția dreptelor $C_{12}C_{10}$ și $C_{23}C_{03}$.

Scanned with CamScanner

Metoda centrelor instantanee de rotație are dezavantajul că în unele situații centrele instantanee de rotație ies în afara schiței cinematice, fapt care îngreunează determinarea distanțelor diverselor puncte la aceste centre.

§ 12. Problemele fundamentale ale cinematicii sistemelor de rigide

Examinînd cu atenție modul de funcționare a unui sistem mecanic, se poate constata cu ușurință că în timp ce parametrii de poziție — rămași variabili în timp și independenți între ei în urma aplicării legăturilor pasive exterioare — ai unora dintre elementele sistemului pot lua valori arbitrare, uneori comandate din exterior, valorile parametrilor de poziție ai tuturor celorlalte elemente ale sistemului sînt condiționate, ca urmare a legăturilor — atît exterioare, cît și interioare — aplicate acestor elemente, de variațiile celor din prima categorie menționată mai sus.

Pentru a ilustra printr-un exemplu concret această dependență, se va examina sistemul mecanic reprezentat în fig. 12.1, în care elementul motor, constituit din rotorul motorului electric (Mt), axul (Ax) și roata dințată (R_I), acționează, prin intermediul cuplajului de roți cilindrice dințate (R_I) și (R_{II}), două subansambluri distincte ale sistemului :

— pe de o parte, prin arborele (Ar_2), rigid, subansamblul format din manivela (Mv), biela (Bl), bucșa oscilantă (Bo), discul (Dc) și contragreutatea (Cg), legătura dintre disc și bucșă fiind realizată numai prin arcul spiral (As), iar cea dintre contragreutate și disc numai prin arcul elicoidal (Ae_1); în acest subansamblu, manivela (Mv) se rotește în jurul axei fixe (Δ_2), bucșa oscilantă (Bo) și cu discul (Dc) se rotesc în jurul axei fixe (Δ_4) — axele (Δ_2) și (Δ_4) fiind, paralele la axa (Δ_1) a rotorului —, iar contragreutatea (Cg) execută datorită ghidajelor (Gd), numai o translație rectilinie pe verticală;

— pe de altă parte, prin excentricul (Ex), solidar cu roata dințată (R_{II}), este acționat subansamblul format din pîrghia (Pg) și șaiba (Sb), legate între ele prin cablul (Cb), care are o extremitate înfășurată pe șaibă și cealaltă extremitate legată la brațul O_2B al pîrghiei; pîrghia, al cărei contact permanent cu excentricul (Ex) este asigurat prin arcul elicoidal (Ae_2), se rotește în jurul axei fixe(Δ_2),

Scanned with CamScanner

paralelă și ea la axa (Δ_1), iar șaiba (Sb) se rotește în jurul axei (Δ_4) a discului, cu care este legată prin tija elastică de torsiune (T_{it}), sub acțiunea contragreutății (Cg_2) și a cablului (Cb).

Analizînd modul de transmitere a mișcării în fiecare subansamblu, se va observa că în timp ce mișcarea de rotație în jurul axei

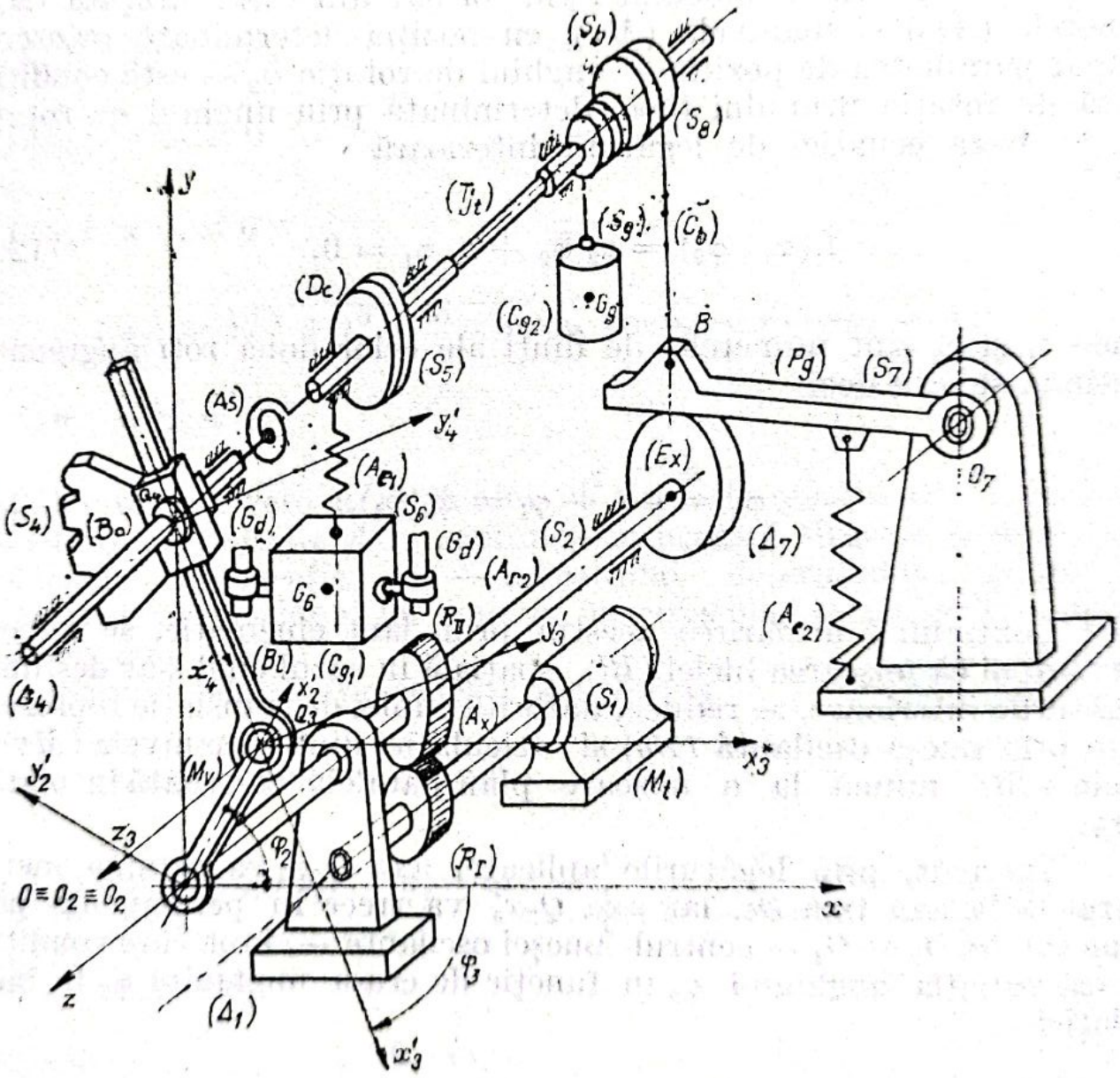


Fig. 12.1

fixe (Δ_1) a blocului rotor-ax-roată dințată ($\mathscr{R}_I$) este arbitrară, putînd fi variată oricum — prin modificarea, de exemplu, la unele tipuri de motoare electrice, a tensiunii de alimentare —, mișcările

tuturor celorlalte elemente ale primului subansamblu, cu excepția celei a discului (Dc) și a contragreutății (Cg), sînt condiționate de rotația rotorului.

Într-adevăr, alegînd reperul fix $Oxyz$, la care va fi raportată mișcarea sistemului mecanic considerat, precum și reperele invariabil legate de duversele elemente ale sistemului ca în fig. 12.1, rotația în jurul axei fixe (Δ_2) a blocului rigid format din roata dințată ($\mathcal{R}_{II}$), arborele (Ar_2) și manivela (Mv), cu poziția determinată printr-un singur parametru de poziție — unghiul de rotație φ_2 — este condiționată de rotația primului bloc, determinată prin unghiul de rotație φ_1, în baza ecuației de legătură interioară

$$f_1(\varphi_1\,;\,\varphi_2) = z_2\,\varphi_2 + z_1\,\varphi_1 = 0, \tag{12.1}$$

unde z_1 și z_2 sînt numerele de dinți ale celor două roți angrenate, putindu-se scrie deci

$$\varphi_2 = -\frac{z_1}{z_2}\,\varphi_1 = \varphi_2(\varphi_1). \tag{12.2}$$

Continuînd urmărirea acestui prim lanț cinematic, se va observa apoi că mișcarea bielei (Bl), spațială în cazul cînd s-ar desființa legăturile interioare, se reduce, datorită cuplei de translație reprezentate prin bucșa oscilantă (Bo) și articulației dintre manivela (Mv) și biela (Bl), numai la o mișcare plan-paralelă efectuată în planul Oxy.

Întrucît, prin legăturile aplicate, axa Q_3z_3' va rămîne mereu paralelă la axa fixă Oz, iar axa Q_3x_3' va trece în permanență prin punctul fix $O_3 \equiv Q_4$ — centrul bucșei oscilante —, fapt care condiționează variația unghiului φ_3 în funcție de cea a unghiului φ_2 în baza relației

$$\frac{\sqrt{h^2 + r^2 - 2rh\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right)}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right)} = \frac{r}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_3\right)},$$

evidentă din fig. 12.1 (a se examina triunghiul $Q_2Q_3Q_4$, cu $\overline{Q_2Q_4} = h$ și $\overline{Q_2Q_3} = r$), rezultă următoarele ecuații de legătură între parametrii de poziție a bielei și cei ai manivelei:

$$\begin{cases} f_2(x_{Q_3}; \varphi_2) = x_{Q_3} - r\cos\varphi_2 = 0; \\ f_3(y_{Q_3}; \varphi_2) = y_{Q_3} - r\sin\varphi_2 = 0; \\ f_4(z_{Q_3}) = z_{Q_3} \equiv 0 \quad ; \\ f_5(\psi_3) = \psi_3 \equiv 0 \quad ; \\ f_6(\varphi_3; \varphi_2) = \sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\sin\varphi_2}\,\cos\varphi_3 - r\cos\varphi_2 = 0; \\ f_7(\theta_3) = \theta_3 \equiv \sigma. \end{cases} \tag{12.3}$$

(Identitatea cu zero a unghiului de precesie rezultă din faptul că planele $Q_3x_3^*y_3^*$ și $Q_3x_3'y_3'$ se confundă în această situație și deci linia nodurilor — intersecția lor — nemaifiind determinată, poate fi luată arbitrar în planul lor comun, în particular astfel încît să coincidă cu axa $Q_3x_3^*$).

Scriind relațiile precedente sub forma

$$\begin{cases} x_{Q_3} = r\cos\varphi_2 = x_{Q_3}(\varphi_2); \quad \psi_3 \equiv 0; \\ y_{Q_3} = r\sin\varphi_2 = y_{Q_3}(\varphi_2); \quad \varphi_3 = \arccos\left[\dfrac{r\cos\varphi_2}{\sqrt{h^2 + r^2 - 2hr\sin\varphi_2}}\right] = \\ \qquad\qquad = \varphi_3(\varphi_2); \\ z_{Q_3} \equiv 0 \quad ; \quad \theta_3 \equiv 0, \end{cases} \tag{12.4}$$

rezultă că mișcarea bielei (Bl) este total condiționată de cea a manivelei și deci, indirect, de rotația rotorului motorului.

Datorită legăturii prin cupla de translație cu biela (Bl), rotația bucșei oscilante (Bo) în jurul axei fixe (Δ_4), —, singura mișcare per-

Scanned with CamScanner

misă de legăturile exterioare — este identică cu cea a bielei, rezultînd astfel următoarea ecuație de legătură între bucșă și bielă:

$$f_8(\varphi_4\,;\,\varphi_3) = \varphi_4 - \varphi_3 = 0, \tag{12.5}$$

care arată că și variația parametrului de poziție, φ_4, al bucșei este condiționată, în ultimă instanță, tot de rotația rotorului.

Trecînd la examinarea celui de-al doilea subansamblu, se va remarca că și rotația pîrghiei (Pg) în jurul axei fixe (Δ_7), determinată prin unghiul de rotație φ_7, este condiționată, datorită rezemării continue pe excentricul (Ex), de rotația blocului format din roata dințată ($\mathcal{R}_{II}$), arborele (Ar_2) și manivela (Mv) și deci, indirect, de rotația rotorului, în baza ecuației de legătură

$$f_9(\varphi_7\,;\,\varphi_2) = \psi(\varphi_7\,;\,\varphi_2) = 0, \tag{12.6}$$

cu funcția $\psi(\varphi_7, \varphi_2)$ depinzînd, evident, de profilul excentricului; din ultima relație va rezulta dependența parametrului de poziție φ_7 de unghiul de rotație φ_2 și deci, indirect, de unghiul de rotație φ_1 al rotorului motorului.

De asemenea, rotația șaibei (Sb) în jurul axei fixe (Δ_4), determinată numai prin unghiul de rotație φ_8, este condiționată, ca urmare a acțiunii contragreutății (Cg_2), de rotația pîrghiei (Pg) ca urmare a legăturii interioare realizată prin cablul (Cb), ecuația de legătură corespunzătoare avînd, în ipoteza simplificatoare a menținerii practic fixă a direcției cablului, forma

$$f_{10}(\varphi_8\,;\,\varphi_7) = R\,\varphi_8 + L\varphi_7 = 0, \tag{12.7}$$

unde R este raza șaibei, iar L lungimea brațului O_7B al pîrghiei (Pg); ultima relație arată dependența, prin intermediul unghiului de rotație φ_7, și a variației parametrului de poziție φ_3 de rotația arbitrară a rotorului motorului.

În fine, mișcarea contragreutății (Cg_2), considerată, prin neglijarea micilor deviații, o translație rectilinie pe verticală, determinată prin parametrul de poziție y_{G_9}, va fi condiționată de rotația șaibei (Sb) în baza ecuației de legătură

$$f_{11}(y_{G_9}\,;\,\varphi_8) = y_{G_9} - y^0_{G_9} + r\varphi_8 = 0, \tag{12.8}$$

Scanned with CamScanner

unde $y^0_{G_9}$ este ordonată centrului de greutate G_9 corespunzătoare poziției inițiale a acestuia, iar r este raza tamburului (Tb), solidar cu șaiba (Sb) pe care este înfășurat cablul de care atîrnă contragreutatea (Cg_2).

Relația (12.8), scrisă încă sub forma

$$y_{G_9} = y^0_{G_9} - r\,\varphi_8, \tag{12.9}$$

arată că prin intermediul unghiului de rotație φ_8, parametrul de poziție y_{G_9} este și el condiționat de rotația rotorului.

Examinînd acum și mișcarea discului (Dc), se va observa că datorită legăturilor lui cu restul sistemului realizate numai prin elemente elastice — arcul spiral (As) și tija elastică de torsiune (T_{jt}) —, care nu introduc — evident, între anumite limite — restricții mișcării de rotație permisă de legăturile exterioare, această mișcare, determinată prin variația parametrului de poziție φ_5, va fi doar influențată — fără a i se condiționa existența — de deplasările pe care le au extremitățile legate cu restul sistemului ale celor două elemente elastice de legătură, momentele cuplurilor exercitate de ele depinzînd, după cum se știe, și de modul de mișcare a acestor extremități.

De asemenea, nici legătura elastică realizată prin arcul elicoidal (Ae_1) nu condiționează direct existența translației rectilinie pe verticală a contragreutății (Cg_1) — permisă de legăturile exterioare prin ghidaje aplicate acesteia — de rotația rotorului, (translația contragreutății poate exista și în condițiile de repaus al rotorului), deși forma concretă a ecuației finite a translației acestui element va fi influențată de modul de mișcare a extremității arcului legată de disc, deci în ultimă instanță, de modul de mișcare a rotorului.

Pentru a înțelege și mai bine această deosebire între caracterul independent al mișcărilor rotorului, discului și contra — greutății și caracterul dependent al mișcărilor tuturor celorlalte elemente ale sistemului mecanic se vor mai face următoarele observații:

— oprirea bruscă a mișcării elementului motor va avea drept consecință oprirea, practic simultană, a mișcărilor tuturor elementelor sistemului mecanic, cu excepția celor de rotație a discului și de translație a contragreutății (Cg_1), care vor putea continua și în condițiile stării de repaus a rotorului;

— oprirea forțată a mișcărilor discului și contragreutății (Cg_1) deși va influența mișcarea ulterioară a sistemului mecanic, în sensul

Scanned with CamScanner

că se vor modifica ecuațiile finite ale mișcărilor elementelor lui, nu va împiedica totuși ca aceste mișcări să se producă în continuare.

Constatările și observațiile precedente evidențiază faptul că dintre diversele blocuri rigide din care este alcătuit sistemul mecanic reprezentat în fig. 12.1, numai trei din ele și anume:

— blocul format din rotorul motorului, axul (Ax) și roata dințată ($\mathscr{R}_1$);

— discul (Dc) în rotație în jurul axei fixe (Δ_4);

— contragreutatea (Cg_1), în translație rectilinie pe verticală, au mișcări arbitrare, mișcările tuturor celorlalte elemente ale sistemului mecanic fiind condiționate, în ultimă instanță, de rotația rotorului motorului.

Se poate trage de aici concluzia că mișcarea unui asemenea sistem mecanic va putea fi studiată cu ajutorul mișcărilor elementelor cu parametrii de poziție arbitrari, sau *independenți* cum mai sînt ei numiți, folosind, pentru determinarea mișcărilor celorlalte elemente ale sistemului ecuațiile de legătură interioară, respectiv ecuațiile de transmisie a mișcărilor: primele ecuații vor permite să se exprime parametrii de poziție dependenți în funcție de cei independenți, iar ultimele vor oferi posibilitatea exprimării parametrilor cinematici de ordinul întîi — și apoi, prin derivare în raport cu timpul, și a celor de ordinul doi — ai elementelor cu poziții dependente în funcție de parametrii de poziție și cinematici ai elementelor cu mișcări independente.

În modul acesta se conturează distinct următoarele două probleme fundamentale ale cinematicii sistemelor mecanice:

1°. Stabilirea numărului total de parametri de poziție independenți ai unui sistem mecanic determinat.

2°. Exprimarea parametrilor de poziție și a celor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic în funcție de parametrii de poziție, respectiv în funcție de parametrii de poziție și de cei cinematici de ordinul întîi, ai elementelor cu mișcări independente.

Modul de rezolvare a acestor două probleme fundamentale ale cinematicii sistemelor mecanice va fi prezentat în continuare.

12.1. *Stabilirea numărului de parametri de poziție independenți ai sistemului mecanic*

Prezentarea acestei prime probleme fundamentale a cinematicii sistemelor mecanice va trebui precedată de unele precizări în legă-

tură cu noțiunea de „parametri de poziție independenți", noțiune căreia i se vor da, în cele ce urmează, două sensuri distincte, după cum se va referi la un element oarecare al sistemului mecanic sau la întregul sistem mecanic.

12.1.1. Parametrii de poziție independenți ai elementelor unui sistem mecanic

Prin noțiunea de *parametri de poziție independenți ai unui element oarecare* (S_i) al sistemului mecanic se înțeleg parametrii de poziție ai acelui element care rămîn independenți între ei în urma aplicării numai a legăturilor pasive exterioare, adică acei dintre parametrii de poziție ai elementului respectiv care pot lua valori arbitrare după desființarea tuturor legăturilor interioare care îi sînt aplicate lui (nu și a legăturilor exterioare).

Considerînd mai întîi cazul unui sistem mecanic spațial, un element (S_i) al sistemului, care, în absența oricărei legături pasive, va avea poziția determinată printr-un număr de $p_{v_i} = 6$ parametri de poziție, reprezentați prin mărimile x_{Q_i}, y_{Q_i}, z_{Q_i}, ψ_i, φ_i și θ_i, va putea fi supus la un număr de $n^i_{e_{s,k}}$ cuple spațiale de clasa k, ($k = 1,2,\ldots,5$), care vor introduce între parametrii de poziție menționați mai sus un număr de

$$l_{ext_i} = \sum_{i=1}^{5} k\, n^i_{e_{s,k}} \tag{12.10}$$

ecuații de legătură exterioară.

Diferența

$$p_i = p_{v_i} - l_{ext_i} = 6 - \sum_{k=1}^{5} k\, n^i_{e_{s,k}} \leqslant 6, \tag{12.11}$$

reprezentînd numărul de parametri de poziție ai elementului, care vor putea lua valori arbitrare după aplicarea legăturilor exterioare respective, se va numi *numărul de parametri de poziție independenți ai elementului* considerat, semnul egalității în relația (12.11) corespunzînd cazului cînd rigidului (S_i) nu-i sînt impuse decît legături interioare.

Scanned with CamScanner

În cazul cînd elementul (S_i) luat în considerație este asimilat cu un punct material, atunci poziția lui în spațiu va fi determinată numai prin $p_{v_i} = 3$ parametri de poziție, aceștia fiind reprezentați prin coordonatele lui carteziene x_i, y_i, z_i, iar cuplele cinematice care îi vor putea fi aplicate în această situație vor fi numai cele de clasa întîi și clasa a doua; în aceste cazuri deci relația (12.11) va lua forma

$$p_i = 3 - \sum_{k=1}^{2} k\, n^i_{e_{s,k}}. \tag{12.12}$$

Considerînd acum un sistem mecanic spațial format din n elemente (S_i), cu un număr $n_p < n$ dintre ele asimilabile cu puncte materiale, *numărul total de parametri de poziție arbitrari ai elementelor sistemului* va fi dat de suma

$$N = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p_{v_i} - \sum_{i=1}^{n} l_{ext_i} = \sum_{i=1}^{n} p_{v_i} - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{5} k\, n^i_{e_{s,k}} \right),$$

sau încă, observînd că pot fi scrise egalitățile

$$\sum_{i=1}^{n} p_{v_i} = 6(n - n_p) + 3n_p = 3(2n - n_p)$$

și

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{5} k\, n^i_{e_{s,k}} \right) = \sum_{k=1}^{5} \left(\sum_{i=1}^{n} k\, n^i_{e_{s,k}} \right) = \sum_{k=1}^{5} k \left(\sum_{i=1}^{n} n^i_{e_{s,k}} \right) = \sum_{k=1}^{5} k\, n_{e_{s,k}},$$

unde $n_{e_{s,k}}$ este numărul total de cuple cinematice exterioare spațiale de clasa k aplicate întregului sistem mecanic, mai rezultă

$$\boxed{N = 3(2n - n_p) - \sum_{k=1}^{5} k\, n_{e_{s,k}}}. \tag{12.13}$$

Acești N parametri de poziție ai sistemului mecanic vor putea lua deci, toți, valori arbitrare atunci cînd toate legăturile pasive interioare ale sistemului sînt desființate.

Pentru sistemele mecanice plane, ($p_{v_i} = 3$ în cazul elementelor considerate rigide ca atare și $p_{v_i} = 2$ în cazul elementelor asimilabile cu puncte materiale), relațiile (12.11), (12.12) și (12.13) vor lua formele

$$p_i = 3 - \sum_{k=1}^{2} k\, n^i_{e_{p,k}}, \tag{12.14}$$

respectiv

$$p_i = 2 - n^i_{e_{p,1}} \tag{12.15}$$

—punctelor materiale putîndu-li-se aplica în această situație numai cuple de clasa întîi —, și

$$\boxed{N = 3n - n_p - \sum_{k=1}^{2} k\, n_{e_{p,k}}}, \tag{12.16}$$

unde $n_{e_{p,k}} = \sum_{i=1}^{n} n^i_{e_{p,k}}$ va reprezenta acum numărul total de cuple cinematice exterioare plane de clasa k aplicate întregului sistem mecanic.

În legătură cu modul de determinare a numărului de parametri de poziție arbitrari ai elementelor unui sistem mecanic, mai trebuie făcută mențiunea că la stabilirea acestui număr este necesar să se țină seama și de caracterul particular pe care îl poate avea mișcarea unui element chiar în absența unor legături exterioare. De exemplu, în cazul elementului (S_9), reprezentat prin contragreutatea (Cg_2) din sistemul mecanic examinat mai înainte, (fig. 12.1), supus numai la legătura interioară prin cablu cu tamburul (Tb), au fost neglijate deviațiile de la mișcarea de translație rectilinie pe verticală și deci, cu toate că elementului respectiv nu-i este aplicată nici o legătură exterioară, parametrii lui de poziție se reduc totuși la unul singur, ($p_{v_i} = 1$), acesta fiind reprezentat — prin alegerea axei Oz după direcția vericalei—prin ordonata y_{G_9}.

Mult mai comod, pentru aplicațiile practice curente, este însă de a se determina numerele p_i de parametri de poziție independenți ai elementelor unui sistem mecanic pe baza mișcărilor particulare pe care le-ar executa elementele în ipoteza că s-ar desființa toate legăturile interioare aplicate lor, ținîndu-se seama de tabelul de mai jos întocmit pentru mișcările particulare uzuale, întîlnite curent în aplicațiile tehnice; parametrii de poziție independenți sînt notați în ipoteza că se respectă modul de alegere a sistemelor de referință atașate elementelor folosit în cinematica și dinamica rigidului.

Pentru a ilustra, prin cîte un exemplu concret, modul de stabilire a numărului total de parametri de poziție arbitrari ai elementelor sistemelor mecanice spațiale și plane, se va considera din nou sistemul mecanic reprezentat în fig. 12.1, făcîndu-se următoarele constatări:

— pentru elementul (S_1), reprezentat prin blocul format din rotorul motorului, axul (Ax) și roata dințată ($\mathcal{R}_I$), aflat în rotație în jurul axei (Δ_1), rezultă

$$p_1 = 1,$$

parametrul de poziție fiind unghiul de rotație φ_1;

— pentru elementul (S_2), reprezentat prin blocul format din roata dințată ($\mathcal{R}_{II}$), excentricul (Ex), arborele (Ar_2) și manivela (Mv), aflat în rotație în jurul axei fixe (Δ_2), rezultă

$$p_2 = 1,$$

parametrul de poziție fiind unghiul de rotație φ_2;

— pentru elementul (S_3), reprezentat prin biela (Bl), avînd, în cazul cînd se desființează legăturile interioare, mișcarea spațială liberă, rezultă

$$p_3 = 6,$$

parametrii de poziție fiind mărimile x_{Q_3}, y_{Q_3}, z_{Q_3}, ψ_3, φ_3 și θ_3;

— pentru elementul (S_4), reprezentat prin bucșa oscilantă (Bo) solidară cu axul (Ax_4), în rotație în jurul axei fixe (Δ_4), rezultă

$$p_4 = 1,$$

Scanned with CamScanner

Tabelul 12.1

Parametrii de poziție independenți ai elementelor unui sistem mecanic cu mișcări particulare

Nr. crt.	Mișcarea particulară executată de elementul (S_i)	În spațiu		În plan	
		Nr. param. indep. p_i	Parametrii independ.	Nr. par indep. p_i	Parametrii independenți
0	1	2	3	4	5
1	Translația liberă	$p_i = 3$	$x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}$	$p_i = 2$	x_{G_i}, y_{G_i}
2	Translația cu un reazem	$p_i = 2$	2 dintre cu-ordonatele $x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i}$	$p_i = 1$	una dintre coordonatele x_{G_i}, y_{G_i}
3	Translația rectilinie	$p_i = 1$	una dintre coordonatele $x_{G_i}\ y_{G_i}\ z_{G_i}$	$p_i = 1$	una dintre coord. x_{G_i}, y_{G_i}
4	Rotația în jurul unei axe fixe	$p_i = 1$	φ_i	$p_i = 1$	φ_i
5	Mișcarea liberă în jurul unui punct fix	$p_i = 3$	$\psi_i, \varphi_i, \theta_i$	—	—
6	Mișcarea în jurul unui punct fix, cu un reazem exterior	$p_i = 2$	două dintre unghiurile $\psi_i, \varphi_i, \theta_i$	—	—
7	Mișcarea plan paralelă liberă	$p_i = 3$	$x_{G_i}, y_{G_i}, \varphi_i$	$p_i = 3$	$x_{G_i}, y_{G_i}, \varphi_i$
8	Mișcarea plan-paralelă cu un reazem cu alunecare	$p_i = 2$	două dintre mărimile $x_{G_i}, y_{G_i}, \varphi_i$	$p_i = 2$	două dintre mărimile $x_{G_i}, y_{G_i}, \varphi_i$
9	Mișcarea plan-paralelă cu un reazem cu rostogolire	$p_i = 1$	una dintre mărimile $x_{G_i}, y_{G_i}, \varphi_i$	$p_i = 1$	una dintre mărimile $x_{G_i}, y_{G_i}, \varphi_i$
10	Mișcarea elicoidală liberă	$p_i = 2$	z_{G_i}, φ_i	—	—
11	Mișcarea-de șurub	$p_i = 1$	una dintre mărimile z_{G_i}, φ_i	—	—
12	Punct material liber	$p_i = 3$	x_i, y_i, z_i	$p_i = 2$	x_i, y_i
13	Punct material cu un reazem sau o legătură prin fir (tijă rigidă)	$p_i = 2$	două dintre mărimile x_i, y_i, z_i	$p_i = 1$	una dintre mărimile x_i, y_i
14	Punct material cu două reazeme, sau două legături prin fire (tije rigide)	$p_i = 1$	una dintre mărimile x_i, y_i, z_i	—	—

Scanned with CamScanner

parametrul de poziție fiind unghiul de rotație φ_4;

— pentru elementul (S_5), reprezentat prin discul (Dc) în rotație în jurul axei fixe (Δ_4), rezultă

$$p_5 = 1,$$

parametrul de poziție fiind unghiul de rotație φ_5;

— pentru elementul (S_6), reprezentat prin contragreutatea (Cg_1) în mișcare de translație rectilinie pe verticală, rezultă

$$p_6 = 1,$$

parametrul de poziție fiind ordonata y_{G_6} a centrului ei de masă;

— pentru elementul (S_7), reprezentat prin pîrghia (Pg) în rotație în jurul axei fixe (Δ_7), rezultă

$$p_7 = 1,$$

parametrul de poziție fiind unghiul de rotație φ_7;

— pentru elementul (S_8), reprezentat prin șaiba (Sb) solidară cu tamburul (Tb), aflată în rotație în jurul axei fixe (Δ_1), rezultă

$$p_8 = 1,$$

parametrul de poziție fiind unghiul de rotație φ_3;

— pentru elementul (S_9), reprezentat prin contragreutatea (Cg_2) executînd, în condițiile neglijării micilor deviații, o translație rectilinie pe verticală, rezultă

$$p_9 = 1,$$

parametrul de poziție fiind ordonata y_{G_9} a centrului ei de masă.

În consecință, numărul total de parametri de poziție arbitrari ai elementelor sistemului mecanic reprezentat în fig. 12.1 va fi dat de relația

$$N = \sum_{i=1}^{9} p_i = 14, \qquad (12.17)$$

Scanned with CamScanner

ei fiind reprezentaţi prin mărimile φ_1, φ_2, x_{Q_3}, y_{Q_3}, z_{Q_3}, ψ_3, φ_3, θ_3, φ_4, φ_5, y_{G_6}, φ_7, φ_8 şi y_{G_9}.

Trecînd şi la examinarea sistemului mecanic plan reprezentat în fig. 12.2, căruia i se vor considera desfiinţate toate legăturile interioare, se constată următoarele:

— pentru elementul (S_1), reprezentat prin roata dinţată conducătoare $(\mathcal{R}_I)$ în rotaţie în jurul unei axe fixe trecînd prin punctul O_1, rezultă

$$p = 1,$$

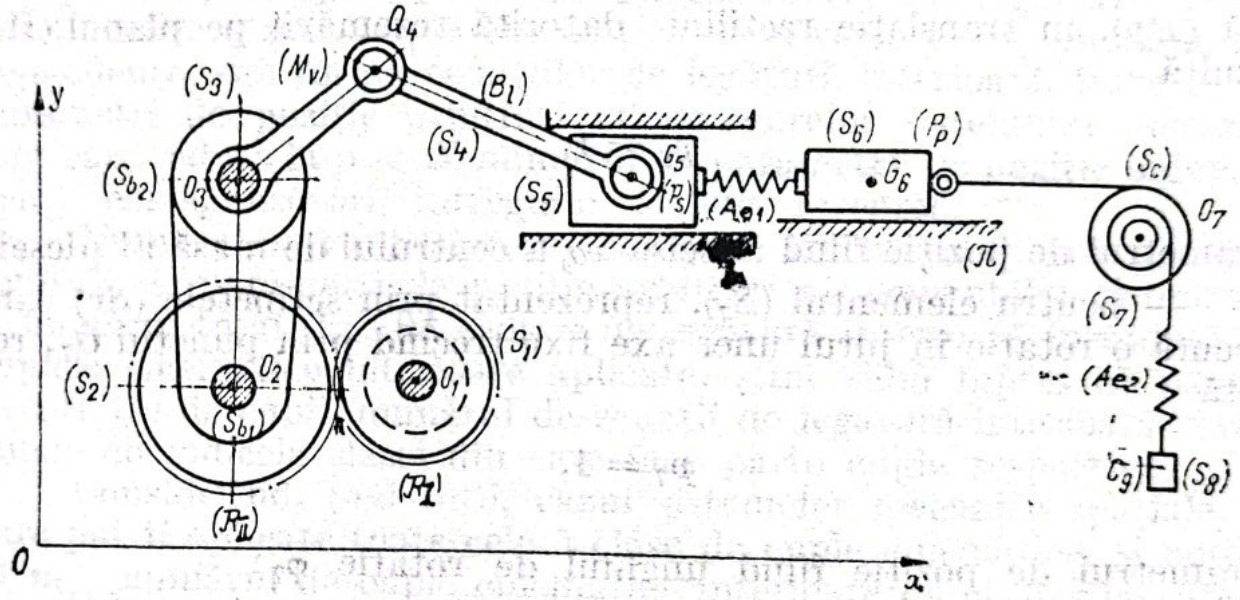


Fig. 12.2

parametrul de poziţie fiind unghiul de rotaţie φ_1;

— pentru elementul (S_2), reprezentat prin blocul rigid format din roata dinţată condusă $(\mathcal{R}_{II})$ şi şaiba (Sb_1), de asemenea în rotaţie în jurul unei axe fixe trecînd prin punctul O_2, rezultă

$$p_2 = 1,$$

parametrul depoziţie fiind unghiul de rotaţie φ_2;

— pentru elementul (S_3), reprezentat prin blocul rigid format din şaiba (Sb_2) şi manivela (Mv) în rotaţie în jurul unei axe fixe trecînd prin punctul O_3, rezultă

$$p_3 = 1,$$

parametrul de poziţie fiind unghiul de rotaţie φ_3;

— pentru elementul (S_4), reprezenta prin biela (bl) în mişcare plan-paralelă liberă în condiţiile desfiinţării legăturilor interioare, rezultă

$$p_4 = 3,$$

parametrii de poziție fiind mărimile x_{O_4}, y_{O_4} și φ_4;

— pentru elementul (S_5), reprezentat prin pistonul (Ps), în translație rectilinie datorită rezemării periodice pe cîte unul din ghidajele (Gd), rezultă

$$p_5 = 1,$$

parametrul de poziție fiind abscisa x_{G_4} a centrului său de masă;

— pentru elementul (S_7), reprezentat prin piesa paralelipipedică (Pp), în translație rectilinie datorită rezemării pe planul (Π), rezultă

$$p_6 = 1,$$

parametrul de poziție fiind abscisa x_{G_6} a centrului de masă al piesei;

— pentru elementul (S_7), reprezentat prin scripetele (Sc) care execută o rotație în jurul unei axe fixe trecînd prin punctul O_7, rezultă

$$p_7 = 1,$$

parametrul de poziție fiind unghiul de rotație φ_7;

— în fine, pentru elementul (S_8), reprezentat prin contragreutatea (Cg) asimilabilă cu un punct material în mișcarea rectilinie pe verticală (se neglijează și aici micile deviații de la această mișcare), rezultă

$$p_8 = 1,$$

parametrul de poziție fiind ordonata y_8 a punctului material.

În consecință, pentru acest de-al doilea sistem mecanic rezultă un număr total de

$$N = \sum_{i=1}^{8} p_i = 10 \tag{12.18}$$

parametri de poziție arbitrari ai elementelor sistemului, aceștia fiind reprezentați prin mărimile φ_1, φ_2, φ_3, x_{O_4}, y_{O_4}, φ_4, x_{G_5}, x_{G_6}, φ_7 și y_8.

Scanned with CamScanner

12.1.2. Parametrii de poziție independenți ai sistemului mecanic

Prin noțiunea de *parametri de poziție independenți ai unui sistem mecanic* se înțeleg acei dintre parametrii de poziție ai elementelor sistemului respectiv care rămîn independenți, putînd lua valori arbitrare, și după aplicarea legăturilor interioare.

După cum s-a văzut în paragraful precedent, legăturile interioare, realizate prin cuple cinematice de diverse clase, introduc noi dependențe, sub forma ecuațiilor de legătură interioară, între cei N parametri de poziție arbitrari ai elementelor sistemului mecanic, fapt care reduce la $p < N$ numărul de parametri de poziție independenți corespunzători întregului sistem mecanic.

Numărul p va fi dat, evident, de diferența dintre numărul total N de parametri de poziție arbitrari ai elementelor sistemului și numărul total, l_{int}, de ecuații de legătură interioară introduse de cuplele cinematice interioare aplicate, știut fiind faptul că pentru fiecare tip de cuplă numărul de ecuații de legătură interioară corespunde cu indicele clasei din care face parte cupla respectivă.

Considerînd, mai întîi, cazul sistemelor mecanice spațiale, la care pot fi aplicate toate cele 5 clase de cuple cinematice, și notînd cu $n_{i_{s,k}}$ numărul de cuple cinematice interioare de clasa k pe care le conține sistemul mecanic, numărul total de ecuații de legătură interioară introduse între cei N parametri de poziție arbitrari ai elementelor sistemului mecanic va fi dat de relația

$$l_{int} = \sum_{k=1}^{5} k\, n_{i_{s,k}}. \tag{12.19}$$

În consecință, numărul total de parametri de poziție independenți ai unui sistem mecanic va avea valoarea

$$\boxed{p = N - l_{int} = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{k=1}^{5} k\, n_{i_{s,k}}}, \tag{12.20}$$

el purtînd încă și numele de *numărul gradelor de libertate* ale sistemului mecanic considerat.

Trecînd la stabilirea numărului de grade de libertate ale sistemelor mecanice plane, se reamintește convenția făcută în paragraful precedent de a se folosi o clasificare distinctă pentru cuplele cinematice plane, acestea împărțindu-se numai în cuple de clasa *I* și de clasa a *II*-a; notînd deci cu $n_{i_{p,k}}$ numărul total de cuple cinematice interioare plane de clasa k, ($k = 1,2$), aplicate unui sistem mecanic plan cu N parametri de poziție arbitrari ai elementelor lui, numărul gradelor de libertate ale sistemului va fi dat de relația

$$\boxed{p = N - l_{int} = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{k=1}^{2} k\, n_{i_{p,k}}.} \tag{12.21}$$

Pentru a ilustra și aici, prin cîte un exemplu concret, modul de calcul al acestui număr al gradelor de libertate, se va considera și acum, mai întîi sistemul mecanic spațial reprezentat în fig. 12.1, observîndu-se că lui îi sînt aplicate următoarele cuple cinematice interioare:

— un număr de

$$n_{i_{s,1}} = 4$$

de cuple cinematice de clasa întîi, reprezentate prin cupla camă-tachet între excentricul (Ex) și pîrghia (Pg), prin cupla prin roți dințate între elementele (S_2) și (S_7) și cuplele prin fir între pîrghia (Pg) și șaiba (Sb), respectiv între tamburul (Tb) și contragreutatea (Cg_2);

— un număr de

$$n_{i_{s,2}} = 1$$

cuple cinematice de clasa a doua, reprezentate prin cupla cilindrică dintre manivela (Mv) și biela (Bl) (deși din punct de vedere tehnic această legătură este realizată ca o cuplă de rotație, funcțional ea se comportă totuși ca o cuplă cilindrică, datorită legăturii bielei, prin cupla de translație, cu bucșa oscilantă);

— un număr de

$$n_{i_{s,5}} = 1$$

cuple cinematice de clasa a V-a, reprezentate prin cupla de translație dintre biela (Bl) și bucșa oscilantă (Bo).

Cuplele cinematice interioare aplicate sistemului mecanic din fig. 12.1 introduc deci un număr total de

$$l_{int} = \sum_{k=1}^{5} k\, n_{i_{s,k}} = 11$$

ecuaţii de legătură interioară între cei $N = 14$ parametri de poziţie arbitrari ai elementelor sistemului considerat, care va avea, în consecinţă, un număr de grade de libertate egal cu

$$p = N - l_{int} = 3.$$

Trecînd la examinarea sistemului mecanic plan reprezentat în fig. 12.2, se va observa că el este supus la următoarele legături interioare :

— un număr de

$$n_{i_{p,1}} = 3$$

cuple cinematice de clasa întîi, reprezentate prin cupla cu roţi dinţate dintre elementele (S_1) şi (S_2) şi prin cuplele cu fire dintre elementele (S_2) şi (S_3), respectiv elementele (S_6) şi (S_7). (Porţiunea de fir care leagă scripetele (Sc) de contragreutatea (Cg), datorită legării extremităţii ei la arcul elicoidal (Ae), nu mai poate fi considerată legătură pasivă).

— un număr de

$$n_{i_{p,2}} = 2$$

cuple cinematice de clasa a doua, reprezentate prin articulaţiile cilindrice dintre elementele (S_3) şi (S_4), respectiv (S_4) şi (S_5).

Numărul ecuaţiilor de legătură interioară introduse între cei cei $N = 10$ parametri de poziţie arbitrari ai sistemului mecanic din fig. 12.2 de către cuplele cinematice interioare este de

$$l_{int} = 7,$$

iar numărul gradelor lui de libertate este

$$p = N - l_{int} = 3.$$

Scanned with CamScanner

În legătură cu noțiunea de număr al gradelor de libertate ale unui sistem mecanic mai trebuie făcută precizarea că stabilirea corectă a acestui număr implică în mod necesar verificarea ipotezelor de rigiditate a blocurilor din care se consideră constituit sistemul și a axelor și arborilor pe care sînt montate diverse piese în rotație, acceptarea, sau nu, a acestor ipoteze fiind condiționată, în multe cazuri, de caracterul mișcării sistemului.

Într-adevăr, după cum s-a văzut și în cazul sistemului mecanic reprezentat în fig. 12.1, unele din blocurile din care este acesta sînt formate din piese în mișcare de rotație — șaibe, discuri, roți dințate, pîrghii, came, excentrice etc. — fixate solidar pe arborii considerați perfect rigizi; în realitate, acești arbori, mai ales în cazurile cînd au și lungimi mari, permit unele mici rotații relative ale pieselor montate pe ei, adică se comportă de fapt ca tije elastice de torsiune.

Dacă mișcarea sistemului mecanic se execută continuu într-un sens determinat, se înțelege că aceste mici rotații relative ale pieselor ce alcătuiesc un asemenea bloc pot fi, de cele mai multe ori, neglijate, adică blocul respectiv poate fi considerat efectiv ca perfect rigid.

Cu totul alta este însă situația în cazul cînd mișcarea sistemului ar consta din foarte mici deplasări ale elementelor lui de o parte și de alta a pozițiilor lui de repaus, cum se întîmplă, de exemplu, în cazul vibrațiilor și cînd micile rotații relative ale elementelor unui bloc, de același ordin de mărime ca și ale celorlalte elemente ale sistemului, nu mai pot fi neglijate.

În asemenea cazuri se înțelege că diferitele porțiuni ale arborelui pe care sînt montate piesele în rotație vor trebui considerate ca tije elastice de torsiune, modificîndu-se în mod corespunzător și numărul gradelor de libertate ale sistemului mecanic.

Astfel, de exemplu, în cazul unei rotații continue, într-un sens determinat, a elementului conducător (S_1), sistemul mecanic reprezentat în fig. 12.3, a va fi considerat ca fiind alcătuit din două blocuri rigide — primul format din elementele (S_1) și (S_2), iar al doilea din elementele (S_3), (S_4), și (S_5) —, fiecare în roatație în jurul unei axe fixe, ($p_1 = p_2 = 1$), legate între ele prin o cuplă cu roți dințate ($l_{int} = 1$), rezultînd astfel pentru acest sistem un singur grad de libertate ($p = N - l_{int} = 1$).

În cazul, însă, al unor rotații oscilatorii mici ale elementului conducător (S_1) de o parte și de alta a poziției sale de repaus, nu mai

pot fi neglijate nici rotaţiile relative ale elementelor (S_2), (S_3) şi (S_4) şi (S_5), prilejuite de imperfecta rigiditate a axelor celor două blocuri, ale căror porţiuni, (Ax_1), (Ax_2) şi (Ax_3), (fig. 12.3, b), se comportă ca tije elastice de torsiune; în această situaţie, sistemul mecanic va trebui considerat ca fiind format dintr-un număr de 5 elemente în rotaţie în jurul unor axe fixe (dacă nu se iau în consideraţie şi

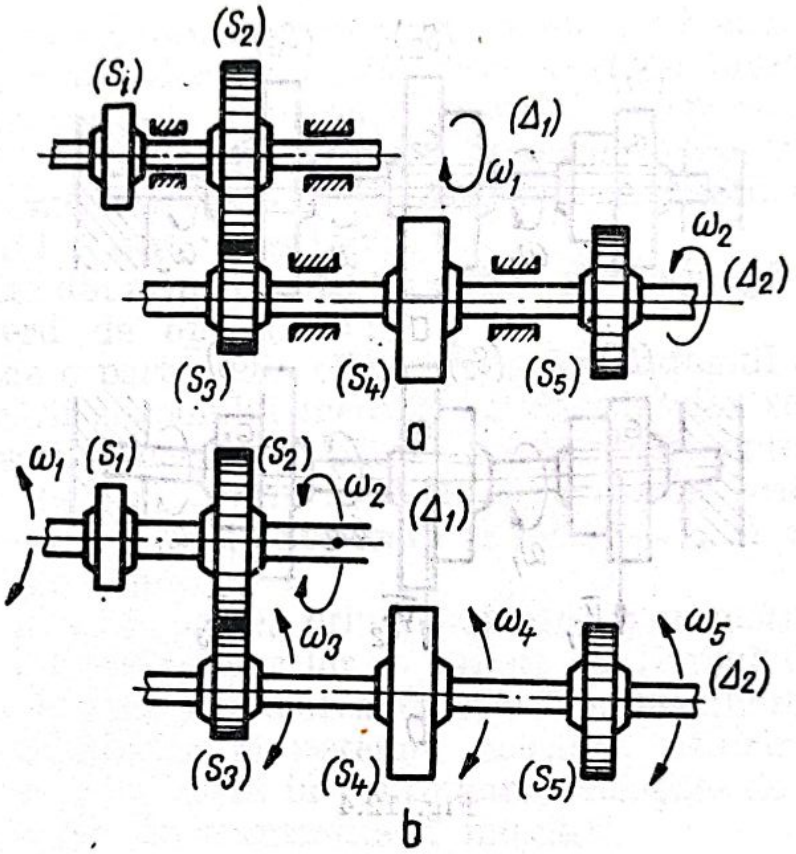


Fig. 12.3

încovoierile eventuale ale axelor), $(p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1)$, supuse la o singură legătură pasivă interioară — cupla cu roţi dinţate dintre elementele (S_2) şi (S_3) —, rezultînd astfel, pentru acelaşi sistem mecanic, un număr de 4 grade de libertate $(p = N - l_{int} = 4)$.

De asemenea, în cazul unui sistem mecanic format din diverse piese în rotaţie liberă pe un ax fix (Ax), (fig. 12.4), sistemul va avea, în ipoteza perfectei rigidităţi a axului, un număr de grade de libertate egal cu numărul pieselor în rotaţie liberă aflate pe ax, adică, în exemplul considerat, 3 grade de libertate; dacă se ia în consideraţie însă şi deformaţia elastică a axului, considerată, în majoritatea

covîrșitoare a cazurilor, o încovoiere plană, atunci fiecare porțiune a axului va fi considerată ca o bară elastică de legătură, permițînd — în cadrul ipotezelor simplificatoare acceptate curent — nu numai rotația elementelor în jurul unor axe paralele la axa nedeformată a axului, ci și translația rectilinie efectuată în planul în care se produce încovoierea axului și în direcție normală la axa geometrică nedefor-

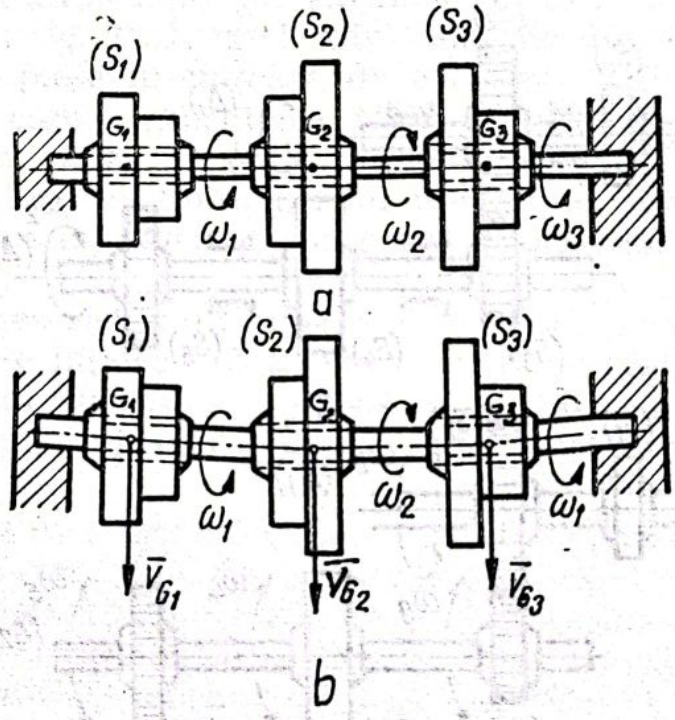


Fig. 12.4

mată a axului. În această situație, sistemul mecanic se va prezenta cu un număr dublu de grade de libertate față de situația precedentă. Astfel, în cazul sistemului reprezentat în fig. 12.4, b rezultă un număr de $p = 6$ grade de libertate.

Se poate trage deci concluzia că în funcție de caracterul mișcării pe care o are — cu un sens unic de mișcare, sau oscilatoriu —, un același sistem mecanic se poate prezenta cu un număr mai mic, sau mai mare, de grade de libertate; de asemenea, mai rezultă concluzia că în aprecierea numărului gradelor de libertate ale unui sistem mecanic concret, întîlnit în practică, inginerul va trebui să țină seama și de precizia pe care dorește să o obțină în modelarea fenomenului mecanic studiat.

Scanned with CamScanner

12.2. *Exprimarea parametrilor de poziţie şi a parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor unui sistem mecanic în funcţie de parametrii de poziţie independenţi şi — în cazul parametrilor cinematici — de derivatele lor în raport cu timpul*

Trecînd la examinarea celei de-a doua probleme fundamentale a cinematicii sistemelor de rigide, este uşor de înţeles că în cazul unui sistem mecanic în mişcare, numărului de p parametri de poziţie independenţi îi va corespunde, în problemele de tip fundamental ale dinamicii sistemelor mecanice, un sistem de p ecuaţii diferenţiale ale mişcării acelui sistem mecanic.

La aceste din urmă ecuaţii va trebui să se ajungă prin următoarele două serii de operaţiuni:

— pe de o parte, prin eliminarea, din sistemul de ecuaţii scalare ale mişcării sistemului mecanic, a elementelor scalare necunoscute din torsorii solicitărilor pasive aplicate elementelor sistemului, reprezentate, de regulă, prin modulii sau valorile scalare ale reacţiunilor legăturilor pasive, exterioare şi interioare, la care este supus sistemul mecanic considerat;

— pe de altă parte, prin eliminarea parametrilor de poziţie dependenţi şi a derivatelor lor în raport cu timpul din sistemul de ecuaţii obţinut după eliminarea reacţiunilor necunoscute ale cuplelor cinematice folosite în sistemul mecanic, utilizîndu-se în acest scop, aşa cum se va arăta în continuare, ecuaţiile de legătură interioară şi ecuaţiile de transmisie a mişcării.

12.2.1. Criterii de alegere a parametrilor de poziţie independenţi

În rezolvarea celei de-a doua probleme fundamentale a cinematicii sistemelor mecanice, un rol esenţial îl are alegerea celor p parametri de poziţie independenţi ai unui sistem mecanic, alegere care, în cazul cînd este judicios făcută, poate simplifica considerabil exprimarea parametrilor de poziţie dependenţi în funcţie de cei independenţi, respectiv exprimarea parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor cu mişcări dependente în funcţie de parametrii de poziţie independenţi şi de derivatele lor în raport cu timpul.

Scanned with CamScanner

De aici rezultă, așadar, și criteriul general de alegere a mărimilor a căror variație condiționează, în ultimă instanță, mișcarea întregului sistem mecanic :

Drept parametri de poziție independenți ai unui sistem mecanic vor fi considerați un număr de p dintre cei N parametri de poziție arbitrari ai elementelor sistemului, astfel aleși încît, fie în baza ecuațiilor de legătură interioară, fie în baza unor considerații geometrice rezultînd din restricțiile impuse de cuplele cinematice interioare, toți ceilalți parametri de poziție dependenți ai sistemului mecanic, în număr egal cu numărul $l_{int} = N - p$ *al ecuațiilor de legătură interioară, să poată fi exprimați în funcție de primii sub forma cea mai simplă posibilă.*

Este ușor de înțeles deplina încadrare în acest criteriu general a următoarelor două recomandări concrete, privind alegerea parametrilor de poziție independenți ai unui sistem mecanic :

1) Dacă un sistem mecanic are un număr oarecare de elemente motoare, conectate la surse de energie cinetică independente între ele, atunci parametrii de poziție ai acestor elemente conducătoare vor fi aleși printre cei p parametri de poziție independenți ai sistemului mecanic.

2) Dacă un sistem mecanic are un număr oarecare de elemente supuse la legături interioare numai active, realizate prin elemente elastice de legătură (arcuri elicoidale și spirale, bare elastice deformate prin încovoiere și tije elastice de torsiune), atunci parametrii de poziție ai acestor elemente vor figura și ei printre cei p parametri poziție independenți ai sistemului mecanic considerat.

În cele ce urmează, cei p parametri de poziție independenți ai unui sistem mecanic vor fi notați, într-o ordine oarecare, prin simbolurile $w_1, w_2, \ldots, w_p$, ei putînd fi reprezentați atît prin coordonate carteziene ale polilor invariabil legați de elementele sistemului mecanic, cît și prin unghiuri ale lui Euler, în particular prin unghiuri de rotație.

Folosind recomandările formulate mai sus la alegerea parametrilor de poziție independenți ai sistemului mecanic cu trei grade de libertate reprezentat în fig. 12.1 se observă că el are un singur element motor — este vorba de blocul rigid format din rotorul motorului, axul (Ax) și roata dințată ($\mathscr{R}_1$) —, cu poziția determinată numai prin unghiul de rotație φ_1 și două elemente supuse la legături interioare elastice — este vorba de discul (Dc), cu poziția determinată prin unghiul de rotație φ_5 și de contragreutatea (Cg_1) cu poziția deter-

minată prin ordonata y_{G_6} a centrului ei de greutate G_6; parametrii de poziție independenți ai acestui sistem mecanic vor fi reprezentați deci prin mărimile

$$w_1 = \varphi_1; \quad w_2 = \varphi_5; \quad w_3 = y_{G_6}.$$

De asemenea, în cazul sistemului mecanic plan reprezentat în fig. 12.2, avînd tot 3 grade de libertate, există un singur element motor — roata dințată ($\mathcal{R}_1$), cu poziția determinată prin unghiul de rotație φ_1 — și două elemente supuse la legături interioare active — este vorba de piesa paralelipipedică (Pp), cu poziția determinată prin abscisa x_{G_6} a centrului ei de masă G_6 și contragreutatea (Cg), cu poziția determinată prin ordonata y_8; în consecință, cei trei parametri de poziție independenți ai acestui sistem mecanic vor fi reprezentați prin mărimile

$$w_1 = \varphi_1; \quad w_2 = x_{G_6}; \quad w_3 = y_8.$$

În legătură cu alegerea parametrilor de poziție independenți ai unui sistem mecanic mai trebuie observat că o aplicare comodă a criteriului general, enunțat mai sus, de alegere o permite metoda tensorial-matriceală a lui D. Mangeron și C. Drăgan de stabilire a ecuațiilor de legătură interioară, utilizabilă în cazul sistemelor mecanice spațiale formate din bare.

Într-adevăr, în aceste cazuri ecuația tensorială de închidere a lanțului cinematic (11.223) furnizează, de regulă, un număr de ecuații scalare de legătură interioară superior numărului p de parametri de poziție independenți ai sistemului mecanic pentru care este scrisă; faptul că în problemele practice se iau în considerație numai sistemele mecanice cu mișcări determinate, arată că soluția sistemului total de ecuații rezultînd din ecuația tensorială (11.223) în raport cu parametrii de poziție independenți trebuie să fie și ea unic determinată, ceea ce înseamnă că din cele 12 ecuații scalare de legătură considerate numai p sînt independente. Existența unui număr mai mare de ecuații de legătură permite, în consecință, alegerea celor mai simple dintre ele ca ecuații cu care să se realizeze explicitarea parametrilor de poziție dependenți în funcție de cei independenți.

Se mai face observația că în unele probleme de sinteză — adică de realizare a unor sisteme mecanice cu mișcările elementelor satisfăcînd anumitor condiții prescrise pe bază de considerente tehnologice —, este posibil ca numărul elementelor necunoscute în raport

Scanned with CamScanner

cu care vor trebui rezolvate ecuațiile de legătură scalare rezultind din ecuația tensorială (11.223) să fie mai mare decît numărul ecuațiilor; în asemenea situații se stabilesc, obișnuit, și unele ecuații de condiție auxiliare, care, în modul actual de abordare a problemelor, reflectă, de cele mai multe ori, condiții de optimizare.

12.2.2. Coordonatele generalizate ale unui sistem mecanic

În multe cazuri, calculele necesare stabilirii ecuațiilor diferențiale ale mișcării unui sistem mecanic se pot în mod apreciabil simplifica dacă în locul unora — sau chiar a tuturor — dintre cei p parametri de poziție independenți w_i $(i = 1,2,\ldots,p)$ ai sistemului se iau alte mărimi, tot independente între ele, care, de asemenea, să determine complet poziția sistemului mecanic.

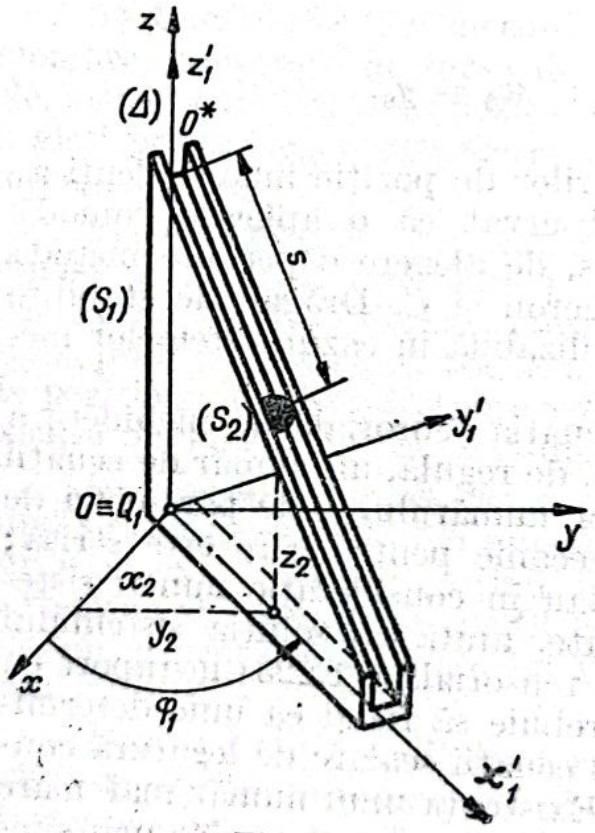


Fig. 12.5

Astfel, în locul unora dintre coordonatele carteziene ale polilor invariabil legați de elementele sistemului mecanic pot fi luate coordonatele cilindrice, intrinseci sau chiar coordonate mai generale, curbilinii, ale acestor puncte. De exemplu, în cazul sistemului mecanic reprezentat în fig. 12.5, în care jgheabul dreptunghiular (Jg) executat în elementul (S_1) are, odată cu elementul, o mișcare de rotație în jurul axei fixe verticale (Δ), $(p_1 = 1$, parametrul de poziție fiind unghiul de rotație φ_1, iar elementul (S_2), asimilat ca un punct material, are o mișcare rectilinie în lungul jgheabului și deci o mișcare absolută spațială, $(p_2 = 3$, parametrii de poziție fiind coordonatele lui, x_2, y_2, $z_2)$, ca urmare a legăturilor interioare realizate prin reazemele pe fundul jgheabului și pe unul din cei doi pereți laterali ai lui, $(l_{int} = 2)$, vor rezulta

$$p = N - l_{int} = 2$$

grade de libertate, cărora le vor corespunde doi parametri de poziţie independenţi, aceştia fiind reprezentaţi prin unghiul de rotaţie φ_1 şi prin una dintre cele trei coordonate ale punctului material. Poziţia, într-un moment oarecare, a aceluiaşi sistem mecanic va putea fi determinată însă, tot aşa de bine, şi prin unghiul de rotaţie φ_1 al jgheabului şi prin coordonata intrinsecă relativă, s, a punctului material în raport cu originea 0, aleasă la intersecţia traiectoriei relative a acestui punct cu axa verticală (Δ).

Alteori — şi aceasta, în deosebi, în cazul sistemelor vibrante —, drept mărimi independente alese pentru determinarea poziţiilor elementelor cu mişcări independente se iau deplasările liniare — dacă e vorba de corpuri care execută translaţii rectilinii —, sau unghiulare — dacă este vorba de elemente care execută rotaţii în jurul unor axe fixe — socotite însă în raport cu poziţiile de echilibru static ale elementelor respective şi nu, aşa cum se consideră obişnuit, în raport cu o origine fixă — respectiv în raport cu o axă de referinţă fixă în cazul unghiurilor —, comună tuturor elementelor sistemului mecanic.

De exemplu, în cazul unui element (S_i) care execută o translaţie rectilinie în lungul axei Ox sub acţiunea forţelor elastice exercitate de arcurile elicoidale (Ae_i) şi (Ae_{i+1}), (fig. 12.6, a), pentru determinarea poziţiei sale într-un moment oarecare se obişnuieşte să se ia diferenţa

$$q_i = x_{\overrightarrow{G_i}} - x_{G_{i_{st}}},$$

convenindu-se tot odată ca această raportare a elementului (S_i) la poziţia sa de echilibru static să fie precizată în schiţele dinamice sub forma arătată în fig. 12.6, b.

De asemenea, în cazul rigidului (S_i) executînd o rotaţie în jurul axei fixe (Δ) $\equiv$ Oz, (fig. 12.7, a), sub acţiunea cuplurilor exercitate de arcurile spirale (As_i) şi (As_{i+1}), se obişnuieşte să se determine poziţia lui într-un moment oarecare al mişcării sale prin unghiul cu care s-a rotit elementul faţă de poziţia sa de echilibru static, adică prin diferenţa

$$q_i = \varphi_i - \varphi_{i_{st}},$$

convenindu-se şi acum ca această raportare a poziţiei elementului (S_i) la poziţia sa de echilibru static să fie precizată în schiţele dinamice şi anume sub forma arătată în fig. 12.7, b.

Scanned with CamScanner

În fine, alteori, pentru determinarea poziției unui sistem mecanic se iau, în locul unora dintre parametrii de poziție independenți, un număr egal de funcții liniare de parametrii de poziție variabili în timp ai sistemului, între aceștia din urmă figurînd, se înțelege, și

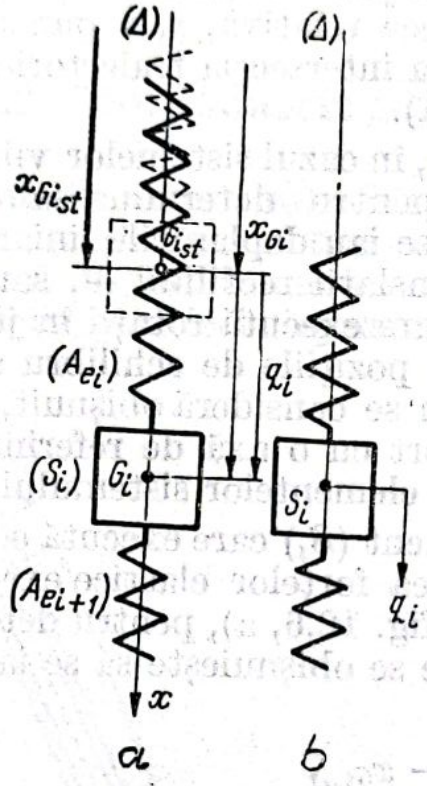


Fig. 12.6

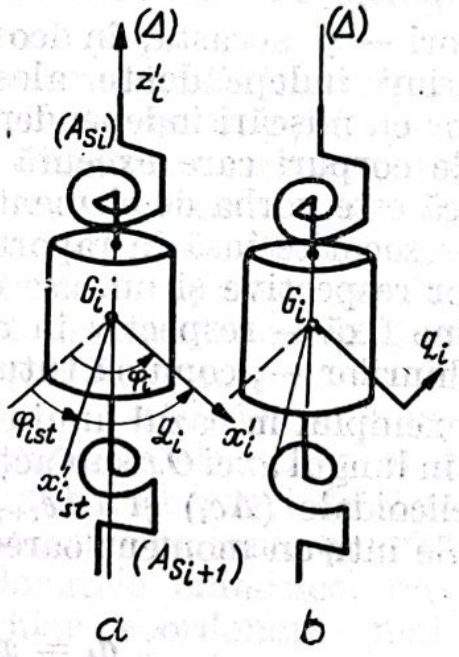


Fig. 12.7

parametrii de poziție independenți care nu au fost luați în considerație.

Pentru a ilustra printr-un exemplu concret cele spuse mai sus, se va considera sistemul mecanic spațial reprezentat în fig. 12.8, constituit din următoarele patru elemente:

— bucșele (Bc_1) și (Bc_2), în mișcare elicoidală liberă pe tijă fixă (Tj), pentru care rezultă

$$p_1 = p_4 = 2,$$

parametrii de poziție fiind mărimile z_{O_1} și φ_1, respectiv z_{O_4} și φ_4;

— barele (Br_1) și (Br_2), articulate între ele în B și articulate și cu cele două bucșe în punctele A, respectiv D, aceste două elemente avînd, în ipoteza desființării legăturilor interioare, mișcări spațiale libere; rezultă în această situație

$$p_2 = p_3 = 6,$$

parametrii de poziţie fiind reprezentaţi prin mărimile x_{Q_2}, y_{Q_2}, z_{Q_2}, ψ_2, φ_2 şi θ_2, respectiv x_{Q_3}, y_{Q_3}, z_{Q_3}, ψ_3, φ_3 şi θ_3.

Pentru a stabili şi numărul ecuaţiilor de legătură interioară corespunzătoare sistemului mecanic considerat, se va observa că, funcţional, articulaţiile din punctele A şi D se comportă ca nişte cuple

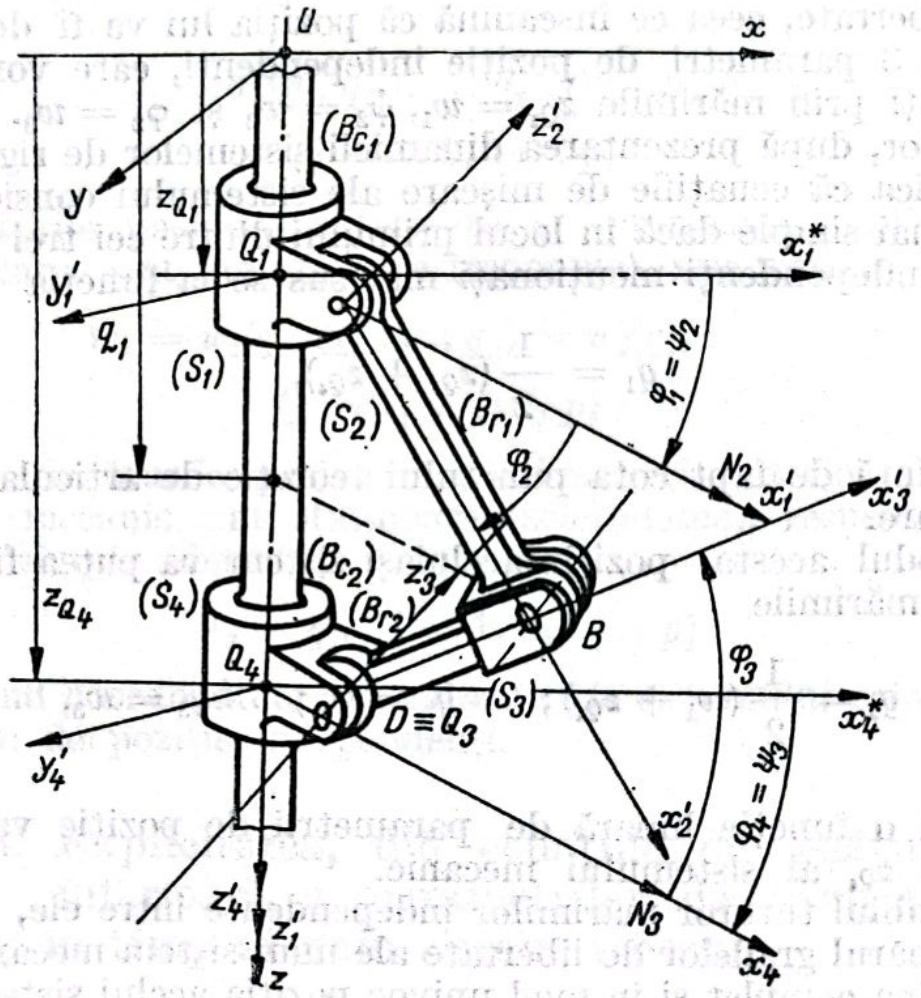


Fig 12.8

de rotaţie, în timp ce articulaţia din B se comportă ca un simplu lagăr pivot, rezultînd deci :

— un număr de

$$n_{t_{s;3}} = 1$$

cuple de clasa a treia, reprezentate prin articulaţia din B şi

— un număr de

$$n_{t_{s,5}} = 2$$

cuple de clasa a V-a, reprezentate prin articulațiile din punctele A și D.

În consecință, pentru sistemul mecanic analizat va rezulta un număr de

$$p = N - l_{int} = 16 - 13 = 3$$

grade de libertate, ceea ce înseamnă că poziția lui va fi determinată numai prin 3 parametri de poziție independenți, care vor putea fi reprezentanți prin mărimile $z_{Q_1} = w_1$, $\psi_2 = w_2$ și $\varphi_2 = w_3$.

Ulterior, după prezentarea dinamicii sistemelor de rigide, se va putea verifica că ecuațiile de mișcare ale sistemului considerat mai sus devin mai simple dacă în locul primului dintre cei trei parametri de poziție independenți menționați mai sus se ia funcția

$$q_1 = \frac{1}{2}(z_{Q_1} + z_{Q_4}),$$

care reprezintă de fapt cota punctului teoretic de articulație dintre cele două bare.

În modul acesta, poziția aceluiași sistem va putea fi determinată și prin mărimile

$$q_1 = \frac{1}{2}(w_1 + z_{Q_4}); \qquad q_2 = w_2; \qquad q_3 = w_3,$$

prima fiind o funcție liniară de parametrii de poziție variabili în timp z_{Q_1} și z_{Q_4} ai sistemului mecanic.

Ansamblul tuturor mărimilor independente între ele, în număr egal cu numărul gradelor de libertate ale unui sistem mecanic și care pot determina complet și în mod univoc poziția acelui sistem în mișcare, între ei putînd figura, evident, și unii dintre parametrii de poziție independenți ai sistemului, au primit denumirile de *coordonate generalizate*, *coordonate lagrangeiene* (coordonatele lui Lagrange), sau încă *parametri lagrangeieni de poziție ai sistemului mecanic* considerat și sînt notate cu simbolurile $q_1, q_2, \ldots, q_p$.

Este ușor de înțeles că noțiunea de coordonate generalizate are un sens mai larg decît aceea de parametri de poziție independenți, ultimii putînd fi condiderați drept forme particulare de parametri lagrangeieni.

Dubla posibilitate de determinare, completă și univocă, a poziției unui sistem mecanic, fie prin cele p coordonate generalizate,

Scanned with CamScanner

fie prin cei p parametri de poziție independenți, implică, neapărat, și posibilitatea exprimării unora în funcție de ceilalți. În mod deosebit vor interesa expresiile parametrilor de poziție independenți în funcție de coordonatele generalizate, expresii care vor putea fi stabilite în baza modului de definire a parametrilor lagrangeieni și, eventual, și a ecuațiilor de legătură interioară și care vor avea forma generală

$$w_j = w_j(q_1, q_2, \ldots, q_p ; t) = w_j(q ; t), \qquad (12.22)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

dacă legăturile pasive — exterioare și interioare — aplicate sistemului mecanic sînt nestaționare (reonome), sau formele particulare

$$w_j = w_j(q_1, q_2, \ldots, q_p) = w_j(q), \qquad (12.23)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

dacă toate legăturile pasive — exterioare și interioare — aplicate sistemului mecanic sînt staționare (scleronome), respectiv formele reduse la simple identități

$$w_j = q_j, \ (i = 1, 2, \ldots, p) \qquad (12.24)$$

în cazul cînd coordonatele generalizate ale sistemului coincid cu parametrii lui de poziție independenți.

12.2.3. Explicitarea, din ecuațiile de legătură interioară, a parametrilor de poziție variabili în timp ai unui sistem mecanic

1°. Exprimarea parametrilor de poziție variabili în timp ai unui sistem mecanic în funcție de parametrii lui de poziție independenți

Odată aleși cei p parametri de poziție independenți, sistemul format din cele l_{int} ecuații de legătură interioară corespunzătoare sistemului mecanic considerat, scris acum, într-o ordine oarecare, sub forma

$$f_\lambda(\ldots, x_{Q_i}, y_{Q_i}, z_{Q_i}, \psi_i, \varphi_i, \vartheta_i ; \ldots ; w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = 0,$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{int}) \qquad (12.25)$$

va permite, prin rezolvarea lui în raport cu cei $l_{int} = (N - p)$ parametri de poziție dependenți, să se exprime aceștia din urmă ca funcție de mărimile $w_1, w_2, \ldots, w_p$ și, eventual, și de timp, dacă legăturile pasive sînt nestaționare, sau, cum se mai spune uneori, dacă sistemul mecanic este reonom.

Se înțelege că rezolvarea unui asemenea sistem de ecuații nu va fi totdeauna ușoară și că, de multe ori, ea va putea fi făcută doar pentru valori numerice concrete ale parametrilor de poziție independenți, deci numai pentru diferite momente ale mișcării sistemului mecanic considerat.

Din cele arătate mai sus rezultă că, în ipoteza posibilității de explicitare a parametrilor de poziție dependenți, fie în baza modului de alegere a parametrilor de poziție independenți, fie în baza sistemului de ecuații de legătură interioară — eventual și exterioară —, toți parametrii de poziție variabili în timp ai unui sistem mecanic vor putea fi exprimați ca funcții de mărimile $w_1, w_2, \ldots, w_p$ și, eventual, și de timp, adică se vor putea scrie sistemele de relații :

$$\begin{aligned}
x_{Q_i} &= x_{Q_i}(w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = x_{Q_i}(w ; t) ; \\
y_{Q_i} &= y_{Q_i}(w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = y_{Q_i}(w ; t) ; \\
z_{Q_i} &= z_{Q_i}(w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = z_{Q_i}(w ; t) ; \\
\psi_i &= \psi_i(w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = \psi_i(w ; t) ; \\
\varphi_i &= \varphi_i(w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = \varphi_i(w ; t) ; \\
\theta_i &= \theta_i(w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = \theta_i(w ; t), \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{12.26}$$

relațiile precedente reducîndu-se la simple identități de forma

$$x_{Q_i} = w_k ; \ldots ; \varphi_i = w_l ; \ldots \tag{12.27}$$

pentru acei dintre parametrii de poziție ai sistemului mecanic care au fost aleși drept parametri de poziție independenți.

În cazul sistemelor mecanice plane, ecuațiile de legătură interioară vor putea fi scrise, prin introducerea noilor notații pentru pa-

rametrii de poziţie independenţi, sub forma

$$f_\lambda(\ldots ; x_{Q_i}, y_{Q_i} ; \varphi_i ; \ldots ; w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = 0,$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{int}) \tag{12.28}$$

iar explicitarea (12.26) a parametrilor de poziţie variabili în timp ai sistemului mecanic în funcţie de cei independenţi va lua şi ea forma particulară

$$\begin{aligned} x_{Q_i} &= x_{Q_i}(w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = x_{Q_i}(w ; t) ; \\ y_{Q_i} &= y_{Q_i}(w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = y_{Q_i}(w ; t) ; \\ \varphi_i &= \varphi_i(w_1, w_2, \ldots, w_p ; t) = \varphi_i(w ; t). \end{aligned} \tag{12.29}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Se înţelege că atît în relaţiile (12.26), cît şi în relaţiile (12.29), vor figura numai parametrii de poziţie cărora legăturile exterioare pasive aplicate sistemului mecanic le permit variaţii în timp.

Pentru a ilustra şi acum, printr-un exemplu concret, modul de explicitare a parametrilor de poziţie ai elementelor sistemului mecanic în funcţie de parametrii de poziţie independenţi, se va reveni la sistemul mecanic reprezentat în fig. 12.1, retranscriindu-se cele 11 ecuaţii de legătură interioară cu noile notaţii pentru cei trei parametri de poziţie aleşi ca parametri independenţi :

$$\begin{aligned}
&(1)\quad f_1(\varphi_2 ; w_1) = \varphi_2 + \frac{z_1}{z_2} w_1 = 0 ; \\
&(2)\quad f_2(x_{Q_3} ; w_1) = x_{Q_3} - r \cos\left(-\frac{z_1}{z_2} w_1 \right) = 0 ; \\
&(3)\quad f_3(y_{Q_3} ; w_1) = y_{Q_3} - r \sin\left(-\frac{z_1}{z_2} w_1 \right) = 0 ; \\
&(4)\quad f_4(z_{Q_3}) = z_{Q_3} \equiv 0 \\
&(5)\quad f_5(\psi_3) = \psi_3 \equiv 0 \\
&(6)\quad f_6(\varphi_3 ; w_1) = \varphi_3 - \arccos\left[\frac{r \cos\left(-\frac{z_1}{z_2} w_1 \right)}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \sin\left(-\frac{z_1}{z_2} w_1 \right)}} \right] = 0 ;
\end{aligned} \tag{12.30}$$

$$(7)\quad f_7(\theta_3) = \theta_3 \equiv 0$$

$$(8)\quad f_8(\varphi_4 ; w) = \varphi_4 - \arccos\left[\frac{r\cos\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right)}{\sqrt{r^2+h^2-2rh\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right)}}\right] = 0 ;$$

$$(9)\quad f_9(\varphi_7 ; w_1) = \varphi_7 - f\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right) = 0, \quad (\varphi_7 \text{ explicitat din 12.6})$$

$$(10)\quad f_{10}(\varphi_8 ; w) = \varphi_8 + \frac{L}{R} f\left(-\frac{z_1}{z_2}w\right) = 0 ;$$

$$(11)\quad f_{11}(y_{G_9} ; w) = y_{G_9} - y^0_{G_9} - r\frac{L}{R} f\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right) = 0. \qquad (12.30)$$

Prin rezolvarea sistemului precedent de ecuații în raport cu parametrii de poziție independenți și ținînd seama și de modul de definire a lor, rezultă următoarele expresii ale parametrilor de poziție variabili în timp ai sistemului mecanic considerat în funcție de parametrii de poziție independenți:

$$\varphi_1 = w_1 = \varphi_1(w_1) ;$$

$$\varphi_2 = -\frac{z_1}{z_2}w_1 = \varphi_2(w_1) ;$$

$$x_{Q_3} = r\cos\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right) = x_{Q_3}(w_1) ;$$

$$y_{Q_3} = r\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right) = y_{Q_3}(w_1) ;$$

$$z_{Q_3} \equiv 0 ;$$

$$\psi_3 \equiv 0 ;$$

$$\varphi_3 = \arccos\left[\frac{r\cos\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right)}{\sqrt{r^2+h^2-2rh\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right)}}\right] = \varphi_3(w_1) ; \qquad (21.31)$$

Scanned with CamScanner

$$\theta_3 \equiv 0$$

$$\varphi_4 = \arccos\left[\frac{r\cos\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right)}{\sqrt{r^2+h^2-2rh\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right)}}\right] = \varphi_4(w_1);$$

$$\varphi_5 = w_2 = \varphi_5(w_2);$$

$$y_{G_6} = w_3 = y_{G_6}(w_3);$$

$$\varphi_7 = f\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right) = \varphi_7(w_1);$$

$$\varphi_8 = -\frac{L}{R}f\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right) = \varphi_8(w_1);$$

$$y_{G_9} = y^0_{G_9} + r\frac{L}{R}f\left(-\frac{z_1}{z_2}w_1\right) = y_{G_9}(w_1).$$

2°. Exprimarea parametrilor de poziție variabili în timp ai unui sistem mecanic în funcție de coordonatele generalizate

Expresiile parametrilor de poziție ai elementelor unui sistem mecanic în funcție de coordonatele lagrangeiene se obțin cu ușurință prin înlocuirea în relațiile (12.26), respectiv (12.29), a expresiilor (12.22) ale parametrilor de poziție independenți în funcție de parametrii lagrangeieni, rezultînd astfel relațiile

$$\begin{aligned}
x_{Q_i} &= x_{Q_i}(q_1, q_2, \ldots, q_p; t) = x_{Q_i}(q; t);\\
y_{Q_i} &= y_{Q_i}(q_1, q_2, \ldots, q_p, t) = y_{Q_i}(q; t);\\
z_{Q_i} &= z_{Q_i}(q_1, q_2, \ldots, q_p; t) = z_{Q_i}(q; t);\\
\psi_i &= \psi_i(q_1, q_2, \ldots, q_p; t) = \psi_i(q; t);\\
\varphi_i &= \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_p, t) = \varphi_i(q; t);\\
\theta_i &= \theta_i(q_1, q_2, \ldots, q_p; t) = \theta_i(q; t),\\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{12.32}$$

respectiv

$$x_{Q_i} = x_{Q_i}(q_1, q_2, \ldots, q_p ; t) = x_{Q_i}(q ; t) ;$$

$$y_{Q_i} = y_{Q_i}(q_1, q_2, \ldots, q_p ; t) = y_{Q_i}(q ; t) ;$$

$$\varphi_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_p ; t) = \varphi_i(q ; t) \qquad (12.33)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

în cazul sistemelor mecanice plane, aceste relații reducîndu-se la simple identități de forma

$$x_{Q_i} = w_i = q_i \text{ etc.} \qquad (12.34)$$

pentru acei dintre parametrii de poziție variabili în timp ai sistemului mecanic care coincid cu unii dintre parametrii de poziție independenți și cu coordonatele generalizate corespunzătoare.

Se înțelege și aici că în cazul sistemelor mecanice cu elementele supuse numai la legături pasive staționare, numite încă și sisteme scleronome, timpul nu va mai apare în mod explicit în relațiile (12.32), respectiv (12.33).

12.2.4. Exprimarea parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor unui sistem mecanic în funcție de parametrii lagrangeieni și de derivatele lor în raport cu timpul

Prin derivarea în raport cu timpul a expresiilor (12.32) ale parametrilor de poziție variabili în timp ai unui sistem mecanic, se obțin relațiile

$$\dot{x}_{Q_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial x_{Q_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial x_{Q_i}}{\partial t} ; \quad \dot{\psi}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \psi_i}{\partial t} ;$$

$$\dot{y}_{Q_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial t} ; \quad \dot{\varphi}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} ;$$

$$\dot{z}_{Q_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial t} ; \quad \dot{\theta}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \theta_i}{\partial t} ,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (12.35)$$

care se reduc la simple identităţi de forma

$$\dot{x}_{Q_i} = \dot{q}_i \qquad \text{etc.} \tag{12.36}$$

pentru acei dintre parametrii de poziţie care au fost aleşi drept coordonate lagrangeiene.

Se înţelege şi aici că în cazul sistemelor mecanice scleronome (cu toate legăturile pasive staţionare), în relaţiile (12.35) nu vor mai figura derivatele parţiale în raport cu timpul ale parametrilor de poziţie variabili în timp ai sistemului mecanic respectiv.

Derivatele în raport cu timpul ale coordonatelor generalizate poartă numele de *viteze generalizate* şi sînt, ca şi coordonatele lagrangeiene, independente între ele, rezultînd de aici condiţiile

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} \begin{cases} = 0, \text{ pentru } i \neq j; \\ = 1, \text{ pentru } i = j. \end{cases} \tag{12.37}$$

$$(i, j = 1,2,\ldots,p).$$

În baza relaţiilor (12.35) vor putea fi scrise acum următoarele expresii pentru parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic :

$$\bar{v}_{Q_i} = \dot{x}_{Q_i}\bar{i} + \dot{y}_{Q_i}\bar{j} + \dot{z}_{Q_i}\bar{k} = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial x_{Q_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial x_{Q_i}}{\partial t}\right)\bar{i} +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial t}\right)\bar{j} + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial t}\right)\bar{k};$$

$$\bar{\omega}_i = \dot{\psi}_i\bar{k} + \dot{\varphi}_i\bar{k}'_i + \dot{\theta}_i\bar{n}_i = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right)\bar{k} +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)\bar{k}'_i + \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \theta_i}{\partial t}\right)\bar{n}_i,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

sau încă, grupînd în fiecare dintre relaţii termenii astfel încît să se scoată în factori comuni derivatele în raport cu timpul ale parametrilor lagrangeieni, mai rezultă

$$\bar{v}_{Q_i} = \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial x_{Q_i}}{\partial q_k}\bar{i} + \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial q_k}\bar{j} + \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial q_k}\bar{k}\right]\dot{q}_k +$$

$$+\left[\frac{\partial x_{Q_i}}{\partial t}\bar{i} + \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial t}\bar{j} + \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial t}\bar{k}\right];$$

$$\bar{\omega}_i = \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial q_k}\bar{k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\bar{k}_i' + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k}\bar{n}_i\right]\dot{q}_k +$$

$$+\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\bar{k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\bar{k}_i' + \frac{\partial \theta_i}{\partial t}\bar{n}_i\right].$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (12.38)$$

Sînt ușor de stabilit semnificațiile matematice ale parantezelor pătrate din expresiile vitezelor de translație și anume

$$\frac{\partial x_{Q_i}}{\partial q_k}\bar{i} + \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial q_k}\bar{j} + \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial q_k}\bar{k} = \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} = \bar{V}_{ik}(q, t);$$

$$\frac{\partial x_{Q_i}}{\partial t}\bar{i} + \frac{\partial y_{Q_i}}{\partial t}\bar{j} + \frac{\partial z_{Q_i}}{\partial t}\bar{k} = \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t} = \bar{V}_{i0}(q, t),$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (12.39)$$

mărimile $\bar{V}_{ik}$ și $\bar{V}_{i0}$ depinzînd deci numai de parametrii de poziție lagrangeieni și eventual și de timp pentru sistemele mecanice reonome.

De asemenea, analog notației

$$\frac{d\bar{\Theta}_i}{dt} = \frac{d\psi_i}{dt}\bar{k} + \frac{d\varphi_i}{dt}\bar{k}_i' + \frac{d\theta_i}{dt}\bar{n}_i,$$

introdusă în cinematica rigidului și care are semnificație de derivată numai în cazul rotațiilor efectuate în jurul unor axe de direcție fixă în spațiu, direcție după care sînt orientate și axele Oz și Q_iz_i',

Scanned with CamScanner

$\left(\psi_i \equiv 0;\ \theta_i \equiv 0;\ \dfrac{d\bar{\Theta}_i}{dt} = \dfrac{d\varphi_i}{dt}\bar{k}_i'\right)$, se vor putea introduce și aici notațiile

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial q_k}\bar{k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\bar{k}_i' + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k}\bar{n}_i = \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = \bar{\Omega}_{ik}(q;\ t);$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\bar{k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\bar{k}_i' + \frac{\partial \theta_i}{\partial t}\bar{n}_i = \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} = \bar{\Omega}_{i0}(q;\ t). \tag{12.40}$$

În baza notațiilor (12.39) și (12.40) pot fi scrise acum următoarele expresii ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic în funcție de coordonatele lagrangeiene, de vitezele generalizate și de timp dacă este vorba de sisteme reonome

$$\bar{v}_{Q_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{p} \bar{V}_{ik}\dot{q}_k + \bar{V}_{i0} = \bar{v}_{Q_i}(q, \dot{q};\ t);$$

$$\bar{\omega}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{p} \bar{\Omega}_{ik}\dot{q}_k + \bar{\Omega}_{i0} = \bar{\omega}_i(q, \dot{q};\ t).$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.41}$$

Pentru sistemele mecanice scleronome (supuse numai la legături pasive staționare) vor rezulta condițiile

$$\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t} = \bar{V}_{i0} \equiv 0;\quad \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} = \bar{\Omega}_{i0} \equiv 0, \tag{12.42}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Scanned with CamScanner

în baza cărora expresiile (12.41) ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic iau formele particulare

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{v}_{Q_i} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k}\,\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{p} \bar{V}_{ik}\,\dot{q}_k = \bar{v}_{Q_i}(q, \dot{q})\,; \\ \bar{\omega}_i &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\,\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{p} \bar{\Omega}_{ik}\,\dot{q}_k = \bar{\omega}_i(q, \dot{q}). \\ & \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \end{aligned}} \tag{12.43}$$

Dacă sistemul mecanic, considerat și acum staționar, are un singur grad de libertate, căruia îi corespunde deci un singur parametru lagrangeian — acesta fiind, de regulă, unghiul de rotație, φ_1, al elementului motor, situație frecvent întîlnită în studiul dinamic al mașinilor —, atunci relațiile (12.43) se reduc la forma cea mai simplă posibilă :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{v}_{Q_i} &= \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_1}\,\dot{q}_1 = \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial \varphi_1}\,\omega_1 = \bar{V}_i(\varphi_1)\,\omega_1\,; \\ \bar{\omega}_i &= \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_1}\,\dot{q}_1 = \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial \varphi_1}\,\omega_1 = \bar{\Omega}_i(\varphi_1)\,\omega_1. \\ & \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}} \tag{12.44}$$

Pentru derivatele parțiale $\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_j}$ și mărimile $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_i}$, care figurează în expresiile parametrilor cinematici de ordinul întîi ale elementelor sistemului mecanic stabilite mai sus, pot fi stabilite două serii de relații, cunoscute sub numele de *relațiile lui Lagrange*, care vor juca un rol important în stabilirea ecuațiilor dinamicii sistemelor de rigide.

Scanned with CamScanner

Acestea sînt :

— *Seria întîi a relaţiilor lui Lagrange*, reprezentată prin egalităţile

$$\boxed{\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_i} = \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_j}\,;\quad \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_j}}\,, \qquad (i, j = 1,2, \ldots, p). \tag{12.45}$$

Demonstraţia rezultă imediat prin dezvoltarea membrilor din dreapta ale egalităţilor precedente, scriindu-se

$$\frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}[\bar{v}_{Q_i}] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\sum_{h=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t}\right] =$$

$$= \sum_{h=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_h}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{q \partial_j}$$

şi

$$\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}[\bar{\omega}_i] = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left[\sum_{h=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\right] =$$

$$= \sum_{h=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\frac{\partial \dot{q}_h}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_j},$$

ca urmare a faptului că în baza condiţiilor (12.37) în suma de termeni după indicele h rămîne un singur termen, cel pentru care indicele h ia valoarea j, cu $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_j} = 1$.

— *Seria a doua a relaţiilor lui Lagrange*, reprezentate prin egalităţile

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_j}\right] = \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial q_j}\,;\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_j}\right] = \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial q_j}}\,,$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, p) \tag{12.46}$$

Demonstrația fiecărei dintre aceste două relații rezultă din comparația dezvoltărilor făcute pentru fiecare termen al egalității, adică scriindu-se

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_j}\right]=\sum_{h=1}^{p}\frac{\partial^2 \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_j \partial q_h}\dot{q}_h+\frac{\partial^2 \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_j\,\partial t}$$

și

$$\frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}[\bar{v}_{Q_i}]=\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_{h=1}^{p}\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_h}\dot{q}_h+\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t}\right]=$$

$$=\sum_{h=1}^{p}\frac{\partial^2 \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_h \partial q_j}\dot{q}_h+\frac{\partial^2 \bar{r}_{Q_i}}{\partial t\,\partial q_j},$$

respectiv

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_i}\right]=\sum_{h=1}^{p}\frac{\partial^2 \bar{\Theta}_i}{\partial q_j \cdot \partial q_h}\dot{q}_h+\frac{\partial^2 \bar{\Theta}_i}{\partial q_j \partial t}$$

și

$$\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}[\bar{\omega}_i]=\frac{\partial}{\partial q_j}\left[\sum_{h=1}^{p}\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial_h}\dot{q}_h+\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\right]=$$

$$=\sum_{h=1}^{p}\frac{\partial^2 \bar{\Theta}_i}{\partial q_h \partial q_j}\dot{q}_h+\frac{\partial^2 \bar{\Theta}_i}{\partial t\,\partial q_j},$$

și observîndu-se că pentru oricare din cele două relații dezvoltările corespunzătoare se deosebesc doar prin ordinea în care se efectuează derivatele parțiale de ordinul doi, ordine care, pentru funcțiile cu care se lucrează obișnuit în mecanică, nu afectează însă și valorile derivatelor.

Este ușor de înțeles că relația care exprimă vitezele de translație în funcție de parametrii lagrangeieni și de vitezele generalizate, precum și relațiile lui Lagrange demonstrate mai sus referitoare la vectorii de poziție ai polilor invariabil legați de elementele sistemu-

lui mecanic vor fi aplicabile și vectorului de poziție al unui punct arbitrar $B(\bar{r}'_i)$ al elementului (S_i), vector care, în baza relației evidente din fig. 12.9 :

$$\bar{r} = \bar{r}_{Q_i} + \bar{r}'_i = \bar{r}_{Q_i}(q;t) + [x'_i\, \bar{i}'_i(q;t) + y'_i\, \bar{j}'_i(q;t) + z'_i\, \bar{k}'_i(q;t)] = \bar{r}(q;t) \tag{12.47}$$

se prezintă și el ca o funcție continuă și derivabilă de coordonatele generalizate și de timp.

Se poate scrie deci următoarea expresie a vitezei punctului B în funcție de parametrii lagrangeieni și de vitezele generalizate

$$\boxed{\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_k}\, \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}}, \tag{12.48}$$

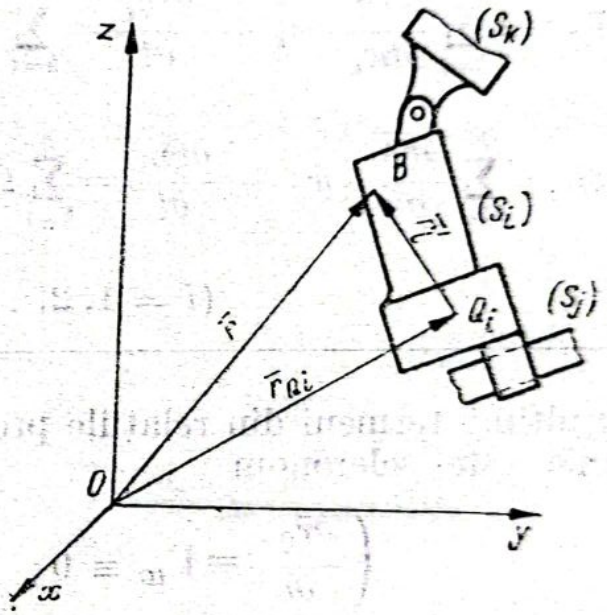


Fig. 12.9

iar pentru derivatele parțiale $\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}$ vor fi și aici valabile relațiile lui Lagrange, adică se vor putea scrie egalitățile

$$\boxed{\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_j}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{12.49}$$

respectiv

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \bar{v}}{\partial q_j}}, \quad (j = 1, 2, \ldots, p). \tag{12.50}$$

În cazul cînd coordonatele lagrangeiene ale unui sistem mecanic coincid chiar cu parametrii lui de poziţie independenţi, adică sînt valabile identităţile

$$q_j = w_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

atunci expresiile (12.41) ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ale elementelor sistemului mecanic considerat vor lua formele

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{v}_{Q_i} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial w_k} \dot{w}_k + \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{p} \bar{V}_{ik}(w\,;t)\,\dot{w}_k + \bar{V}_{io}(w\,;t)\,; \\ \bar{\omega}_i &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial w_k} \dot{w}_k + \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^{p} \bar{\Omega}_{ik}(w\,;t)\,\dot{w}_k + \bar{\Omega}_{io}(w\,;t), \\ & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}} \tag{12.51}$$

cu ultimii termeni din relaţiile precedente lipsind dacă sistemul mecanic este scleronom

$$\left(\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t} = \bar{V}_{io} \equiv 0\,; \quad \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} = \bar{\Omega}_{io} \equiv 0 \right).$$

Pentru sistemele mecanice plane rămîn valabile expresiile (12.41), respectiv formele lor particulare (12.43) şi (12.44), precum şi expresiile (12.51) dacă parametrii lagrangeieni ai sistemului coincid cu cei independenţi, cu singura deosebire că mărimile $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_j}$ şi $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}$ vor avea acum semnificaţii de derivate parţiale efective:

$$\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \bar{k}'_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \bar{k}\,; \quad \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \bar{k}'_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \bar{k}. \tag{12.52}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n\,; \quad j = 1, 2, \ldots, p)$$

Se consideră utilă și de astă dată ilustrarea, printr-un exemplu concret, a modului de exprimare a parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor unui sistem mecanic în funcție de parametrii lagrangeieni și de vitezele generalizate, în care scop se va reconsidera sistemul mecanic reprezentat în fig. 12.1, alegîndu-se drept coordonate lagrangeiene chiar cei trei parametri de poziție independenți ai sistemului, adică

$$q_1 = w_1 = \varphi_1; \quad q_2 = w_2 = \varphi_5; \quad q_3 = w_3 = y_{G_6}, \tag{12.53}$$

cărora le corespund următoarele viteze generalizate:

$$\dot{q}_1 = \dot{w}_1 = \omega_1; \quad \dot{q}_2 = \dot{w}_2 = \omega_5; \quad \dot{q}_3 = \dot{w}_3 = v_{G_6}. \tag{12.54}$$

Prin derivarea în raport cu timpul a relațiilor (12.31) rezultă expresiile

(1) $\dot{\varphi}_1 = \dot{q}_1 = \dot{w}_1 = \omega_1;$

(2) $\dot{\varphi}_2 = -\frac{z_1}{z_2}\dot{q}_1 = -\frac{z_1}{z_2}\omega_1;$

(3) $\dot{x}_{Q_3} = \frac{z_1}{z_2} r \sin\left(-\frac{z_1}{z_2} q_1\right)\dot{q}_1 = \frac{z_1}{z_2} r \sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\omega_1;$

(4) $\dot{y}_{Q_3} = -\frac{z_1}{z_2} r \cos\left(-\frac{z_1}{z_2} q_1\right)\dot{q} = -\frac{z_1}{z_2} r \cos\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\omega_1;$

(5) $\dot{z}_{Q_3} \equiv 0;$

(6) $\dot{\psi}_3 \equiv 0;$

(7) $\dot{\varphi}_3 = -$

$$-\frac{(r^2+h^2)\, r\frac{z_1}{z_2}\sin\left(-\frac{z_1}{z_2} q_1\right) - r^2 h \frac{z_1}{z_2}\left[1+\sin^2\left(-\frac{z_1}{z_2} q_1\right)\right]}{\left[h - r\sin\left(-\frac{z_1}{z_2} q_1\right)\right]\left[r^2+h^2-2rh\sin\left(-\frac{z_1}{z_2} q_1\right)\right]}\dot{q}_1 =$$

$$= \varphi_3'(\varphi_1)\,\omega_1;$$

(8) $\dot{\theta}_3 \equiv 0;$

(9) $$\dot{\varphi}_4 = -\frac{(r^2+h^2)r\frac{z_1}{z_2}\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}q_1\right)-2r^2h\frac{z_1}{z_2}\left[1+\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}q_1\right)\right]}{\left[h-r\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}q_1\right)\right]\left[r^2+h^2-2rh\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}q_1\right)\right]}\dot{q}_1 =$$

$$= \varphi_4'(\varphi_1)\,\omega_1; \tag{12.55}$$

(10) $$\dot{\varphi}_5 = \dot{q}_2 = \dot{w}_2 = \omega_5;$$

(11) $$\dot{y}_{G_6} = \dot{q}_3 = \dot{w}_3 = v_{G_6};$$

(12) $$\dot{\varphi}_7 = f'\left(-\frac{z_1}{z_2}q_1\right)\dot{q}_1 = f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\omega_1;$$

(13) $$\dot{\varphi}_8 = -\frac{L}{R}f'\left(-\frac{z_1}{z_2}q_1\right)\dot{q}_1 = -\frac{L}{R}f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\omega_1;$$

(14) $$\dot{y}_{G_9} = r\frac{L}{R}f'\left(-\frac{z_1}{z_2}q_1\right)\dot{q}_1 = r\frac{L}{R}f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\omega_1.$$

prin simbolurile φ_3', φ_4' și f' înțelegîndu-se derivatele funcțiilor respective în raport cu unghiul de rotație $\varphi_1 = q_1$.

În baza relațiilor precedente pot fi scrise acum și expresiile parametrilor cinematici de ordinul întîi ai celor nouă elemente care alcătuiesc sistemul mecanic considerat :

— *parametrul cinematic al elementului* (S_1), (blocul format din rotorul motorului, axul (Ax) și roata dințată $(\mathcal{R}_I)$, în rotație în jurul axei fixe (Δ_1)) :

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1\bar{k} = (\bar{k})\,\omega_1 = \bar{\Omega}_{11}\dot{q}_1; \tag{12.56}$$

— *parametrul cinematic al elementului* (S_2), (blocul format din roata dințată $(\mathcal{R}_{I'})$, arborele (Ar_2) și manivela (Mv), în rotație în jurul axei fixe (Δ_2)) :

$$\bar{\omega}_2 = -\frac{z_1}{z_2}\omega_1\bar{k} = \left(-\frac{z_1}{z_2}\bar{k}\right)\omega_1 = \bar{\Omega}_{21}\dot{q}_1; \tag{12.57}$$

— *parametrii cinematici ai elementului* (S_3), (biela (Bl) în mișcare plană în planul Oxy):

$$\bar{v}_{Q_3} = \frac{z_1}{z_2} r \left[\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \bar{i} - \cos\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \bar{j} \right] \omega_1 = \bar{V}_{31}\dot{q}_1;$$

$$\bar{\omega}_3 = \left[-\frac{(r^2+h^2)r\frac{z_1}{z_2}\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) - r^2 h \frac{z_1}{z_2}\left[1+\sin^2\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \right]}{\left[h - r\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \right]\left[r^2+h^2-2rh\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \right]} \bar{k} \right] \omega_1 =$$

$$= \bar{\Omega}_{31}\dot{q}_1; \tag{12.58}$$

— *parametrul cinematic al elementului* (S_4), (bucșa oscilantă (Bo) în rotație în jurul axei fixe (Δ_4)):

$$\bar{\omega}_4 = \left[-\frac{(r^2+h^2)r\frac{z_1}{z_2}\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) - r^2 h \frac{z_1}{z_2}\left[1+\sin^2\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \right]}{\left[h - r\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \right]\left[r^2+h^2-2rh\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \right]} \bar{k} \right] \omega_1 =$$

$$= \bar{\Omega}_{41}\dot{q}_1. \tag{12.59}$$

— *parametrul cinematic al elementului* (S_5), (discul (Dc) în rotație în jurul axei fixe (Δ_4)):

$$\bar{\omega}_5 = \omega_5 \bar{k} = (\bar{k})\omega_5 = \bar{\Omega}_{52}\dot{q}_2; \tag{12.60}$$

— *parametrul cinematic al elementului* (S_5), (contragreutatea (Cg_1) în translație rectilinie pe verticală):

$$v_{G_6} = \dot{y}_{G_6}\bar{j} = (\bar{j})\dot{y}_{G_6} = \bar{V}_{63}\dot{q}_3; \tag{12.61}$$

— *parametrul cinematic al elementului* (S_7), (pîrghia (Pg) în mișcare de rotație în jurul axei fixe (Δ_7)):

$$\bar{\omega}_7 = \left[f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right)\omega_1 \right]\bar{k} = \left[f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right)\bar{k} \right]\omega_1 = \bar{\Omega}_{71}\dot{q}_1; \tag{12.62}$$

Scanned with CamScanner

— *parametrul cinematic al elementului* (S_8), (șaiba (Sb), solidară cu tamburul (Tb), în mișcare de rotație în jurul axei fixe (Δ_4)):

$$\bar{\omega}_8 = \left[-\frac{L}{R} f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \omega_1 \right] \bar{k} = \left[-\frac{L}{R} f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \bar{k} \right] \omega_1 = \bar{\Omega}_{81}\dot{q}_1 ; \tag{12.63}$$

— *parametrul cinematic al elementului* (S_9), (contragreutatea (Cg_2) în mișcare de translație rectilinie pe verticală):

$$\bar{v}_{G_9} = \left[r\frac{L}{R} f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \omega_1 \right] \bar{j} = \left[r\frac{L}{R} f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \bar{j} \right] \omega_1 = \bar{V}_{91}\dot{q}_1 \tag{12.64}$$

După cum se observă, în cazul acestui sistem mecanic sclerocnom cu trei grade de libertate, funcțiile $\bar{V}_{ik}$ și $\bar{\Omega}_{ik}$ se reduc sau la niște vectori constanți, sau depind numai de unul singur dintre parametrii lagrangeieni și anume de coordonata $q_1 = w_1 = \varphi_1$, așa cum se vede și din tabelul de mai jos:

$$\bar{\Omega}_{11} = \bar{k} ;$$

$$\bar{\Omega}_{21} = -\frac{z_1}{z_2}\bar{k} ;$$

$$\bar{V}_{31} = \frac{z_1}{z_2} r \left[\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \bar{i} - \cos\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \bar{j} \right] = \bar{V}_{31}(\varphi_1) ;$$

$$\bar{\Omega}_{31} =$$

$$= \left[-\frac{(r^2+h^2) r \frac{z_1}{z_2} \sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) - r^2 h \frac{z_1}{z_2}\left[1+\sin^2\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \right]}{\left[h - r\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \right]\left[r^2+h^2-2rh\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1 \right) \right]} \bar{k} \right] =$$

$$= \bar{\Omega}_{31}(\varphi_1) ;$$

$$\bar{\Omega}_{41} =$$

$$= \left[-\frac{(r^2+h^2)\, r \frac{z_1}{z_2} \sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right) - r^2 h \frac{z_1}{z_2}\left[1+\sin^2\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\right]}{\left[h - r\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\right]\left[r^2+h^2-2rh\sin\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\right]} \bar{k} \right] =$$

$$= \bar{\Omega}_{41}(\varphi_1); \qquad (12.165)$$

$$\bar{\Omega}_{52} = \bar{k};$$

$$\bar{V}_{63} = \bar{j};$$

$$\bar{\Omega}_{71} = \left[f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\bar{k} \right] = \bar{\Omega}_{71}(\varphi_1);$$

$$\bar{\Omega}_{81} = \left[-\frac{L}{R} f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\bar{k} \right] = \bar{\Omega}_{81}(\varphi_1);$$

$$\bar{V}_{91} = \left[r\frac{L}{R} f'\left(-\frac{z_1}{z_2}\varphi_1\right)\bar{j} \right] = \bar{V}_{91}(\varphi_1).$$

12.3. *Sisteme de deplasări elementare ale unui sistem mecanic*

În strînsă legătură cu cele două probleme fundamentale, prezentate mai înainte, ale cinematicii sistemelor de rigide, apare necesitatea completării cu unele noi precizări a modului de definire a noţiunilor de deplasări elementare, la translaţii şi rotaţii, ale elementelor unui sistem mecanic, noţiuni care, aşa cum se va vedea ulterior, vor juca un rol deosebit în stabilirea ecuaţiilor dinamicii sistemelor de rigide.

Se va numi, în continuare, *sisteme de deplasări elementare ale unui sistem mecanic*, ansamblul tuturor deplasărilor elementare la translaţie şi rotaţie ale tuturor elementelor sistemului mecanic.

În funcţie de modul în care sînt concepute aceste deplasări elementare ale elementelor este posibilă definirea următoarelor trei categorii de sisteme de deplasări elementare ale unui sistem mecanic.

Scanned with CamScanner

12.3.1. Sistemul deplasărilor elementare reale ale unui sistem mecanic

Cunoștințele dobîndite din parcurgerea primului volum al lucrării permit să se tragă concluzia că evoluția stării de mișcare a unui sistem mecanic este condiționată, pe de o parte, de interacțiunile elementelor sistemului cu corpuri din mediul înconjurător care nu fac parte din sistem și, pe de altă parte, de interacțiunile chiar dintre elementele sistemului, măsura fiecărei dintre aceste categorii de interacțiuni constituind-o cîte un torsor al solicitărilor de interacțiune, cu componentele avînd fie caracter activ, fie caracter pasiv.

Pentru un sistem dat de solicitări active aplicate elementelor sistemului mecanic, solicitări care pot depinde de parametrii de poziție ai elementelor sistemului, de derivatele lor în raport cu timpul și de timp, mișcarea sistemului mecanic este, în general — și numai acestea vor fi cazurile luate în considerație în continuare — unic determinată, în sensul că, întocmai ca și în dinamica rigidului, sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării respectivului sistem mecanic va admite o soluție generală unic determinată; dar tot ca și în dinamica rigidului, și în cazul sistemelor mecanice va trebui să se lucreze, în problemele concrete, cu soluții particulare ale acelor sisteme de ecuații diferențiale, obținute din soluțiile generale prin determinarea constantelor de integrare cu ajutorul condițiilor inițiale, condiții care se referă la valorile inițiale ale parametrilor de poziție și ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului cu mișcări independente. Aceasta înseamnă că un același sistem mecanic și în aceleași condiții de solicitare activă va putea executa mișcări cu aceeași formă generală de evoluție, dar cu valori diferite ale parametrilor mișcării, în funcție de condițiile inițiale stabilite, întocmai cum un rigid în translație rectilinie sub acțiunea numai a unei forțe elastice conservative execută o mișcare oscilatorie armonică de pulsație determinată, dar cu amplitudinea și faza inițială depinzînd de datele inițiale.

Mișcarea unui sistem mecanic dat, supus la un sistem determinat de solicitări active și care corespunde condițiilor inițiale reale, corespunzătoare unei mișcări concrete efective, va fi numită *mișcare*

Scanned with CamScanner

reală, iar deplasările elementare la translaţie şi rotaţie ale elementelor sistemului la momentul t în această mişcare, de forma

$$\boxed{\begin{aligned} &d\bar{r}_{Q_i} = dx_{Q_i}\bar{i} + dy_{Q_i}\bar{j} + dz_{Q_i}\bar{k}; \\ &d\bar{\Theta}_i = d\psi_i\bar{k} + d\varphi_i\bar{k}'_i + d\theta_i\bar{n}_i, \\ &(i = 1,2, \ldots . n) \end{aligned}} \qquad (12.66)$$

vor constitui *sistemul deplasărilor elementare reale* ale sistemului mecanic corespunzător momentului t.

Existenţa sistemului de ecuaţii de legătură interioară de forma

$$f_\lambda(\ldots ; x_{Q_i}, y_{Q_i}, z_{Q_i}, \psi_i, \varphi_i, \theta_i ; \ldots ; t) = 0$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, n) \qquad (12.67)$$

introduce anumite restricţii nu numai parametrilor de poziţie ai elementelor sistemului mecanic, ci şi variaţiilor elementare ale lor, dx_{Q_i}, dy_{Q_i}, dz_{Q_i}, $d\psi_i$, $d\varphi_i$ şi $d\theta_i$, în conformitate cu relaţiile de mai jos, obţinute prin diferenţiere totală a ecuaţiilor de legătură (1.267):

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_i \left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{Q_i}} dx_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{Q_i}} dy_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_{Q_i}} dz_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \psi_i} d\psi_i + \right. \\ &\left. + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_i} d\varphi_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_i} d\theta_i \right] + \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} dt = 0, \\ &\lambda = 1, 2, \ldots, l \end{aligned}} \qquad (12.68)$$

respectiv cu relațiile

$$\sum_i \left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{Q_i}} \mathrm{d}x_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{Q_i}} \mathrm{d}y_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_{Q_i}} \mathrm{d}z_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \psi_i} \mathrm{d}\psi_i + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_i} \mathrm{d}\varphi_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_i} \mathrm{d}\theta_i \right] = 0 \qquad (12.69)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{int})$$

în cazul sistemelor mecanice scleronome $\left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial t} = 0 ; \ \lambda\, 1,2,\ldots,l_{int} \right)$.

Aceste relații vor purta numele de *condiții de compatibilitate cu legăturile interioare ale sistemului de deplasări elementare reale* ale sistemului mecanic.

În cazul cînd sistemului mecanic îi sînt aplicate și legături pasive exterioare care introduc ecuații de legătură între parametrii de poziție rămași variabili în timp ai elementelor respective, atunci, pe lîngă sistemul de condiții (12.69) vor mai trebui scrise și condițiile de compatibilitate cu legăturile exterioare ale sistemului de deplasări elementare reale; în cele mai multe din situații însă, parametrii de poziție ai unui element rămași variabili în timp în urma aplicării legăturilor exterioare sînt și independenți între ei în absența legăturilor interioare.

Se înțelege că variației dt a timpului, pentru care au fost definite deplasările elementare la translație și rotație, îi vor corespunde și variații elementare ale coordonatelor generalizate, dq_j, ($j = 1,2,\ldots$ $\ldots,p$), al căror ansamblu va purta numele de *sistem de deplasări (elementare) generalizate reale* ale sistemului mecanic.

Sistemul de deplasări reale la translație și rotație ale sistemului mecanic va putea fi exprimat în funcție de parametrii lagrangeieni de poziție și de deplasările generalizate reale în baza relațiilor

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{d}\bar{r}_{Q_i} = \bar{v}_{Q_i}\, \mathrm{d}t = \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t} \right] \mathrm{d}t ; \\ \\ \mathrm{d}\bar{\Theta}_i = \bar{\omega}_i\, \mathrm{d}t = \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} \right] \mathrm{d}t, \\ \qquad\qquad (i = 1,2,\ldots,n) \end{array} \right.$$

rezultînd astfel expresiile

$$\boxed{d\bar{r}_{Q_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t} dt; \quad d\bar{\Theta}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} dt \quad (i = 1, 2, \ldots, n)} \tag{12.70}$$

pentru sistemele mecanice reonome și expresiile

$$\boxed{d\bar{r}_{Q_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} dq_k; \qquad d\bar{\Theta}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} dq_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n)} \tag{12.71}$$

pentru sistemele mecanice scleronome.

Este ușor de înțeles că în cazul cînd parametrii lagrangeieni vor coincide cu parametrii de poziție independenți ai sistemului mecanic, ($q_i \equiv w_i$; $i = 1,2,\ldots,p$), deplasările generalizate reale dq_i vor coincide și ele cu variațiile dw_i ale acelor parametri de poziție independenți.

12.3.2. Sistemul deplasărilor posibile, compatibile cu legăturile, ale unui sistem mecanic

După cum s-a mai precizat, evoluția stării de mișcare a unui sistem mecanic dat, supus unui sistem determinat de solicitări active, se efectuează după legi determinate de variație a parametrilor de poziție independenți, dar cu parametrii mișcărilor depinzînd de condițiile inițiale; aceasta înseamnă că în afara mișcării reale, efectiv executată de sistemul mecanic în baza condițiilor inițiale reale, el ar avea posibilitatea să execute, sub acțiunea aceluiași sistem de solicitări active, și mișcări cu parametri modificați ai ecuațiilor finite ale mișcării, în funcție de modificările aduse condițiilor inițiale.

Aceste mișcări permise de legăturile aplicate sistemului mecanic, dar modificate în urma schimbărilor datelor inițiale, se numesc *mișcări posibile ale sistemului mecanic.*

Considerînd o asemenea mișcare posibilă a sistemului mecanic la momentul t, unei variații elementare a timpului, notată acum Δt, îi vor corespunde și acum variații elementare ale parametrilor de poziție ai elementelor sistemului, care se vor deosebi de cele corespunzătoare mișcării reale; aceste din urmă variații vor fi notate cu simbolurile Δx_{Q_i}, Δy_{Q_i}, Δz_{Q_i}, $\Delta\psi_i$, $\Delta\varphi_i$ și $\Delta\theta_i$, $(i = 1,2,\ldots,n)$ — simbolul Δ avînd însă aceeași semnificație matematică de operator diferențial ca și simbolul d — și vor fi numite *variații posibile ale* parametrilor de poziție ai sistemului mecanic.

Variațiilor posibile ale parametrilor de poziție, definite mai sus, le vor corespunde un ansamblu de deplasări elementare la translație și rotație, avînd expresiile

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta\bar{r}_{Q_i} = \Delta x_{Q_i}\,\bar{i} + \Delta y_{Q_i}\,\bar{j} + \Delta z_{Q_i}\,\bar{k}; \\ &\Delta\bar{\Theta}_i = \Delta\psi_i\,\bar{k} + \Delta\varphi_i\,\bar{k}'_i + \Delta\theta_i\,\bar{n}_i, \\ &(i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}} \tag{12.72}$$

cu o semnificație analogă celei a vectorului $d\bar{\Theta}$ pentru vectorul $\Delta\bar{\Theta}$.

Se înțelege că existența acestor deplasări elementare posibile va implica și acum necesitatea satisfacerii ecuațiilor de legătură, deci satisfacerea unor condiții de forma (12.68), respectiv de forma (12.69) pentru sistemele scleronome, cu singura deosebire a înlocuirii operatorului (d) cu operatorul (Δ), adică vor fi valabile relațiile

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_i \left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{Q_i}}\,\Delta x_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{Q_i}}\,\Delta y_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_{Q_i}}\,\Delta z_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \psi_i}\,\Delta\psi_i + \right. \\ &\left. + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_i}\,\Delta\varphi_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_i}\,\Delta\theta_i\right] + \frac{\partial f_\lambda}{\partial t}\,\Delta t = 0 \\ &(\lambda = 1,2,\ldots,l_{int}). \end{aligned}} \tag{12.73}$$

în cazul sistemelor reonome, respectiv relaţiile

$$\sum_i \left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{Q_i}} \Delta x_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{Q_i}} \Delta y_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial z_{Q_i}} \Delta z_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \psi_i} \Delta \psi_i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \varphi_i} \Delta \varphi_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i \right] = 0,$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{int}) \tag{12.74}$$

în cazul sistemelor mecanice scleronome.

Ansamblul deplasărilor elementare de forma (12.72), satisfăcînd condiţiile (12.73), respectiv (12.74) pentru sistemele mecanice scleronome, va purta numele de *sistemul deplasărilor posibile (elementare), compatibile cu legăturile,* ale sistemului mecanic considerat, iar relaţiile (12.73), sau (12.74) se vor numi şi ele *condiţii de compatibilitate cu legăturile interioare ale sistemului de deplasări osibile ale sistemului mecanic.*

Dacă şi legăturile pasive exterioare aplicate elementelor sistemului mecanic introduc ecuaţii de legătură exterioară între parametrii de poziţie rămaşi variabili în timp ai elementelor respective, atunci vor exista şi condiţii de compatibilitate cu legăturile exterioare ale sistemului de deplasări posibile ale sistemului mecanic considerat.

Variaţiilor posibile ale parametrilor de poziţie ale elementelor sistemului mecanic le vor corespunde variaţii posibile ale parametrilor lagrangeieni, Δq_i, $(i = 1,2,\ldots,p)$, care vor purta numele de *deplasări generalizate (elementare) posibile.*

Oricare din sistemele de deplasări posibile la translaţii şi rotaţii vor putea fi exprimate în funcţie de parametrii lagrangeieni de poziţie şi în funcţie de deplasările generalizate posibile prin relaţii analoge

relaţiilor (12.70), respectiv (12.71), adică se vor putea scrie expresiile

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\bar{r}_{Q_i} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} \Delta q_k + \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t} \Delta t; \\ \Delta\bar{\Theta}_i &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \Delta q_k + \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} \Delta t, \\ & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}} \tag{12.75}$$

pentru sistemele mecanice reonome, respectiv expresiile

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\bar{r}_{Q_i} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} \Delta q_k; \qquad \Delta\bar{\Theta}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \Delta q_k \\ & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}} \tag{12.76}$$

pentru sistemele mecanice scleronome.

Se înţelege şi aici că în cazul cînd parametrii lagrangeieni de poziţie vor coincide cu parametrii de poziţie independenţi ai sistemului mecanic, $(q_i = w_i;\ i = 1,2,\ldots,p)$, deplasările generalizate posibile Δq_i vor coincide şi ele cu variaţiile posibile Δw_i ale parametrilor de poziţie independenţi.

De asemenea, nu este greu de înţeles, chiar din modul de definire a sistemului de deplasări posibile ale unui sistem mecanic, că sistemul de deplasări reale(elementare) este de fapt unul din sistemele de deplasări posibile compatibile cu legăturile.

12.3.3. Sisteme de deplasări virtuale compatibile cu legăturile, ale unui sistem mecanic

Mişcările posibile au fost definite, în cadrul subpunctului precedent, în ipoteza mai generală că sistemul mecanic este reonom, adică cel puţin una din legăturile pasive aplicate lui este nestaţionară

Pentru un sistem mecanic dat şi pentru un sistem determinat de solicitări active aplicate elementelor lui, ar putea fi concepute însă şi alte mişcări corespunzătoare diverselor condiţii iniţiale, dar în

ipoteza că toate legăturile pasive aplicate sistemului ar deveni staţionare; o asemenea mişcare va fi numită în continuare *mişcare virtuală* şi în cazul sistemelor mecanice scleronome ea va coincide cu una din mişcările posibile ale sistemelor respective.

Considerînd şi acum mişcarea virtuală la momentul t a unui sistem mecanic, unei variaţii elementare a timpului, notată acum cu simbolul δt, îi vor corespunde şi de astă dată variaţii elementare ale parametrilor de poziţie ai elementelor sistemului, notate şi ele cu simbolurile δx_{Q_i}, δy_{Q_i}, δz_{Q_i}, $\delta\psi_i$, $\delta\varphi_i$ şi $\delta\theta_i$, simbolul δ avînd şi aici semnificaţia matematică de operator diferenţial, cu deosebirea însă că timpul va trebui considerat constant în expresiile, provenind din ecuaţiile de legătură, cărora le va fi aplicat.

Aceste din urmă variaţii vor fi numite *variaţii virtuale* ale parametrilor de poziţie ai sistemului mecanic şi lor le va corespunde un sistem de deplasări elementare la translaţii şi rotaţii definite prin relaţiile

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta\bar{r}_{Q_i} = \delta x_{Q_i}\bar{i} + \delta y_{Q_i}\bar{j} + \delta z_{Q_i}\bar{k}; \\ &\delta\Theta_i = \delta\psi_i\,\bar{k} + \delta\varphi_i\,\bar{k}'_i + \delta\theta_i\,\bar{n}_i, \qquad (i = 1, , k\ 2, \ldots, n) \end{aligned}} \tag{12.74}$$

cu vectorul $\delta\bar{\Theta}_i$ avînd o semnificaţie analogă celei a vectorului $d\bar{\Theta}_i$.

În cazul cînd variaţiile virtuale ale parametrilor de poziţie ai elementelor sistemului mecanic vor satisface ecuaţiile de legătură interioară considerate „staţionarizate", adică cu termenii $\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial t}$ consideraţi egali cu zero, deci cînd vor fi satisfăcute egalităţile

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_i \left[\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{Q_i}}\delta x_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{Q_i}}\delta y_{Q_i} + \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{Q_i}}\delta z_{Q_i} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial f_\lambda}{\partial\psi_i}\delta\psi_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i + \frac{\partial f_\lambda}{\partial\theta_i}\delta\theta_i \right] = 0 \\ &(\lambda = 1, 2, \ldots, l_{inl}) \end{aligned}} \tag{12.75}$$

atunci ansamblul termenilor $\delta\bar{r}_{Q_i}$ și $\delta\bar{\Theta}_i$ corespunzători tuturor elementelor sistemului mecanic va purta numele de *sistem de deplasări virtuale, compatibile cu legăturile interioare*, ale sistemului mecanic considerat, iar relațiile (12.75) se vor numi și ele *condiții de compatibilitate cu legăturile interioare ale deplasărilor virtuale ale* sistemului mecanic.

În mod analog vor putea fi stabilite condiții de compatibilitate cu legăturile pasive exterioare ale deplasărilor virtuale ale unui sistem mecanic, atunci cînd unele dintre legăturile exterioare pasive introduc ecuații de legătură exterioară între parametrii de poziție rămași variabili în timp ai elementelor respective.

Variațiilor virtuale ale parametrilor de poziție ai elementelor sistemului mecanic le vor corespunde și variații virtuale ale parametrilor lagrangeieni, numite încă și *deplasări virtuale generalizate*, δq_i, $(i = 1,2,\ldots,p)$.

Avînd în vedere semnificația matematică de operator diferențial a simbolului δ, cu restricția precizată, se înțelege că și în acest caz va fi posibilă exprimarea deplasărilor virtuale ale elementelor sistemului mecanic în funcție de coordonatele generalizate ale sistemului mecanic și de deplasările virtuale generalizate, aceste expresii avînd în aceste condiții, $\left(\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial t} = 0\,;\quad \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} = 0\right)$, formele

$$\delta\bar{r}_{Q_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k}\,\delta q_k\,; \qquad \delta\bar{\Theta}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.76}$$

Nu este greu de înțeles că în cazul sistemelor mecanice scleronome sistemele de deplasări virtuale vor coincide cu sistemele de deplasări posibile și că sistemul de deplasări reale va fi unul din sistemele de deplasări virtuale.

Pentru a se înțelege mai bine deosebirile existente între cele trei sisteme de deplasări elementare definite mai sus, se consideră utilă ilustrarea lor printr-un exemplu concret.

În acest scop se va considera sistemul mecanic plan din fig. 12.10, constituit din elementul (S_i) — pîrghia (Pg) — în rotație în

jurul unei axe fixe normale la planul figurii și trecînd prin punctul Q_i, din elementul (S_j) — reprezentat prin tamburul (Tb) solidar cu brațul (Bt) — în rotație în jurul unei axe fixe normale la planul figurii și trecînd prin punctul Q_j și din elementul (S_k), în translație rectilinie pe verticală; legătura dintre elementul (S_i) și elementul

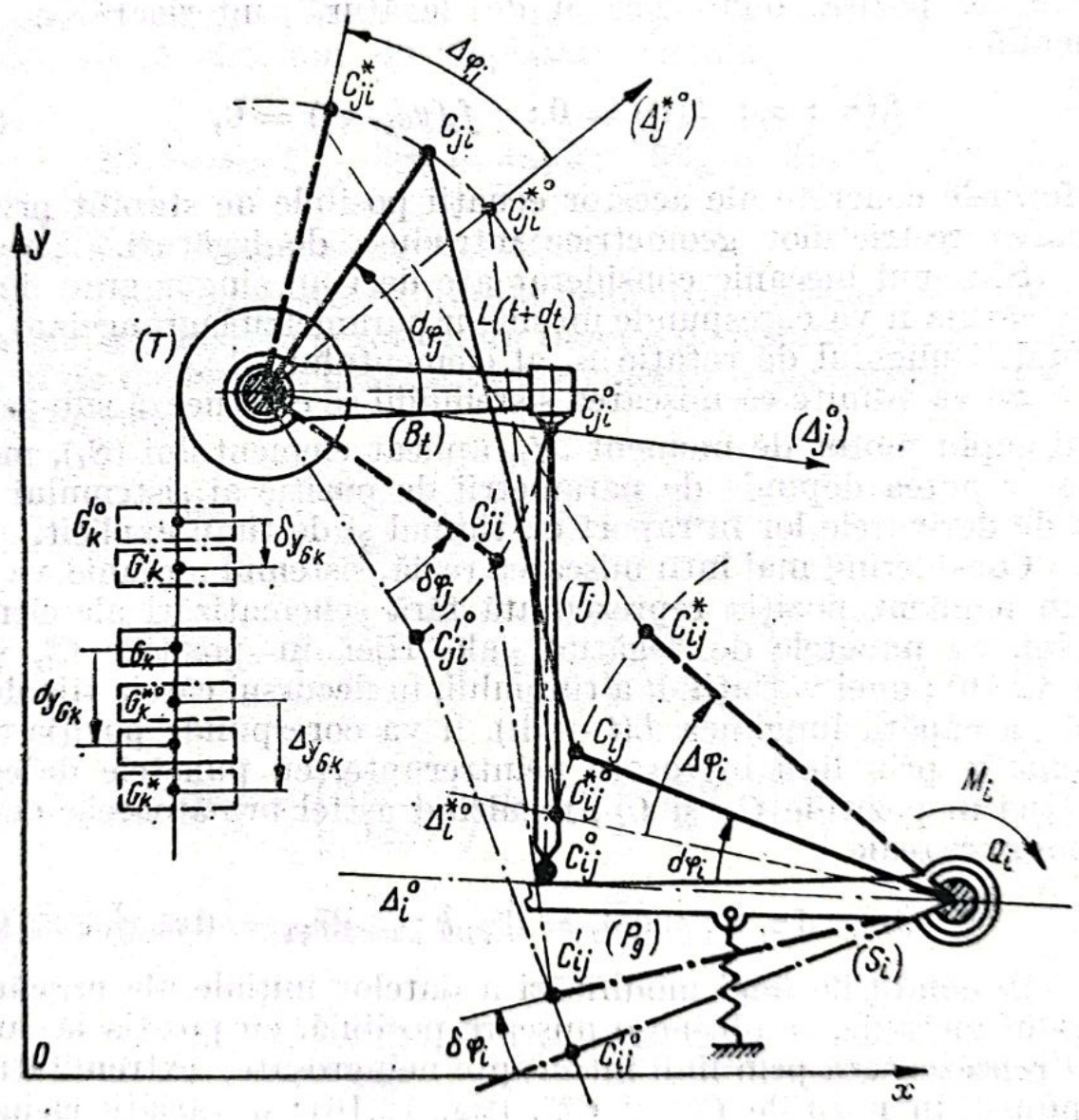


Fig. 12.10

(S_j) este realizată prin tija (Tj) de lungime variabilă în timp după o lege cunoscută $L = L(t)$, iar legătura dintre elementele (S_j) și (S_k) este realizată printr-un fir inextensibil, înfășurat peste tamburul (Tb).

Scanned with CamScanner

Singura legătură nestaționară este deci legătura prin tija (Tj), de lungime variabilă în timp.

Legăturile exterioare aplicate sistemului mecanic lasă variabili în timp numai trei parametri de poziție, reprezentați, în condițiile alegerii axelor reperului fix ca în figură, prin mărimile φ_i, φ_j și y_{G_k}; legăturile interioare aplicate sistemului introduc între cei trei parametrii de poziție două ecuații de legătură interioară de forma generală

$$f_1(\varphi_i\,;\ \varphi_j\,;\ L(t)) = 0\,; \quad f_2(y_{G_k},\ \varphi_j) = 0, \tag{12.77}$$

cu formele concrete ale acestor ecuații posibile de stabilit prin examinarea restricțiilor geometrice introduse de legături.

Sistemul mecanic considerat are deci un singur grad de libertate, căruia îi va corespunde un singur parametru lagrangeian, acesta putînd fi unghiul de rotație φ_i al elementului (S_i).

Se va admite că mișcarea sistemului se efectuează sub acțiunea unui cuplu motor de moment $\bar{\mathcal{M}}_i$, aplicat elementului (S_i), moment care ar putea depinde de parametrii de poziție ai sistemului mecanic, de derivatele lor în raport cu timpul și de timp explicit.

Considerînd mai întîi mișcarea reală, sistemul mecanic va ocupa la un moment poziția reprezentată fără schematizări ale elementelor lui, cu punctele de legătură ale tijei în pozițiile C^0_{ij} și C^0_{ji}, (fig. 12.10); unei variații $\mathrm{d}t$ a timpului, în decursul căreia tija de legătură va căpăta lungimea $L(t + \mathrm{d}t)$, îi va corespunde poziția trasată schematic prin linii îngroșate neîntrerupte, cu punctele de legătură ale tijei în pozițiile C_{ij} și C_{ji}, rezultînd astfel următoarele deplasări elementare reale

$$\mathrm{d}\bar{\Theta}_i = \mathrm{d}\varphi_i\,\bar{k}\,; \quad \mathrm{d}\bar{\Theta}_j = \mathrm{d}\varphi_j\,\bar{k}\,; \quad \mathrm{d}\bar{r}_{G_k} = \mathrm{d}y_{G_k}\,\bar{j}. \tag{12.78}$$

În condițiile unei modificări a datelor inițiale ale mișcării sistemului mecanic, se obține o mișcare posibilă, cu poziția la momentul t reprezentată prin linii întrerupte neîngroșate, extremitățile tijei aflîndu-se în pozițiile C^{*0}_{ij} și C^{*0}_{ji}, (fig. 12.10); o variație elementară Δt a timpului va aduce sistemul în poziția reprezentată prin linii întrerupte îngroșate, cu extremitățile tijei în pozițiile C^*_{ij} și C^*_{ji}. Vor rezulta astfel deplasările posibile

$$\Delta\bar{\Theta}_i = \Delta\varphi_i\,\bar{k}\,; \quad \Delta\bar{\Theta}_j = \Delta\varphi_j\,\bar{k}\,; \quad \Delta\bar{r}_{G_k} = \mathrm{d}y_{G_k}\,\bar{j}, \tag{12.79}$$

reprezentate în fig. 12.10.

Tot în condițiile unor modificări ale condițiilor inițiale, dar în ipoteza că lungimea tijei nu ar mai varia, sistemul mecanic va ocupa la momentul t poziția reprezentată în fig. 12.10 prin linii și puncte neîngroșate, cu extremitățile tijei în pozițiile $C_{ij}^{\prime 0}$ și $C_{ji}^{\prime 0}$; unei variații elementare δt a timpului îi va corespunde poziția trasată prin linii și puncte îngroșate a sistemului mecanic considerat cu tija de legătură de lungime constantă, deci cu extremitățile în pozițiile C'_{ij} și C'_{ji}, rezultînd astfel sistemul de deplasări virtuale

$$\delta\bar{\Theta}_i = \delta\varphi_i\,\bar{k}\,; \quad \delta\bar{\Theta}_j = \delta\varphi_j\,\bar{k}\,; \quad \delta\bar{r}_{G_k} = \delta y_{G_k}\,\bar{j}, \tag{12.80}$$

reprezentate de asemenea în fig. 12.10.

În ceea ce privește expresiile celor trei sisteme de deplasări elementare la translații și rotații, în funcție de parametrul lagrangian $q = \varphi_i$ și de deplasarea generalizată elementară corespunzătoare, ele vor avea formele :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{\Theta}_i &= \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varphi_i}\,\bar{k}\right)\mathrm{d}\varphi_i = (\bar{k})\,\mathrm{d}\varphi_i\,;\\
\mathrm{d}\bar{\Theta}_j &= \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\varphi_i}\,\bar{k}\right)\mathrm{d}\varphi_i + \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\,\bar{k}\right)\mathrm{d}t\,; \qquad (12.81)\\
\mathrm{d}\bar{r}_{G_k} &= \left(\frac{\partial y_{G_k}}{\partial\varphi_i}\,\bar{j}\right)\mathrm{d}\varphi_i + \left(\frac{\partial y_{G_k}}{\partial t}\,\bar{j}\right)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

pentru sistemul de deplasări reale, formele

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{\Theta}_i &= \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varphi_i}\,\bar{k}\right)\Delta\varphi_i = (\bar{k})\,\Delta\varphi_i\,;\\
\Delta\bar{\Theta}_j &= \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\varphi_i}\,\bar{k}\right)\Delta\varphi_i + \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial t}\,\bar{k}\right)\Delta t\,; \qquad (12.82)\\
\Delta\bar{r}_{G_k} &= \left(\frac{\partial y_{G_k}}{\partial\varphi}\,\bar{j}\right)\Delta\varphi_i + \left(\frac{\partial y_{G_k}}{\partial t}\,\bar{j}\right)\Delta t,
\end{aligned}$$

Scanned with CamScanner

pentru sistemul de deplasări posibile și formele

$$\begin{cases} \delta\bar{\Theta}_i = \left(\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_j}\,\bar{k}\right)\delta\varphi_i = (\bar{k})\,\delta\varphi_i; \\ \delta\bar{\Theta}_j = \left(\dfrac{\partial \varphi_j}{\partial \varphi_i}\,\bar{k}\right)\delta\varphi_i; \\ \delta\bar{r}_{G_k} = \left(\dfrac{\partial y_{G_k}}{\partial \varphi_i}\,\bar{j}\right)\delta\varphi_i, \end{cases} \tag{12.83}$$

pentru sistemul de deplasări virtuale compatibile cu legăturile.

Scanned with CamScanner

Capitolul VII

DINAMICA SISTEMELOR DE RIGIDE

§ 13. Probleme generale ale dinamicii sistemelor de rigide

În cadrul acestui paragraf vor fi extinse, la cazul sistemelor mecanice, noţiunile fundamentale ale dinamicii de caracteristici inerţiale, caracteristici cinetice şi caracteristici dinamice, noţiuni care au fost introduse pentru prima oară în dinamica rigidului.

13.1. *Caracteristicile inerţiale ale sistemelor mecanice*

13.1.1. Masa totală a unui sistem mecanic

Extinzînd, la dinamica sistemelor de rigide, noţiunea de masă a unui rigid, se va numi *masă totală a unui sistem mecanic* suma, extinsă asupra tuturor elementelor sistemului, ale maselor acestor elemente.

Dacă sistemul mecanic este constituit numai din rigide (S_i), $(i = 1,2,\ldots,n)$, considerate ca atare, cu masele M_i, atunci masa totală a sistemului mecanic va fi definită prin relaţia

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} M_i.} \tag{13.1}$$

În cazul cînd sistemul mecanic este format atît din corpuri considerate efectiv ca rigide, formînd un sub ansamblu notat cu simbolul $\mathscr{A}(S_i)$, cît şi din corpuri asimilabile cu puncte materiale, formînd un

subansamblu notat cu simbolul $\mathscr{A}(G_j)$, masa totală a sistemului mecanic va fi definită prin relaţia

$$\boxed{M = \sum_{\mathscr{A}(S_i)} M_i + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} m_j}, \tag{13.2}$$

simbolurile $\sum_{\mathscr{A}(S_i)}$ şi $\sum_{\mathscr{A}(G_j)}$ reprezentînd sumele extinse la cele două subansambluri menţionate mai sus; această defalcare pe subansamble este absolut necesară pentru a se atrage atenţia asupra faptului că la stabilirea caracteristicilor cinetice şi dinamice ale corpurile asimilate cu puncte materiale vor trebui făcute aproximările menţionate în dinamica punctului material.

O noţiune cu totul nouă care va fi introdusă în dinamica sistemelor rigide, legată de noţiunea de masă, este aceea de masă *redusă* a unui rigid, noţiune folosită în deosebi în cazul sistemelor mecanice cu un singur grad de libertate şi la care se ajunge observîndu-se că raportul dintre energia cinetică a unui element (S_i) al sistemului mecanic şi pătratul vitezei de translaţie a elementului motor (S_1), cu care se începe, de regulă, numerotarea elementelor, are, în ipoteza $\bar{v}_{G_1} \neq 0$, aceeaşi dimensiune fizică ca şi a unei mase, adică se poate scrie

$$\left[\frac{\mathscr{E}_i}{v_{G_1}^2}\right] = \frac{[\mathscr{E}_i]}{[v_{G_1}^2]} = \frac{L^2MT^{-2}}{L^2T^{-2}} = M.$$

În consecinţă, dublul acestui raport va fi numit *masă a elementului* (S_i) *redusă în centrul de masă al elementului motor*; exprimînd energia cinetică a elementului (S_i) cu ajutorul teoremei lui Koenig rezultă deci următoarea relaţie de definiţie a masei reduse M_{i_r} a elementului (S_i):

$$M_{i_r} = 2\frac{\mathscr{E}_i}{v_{G_1}^2} = M_i\left(\frac{v_{G_i}}{v_{G_1}}\right)^2 + 2\frac{\mathscr{E}_{i_{rot}}}{v_{G_1}^2}. \tag{13.3}$$

Prin extensie, se poate defini acum şi noţiunea de *masă a sistemului mecanic redusă în centrul de masă al elementului motor*, relaţia de definiţie a acestei noţiuni avînd forma

$$\boxed{M_r = \sum_{i=1}^{n} M_{i_r} = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i\left(\frac{v_{G_i}}{v_{G_1}}\right)^2 + 2\frac{\mathscr{E}_{i_{rot}}}{v_{G_1}^2}\right]} \tag{13.4}$$

În cazul sistemelor mecanice scleronome cu un singur grad de libertate, cu elementul motor executînd o translaţie rectilinie în lungul axei Ox, parametrul de poziţie independent al sistemului, coincizînd şi cu parametrul lagrangian, va fi abscisa x_{G_1} a centrului de masă G_1 al acestui element motor şi toţi parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului vor conţine ca factor pe $\dot{x}_{G_1} = v_{G_1}$; în această situaţie, prin simplificarea lui $v_{G_1}^2$, ($\bar{v}_{G_i} = \bar{V}_{i1}(x_{G_1})\dot{x}_{G_1}$; $\bar{\omega}_i = \bar{\Omega}_{i1}(x_{G_1})\dot{x}_{G_1}$), masa redusă a sistemului mecanic se va prezenta numai ca o funcţie de parametrul independent x_{G_1}, adică va rezulta

$$M_j = M_r(x_{G_1}). \tag{13.5}$$

Tot în strînsă legătură cu noţiunea de masă a unui sistem mecanic poate fi definită şi noţiunea de *centru de masă al sistemului mecanic* respectiv, reprezentînd punctul C din spaţiu determinat în raport cu polul fix O — originea reperului fix $Oxyz$ la care este raportată mişcarea sistemului — prin vectorul de poziţie $\bar{r}_C$, dat de relaţia

$$\boxed{\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{r}_{G_i}}{\sum_{i=1}^{n} M_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{r}_{G_i}}{M}}, \tag{13.5}$$

dacă toate elementele sistemului mecanic sînt considerate rigide ca atare, cu poziţiile centrelor de masă G_i determinate în raport cu polul O prin vectorii de poziţie $\bar{r}_{G_i}$, respectiv prin relaţia

$$\boxed{\bar{r}_C = \frac{\sum_{\mathscr{A}(S_i)} M_i \bar{r}_{G_i} + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} m_j \bar{r}_j}{\sum_{\mathscr{A}(S_i)} M_i + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} m_j}}, \tag{13.7}$$

dacă sistemul mecanic este constituit dintr-un subansamblu de rigide considerate ca atare, precum şi dintr-un subansamblu de corpuri asimilabile ca puncte materiale.

Scanned with CamScanner

Relațiilor vectoriale precedente le corespund ecuațiile de proiecții pe axele fixe

$$\boxed{x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i x_{G_i}}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i y_{G_i}}{M}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i z_{G_i}}{M}}, \tag{13.8}$$

respectiv

$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{\mathscr{A}(S_i)} M_i x_{G_i} + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} m_j x_j}{M}; \quad y_C = \frac{\sum_{\mathscr{A}(S_i)} M_i y_{G_i} + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} m_j y_j}{M}; \\ z_C &= \frac{\sum_{\mathscr{A}(S_i)} M_i z_{G_i} + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} m_j z_j}{M}, \end{aligned}} \tag{13.9l}$$

care dau coordonatele, față de reperul fix, ale centrului de masă al sistemului mecanic.

Mărimile

$$\boxed{\overline{\mathscr{S}} = \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{r}_{G_i} = M \bar{r}_C}, \tag{13.10}$$

respectiv

$$\boxed{\overline{\mathscr{S}} = \sum_{\mathscr{A}(S_i)} M_i \bar{r}_{G_i} + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} m_j \bar{r}_j = M \bar{r}_C}, \tag{13.11}$$

se vor numi *momente statice ale sistemului mecanic în raport cu polul fix*, iar expresiile de la numărătorii fracțiilor (13.8) și (13.9), ce dau coordonatele centrului de masă, vor purta numele de *momente statice ale sistemului mecanic în raport cu planele de coordonate Oyz, Ozx și Oxy*.

Scanned with CamScanner

În legătură cu noțiunea de centru de masă al unui sistem mecanic mai trebuie făcută menționea că dacă în dinamica rigidului această noțiune se confunda cu cea de centru de greutate, în schimb în dinamica sistemelor mecanice ultima noțiune nu mai poate avea sens decît în cazul unui sistem mecanic în stare de repaus. Justificarea afirmației precedente o constituie faptul că noțiunea de centru de greutate al unui ansamblu implică rigiditatea ansamblului de puncte de aplicație ale greutății porțiunilor componente și deci poziția fixă a punctului de aplicație al greutății totale în raport cu centrele de greutate parțiale, condiții care nu sînt satisfăcute în cazul sistemelor mecanice în mișcare.

Se confirmă astfel menționea făcută în dinamica rigidului că noțiunea de centru de masă are o sferă mai largă decît cea de centru de greutate, ele coincizînd numai în cazul ansamblurilor rigide de corpuri.

13.1.2. Momente de inerție

Inerția la variația stărilor de mișcare de rotație a rigidelor ce alcătuiesc un sistem mecanic va fi măsurată, ca și în dinamica rigidului, prin componentele tensorului de inerție, componente al căror număr depinde de modul de alegere a axelor invariabil legate de elementele sistemului mecanic.

Prin alegerea axelor reperului invariabil legat de elementul (S_i), $(i = 1,2,\ldots, n)$, al sistemului mecanic astfel încît să coincidă cu axele centrale de inerție ale elementului — sau, cel puțin, cu axele principale de inerție corespunzătoare polului Q_i din element în cazul cînd acest pol, din diferite motive, nu va putea fi ales în centrul de masă G_i — , matricea tensorului de inerție a elementului considerat se va reduce numai la matricea diagonală

$$\mathbf{J}_{G_i} = \begin{Vmatrix} J'_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{iz} \end{Vmatrix} \tag{13.12}$$

respectiv

$$\mathbf{J}_{Q_i} = \begin{Vmatrix} J'_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{iz} \end{Vmatrix} \tag{13.13}$$

dacă polul Q_i, invariabil legat de elementul (S_i), nu coincide cu centrul de masă G_i, elementele de pe diagonala ultimei matrice reprezentînd acum momentele principale de inerție relative la polul Q_i.

O noțiune analogă aceleia de masă redusă poate fi introdusă și pentru cea de-a doua serie de caracteristici inerțiale, observîndu-se că dacă se împarte energia cinetică a elementului (S_i) la pătratul vitezei unghiulare a elementului motor (S_1), rezultă, în condițiile $\omega_1 \neq 0$, că acest raport are dimensiunile fizice ale unui moment de inerție:

$$\left[\frac{\mathscr{E}_i}{\omega_1^2}\right] = \frac{[\mathscr{E}_i]}{[\omega_1^2]} = \frac{L^2 M T^{-2}}{T^{-2}} = L^2 M = [J]. \tag{13.14}$$

În consecință, dublul raportului dintre energia cinetică a elementului (S_i), dată de teorema lui Koenig, și dintre pătratul vitezei unghiulare a elementului motor, adică expresia

$$J_{i_r} = M_i \left(\frac{v_{G_i}}{\omega_1}\right)^2 + 2\frac{\mathscr{E}_{i_{rot}}}{\omega_1^2}, \tag{13.15}$$

se va numi *moment de inerție al elementului* (S_i) *redus la axa de rotație a elementului motor*, iar suma, extinsă la toate elementele sistemului mecanic a acestor momente de inerție reduse, adică expresia

$$\boxed{J_r = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i\left(\frac{v_{G_i}}{\omega_1}\right)^2 + 2\frac{\mathscr{E}_{i_{rot}}}{\omega_1^2}\right]} \tag{13.16}$$

se va numi *moment de inerție al sistemului mecanic redus la axa elementului motor*.

În cazul sistemelor mecanice cu elementele executînd numai rotaţii în jurul unor axe de direcţii fixe în spaţiu, $\left(\mathscr{E}_{t_{rot}} = \frac{1}{2} J_i \omega_i^2\right)$, expresia precedentă a momentului de inerţie redus al sistemului mecanic va lua forma

$$\boxed{J_r = \sum_{i=1}^{n} \left[M_i \left(\frac{v_{G_i}}{\omega_1} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2 \right]} \tag{13.17}$$

Pentru sistemele mecanice scleronome cu un singur grad de libertate, cu poziţia elementului motor (conducător) determinată prin unghiul de rotaţie φ_1, reprezentînd parametrul de poziţie independent şi în acelaşi timp parametrul lagrangeian de poziţie al sistemului, toţi parametrii cinematici de ordinul întîi ai celorlalte elemente ale sistemului vor fi funcţii de unghiul de rotaţie φ_1 şi de derivata lui în raport cu timpul, aceasta din urmă apărînd, aşa cum s-a arătat în exemplele studiate în cinematica sistemelor de rigide, ca factor comun $(\bar{v}_{G_i} = \bar{V}_{i1}(\varphi_1)\omega_1 ;\ \bar{\omega}_i = \bar{\Omega}_{i1}(\varphi_1)\omega_1)$; în consecinţă, pentru aceste sisteme, în rapoartele $\frac{v_{G_i}}{\omega_1}$ şi $\frac{\omega_i}{\omega_1}$, viteza unghiulară ω_1 a elementului conducător se va simplifica, rezultînd de aici că momentul de inerţie redus al sistemului mecanic se va prezenta ca o funcţie numai de parametrul de poziţie independent φ_1, adică se va putea scrie

$$J_r = J_r(\varphi_1). \tag{13.18}$$

13.1.3. Caracteristici inerţiale generalizate (coeficienţi de inerţie)

În cazul sistemelor mecanice scleronome poate fi definit şi un sistem de caracteristici generalizate, aşa cum se va arăta în continuare.

Considerînd şi acum un element $(\mathcal{S}_i)$ oarecare al sistemului mecanic, căruia i se va ataşa invariabil reperul $G_i x_i' y_i' z_i'$ cu axele coincizînd cu axele centrale de inerţie ale elementului respectiv, energia

cinetică a acestui element va fi dată de cunoscuta relație exprimînd teorema lui Koenig relativă la energia cinetică, relație avînd, în condițiile unei mișcări spațiale a elementului, forma

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} M_i v_{G_i}^2 + \mathcal{E}_{i_{rot}} = \frac{1}{2} [M_i v_{G_i}^2 + (J'_{i_x} \omega_{i_x}'^2 + J'_{i_y} \omega_{i_y}'^2 + J'_{i_z} \omega_{i_z}'^2)]. \tag{13.19}$$

În condițiile precizate, parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementului considerat vor avea următoarele expresii în funcție de parametrii lagrangeieni ai sistemului și de vitezele generalizate:

$$\bar{v}_{G_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k; \quad \bar{\omega}_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k, \tag{13.20}$$

cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_i$ avînd următoarele proiecții pe axele reperului legat de elementul (S_i)

$$\omega'_{i_x} = \bar{\omega}_i \bar{i}'_i = \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k\right] \bar{i}'_i = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{i}'_i\right) \dot{q}_k;$$

$$\omega'_{i_y} = \bar{\omega}_i \bar{j}'_i = \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k\right] \bar{j}'_i = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{j}'_i\right) \dot{q}_k; \tag{13.21}$$

$$\omega'_{i_z} = \bar{\omega}_i \bar{k}'_i = \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k\right] \bar{k}'_i = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{k}'_i\right) \dot{q}_k.$$

și cu semnificațiile de mai jos pentru produsele scalare de forma $\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{i}'_i\right)$, $\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{j}'_i\right)$ și $\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{k}'_i\right)$:

$$\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{i}'_i\right) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \bar{k} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \bar{k}'_i + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k} \bar{n}_i\right) \bar{i}'_i =$$

$$= \frac{\partial \psi_i}{\partial q_k} \alpha'_{xz} + \frac{\partial \theta_i}{\partial q_k} \cos \varphi_i;$$

$$\left(\frac{\partial\overline{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right) = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial q_k}\bar{k} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i + \frac{\partial\theta_i}{\partial q_k}\bar{n}_i\right)\bar{j}'_i =$$

$$= \frac{\partial\psi_i}{\partial q_k}\alpha^i_{yz} - \frac{\partial\theta_i}{\partial q_k}\sin\varphi;$$

$$\left(\frac{\partial\overline{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right) = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial q_k}\bar{k} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i + \frac{\partial\theta_i}{\partial q_k}\bar{n}_i\right)\bar{k}'_i =$$

$$= \frac{\partial\psi_i}{\partial q_k}\alpha^i_{zz} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_k}.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, ,2 , \ldots, p) \tag{13.22}$$

În baza relațiilor (13.20) și (13.21), diverșii termeni din membrul drept al expresiei (13.19) a energiei cinetice a elementului (S_i) vor căpăta următoarele dezvoltări:

$$M_i\bar{v}^2_{G_i} = M_i\left(\sum_{h=1}^{p}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}\dot{q}_h\right)\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{p}\left[M_i\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\right]\dot{q}_h\dot{q}_k;* \tag{13.23}$$

$$J'_{ix}\omega'^2_{ix} = J'_{ix}\left[\sum_{h=1}^{p}\left(\frac{\partial\overline{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{i}'_i\right)\dot{q}_h\right]\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial\overline{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{i}'_i\right)\dot{q}_k\right] =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{p}\left[J'_{ix}\left(\frac{\partial\overline{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{i}'_i\right)\left(\frac{\partial\overline{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{i}'_i\right)\right]\dot{q}_h\dot{q}_k; \tag{13.24}$$

---

* La cele două sume neefectuate care se înmulțesc în relațiile de mai sus s-au pus indici de sumare diferiți pentru ca în produs să apară toți termenii, atît cei pătratici, cît și cei dreptunghiulari.

Scanned with CamScanner

$$J'_{i_y}\omega'_{i_y} = J'_{i_y}\left[\sum_{h=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{j}'_i\right)\dot{q}_h\right]\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right)\dot{q}_k\right] = \tag{13.25}$$

$$= \sum_{h,k=1}^{p}\left[J'_{i_y}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{j}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right)\right]\dot{q}_h\dot{q}_k;$$

$$J'_{i_z}\omega'_{i_z} = J'_{i_z}\left[\sum_{h=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{k}'_i\right)\dot{q}_h\right]\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right)\dot{q}_k\right] = \tag{13.26}$$

$$= \sum_{h,k=1}^{p}\left[J'_{i_z}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{k}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right)\right]\dot{q}_h\dot{q}_k,$$

iar întreaga expresie a energiei cinetice va lua acum forma

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{p}\left[M_i\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + J'_{i_x}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{i}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{i}'_i\right) + \right. \tag{13.27}$$

$$\left. + J'_{i_y}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{j}'\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right) + J'_{i_z}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{k}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right)\right]\dot{q}_h\dot{q}_k.$$

Mărimile

$$g^i_{hk} = g^i_{kh} = M_i\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + J'_{i_x}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_h}{\partial q_h}\bar{i}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{i}'_i\right) + \tag{13.28}$$

$$+ J'_{i_y}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{j}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right) + J'_{i_z}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{k}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right) = g^i_{hk}(q),$$

depinzînd, în cazul sistemelor mecanice scleronome, numai de parametrii lagrangeieni de poziție, se numesc *caracteristici inerțiale generalizate* ale elementului (S_i), iar sumele, extinse la toate elementele sis-

Scanned with CamScanner

temului mecanic, ale acestor caracteristici corespunzătoare unei anumite perechi de indici h și k, adică mărimile

$$g_{hk} = g_{kh} = \sum_{i=1}^{n} g_{hk}^{i} = \sum_{i=1}^{n} \left[M_i \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + J'_{i_x} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h} \bar{i}'_i \right) \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{i}'_i \right) + \right.$$

$$\left. + J'_{i_y} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h} \bar{j}'_i \right) \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{j}'_i \right) + J'_{i_z} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h} \bar{k}'_i \right) \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \bar{k}'_i \right) \right] = g_{hk}(q)$$

$$(h, k = 1, 2, \ldots, p) \qquad (13.29)$$

poartă numele de *caracteristici inerțiale generalizate ale sistemului mecanic*, sau încă, numele de *coeficienți de inerție ai sistemului mecanic.*

Ansamblul acestor coeficienți de inerție, în număr total de p^2, dar satisfăcînd condiția $g_{hk} = g_{kh}$, $(h, k = 1,2,\ldots, p)$, formează o matrice pătratică simetrică de forma

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \cdots g_{1k} \cdots g_{1p} \\ g_{21} & g_{22} \cdots g_{2k} \cdots g_{2p} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ g_{h1} & g_{h2} \cdots g_{hk} \cdots g_{hp} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ g_{p1} & g_{p2} \cdots g_{pk} \cdots g_{pp} \end{Vmatrix} = ||g|| \qquad (13.30)$$

care va fi numită *matricea coeficienților de inerție*, sau, mai simplu, *matricea de inerție a sistemului mecanic.*

Denumirea de „caracteristici inerțiale generalizate" dată mărimilor g_{hk} este justificată de următoarele semnificații fizice ale lor :

— au dimensiuni fizice de mase, dacă coordonatele generalizate q_h și q_k, ai căror indici definesc coeficientul de inerție g_{hk}, sînt coordonate carteziene, sau mărimi reprezentînd lungimi ;

Scanned with CamScanner

— au dimensiuni fizice de momente statice dacă una dintre coordonatele generalizate q_h și q_k, care definesc coeficientul de inerție g_{hk}, este o coordonată carteziană și cealaltă un unghi;

— au dimensiuni fizice de momente de inerție dacă coordonatele generalizate q_h și q_k din coeficientul de inerție g_{hk} sînt, ambele, unghiuri ale lui Euler.

În cazul sistemelor mecanice care conțin elemente ce execută numai rotații în jurul unor axe de direcții fixe în spațiu, axe luate totdeauna ca axe $Q_i z'_i$, $\left(\omega'_{i_x} = \omega'_{i_y} = 0;\ \omega'_{i_z} = \omega_i;\ \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i;\ \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k};\ J'_{i_z} = J_i\right)$, expresiile (13.29) ale coeficienților de inerție iau formele simplificate

$$\boxed{g_{hk} = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + J_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_h}\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\right]. \quad (h, k = 1, 2, \ldots, p)} \tag{13.31}$$

Este evident că în categoria acestor din urmă sisteme mecanice intră și sistemele mecanice scleronome plane.

Dacă elementul (S_i) al sistemului mecanic este asimilat cu un punct material $(\bar{\omega}_i \approx 0;\ J'_{i_x} = J'_{i_y} = J'_{i_z} \approx 0)$, atunci expresia (13.28) a caracteristicii generalizate a acestui element va trebui înlocuită cu expresia aproximativă

$$g^i_{hk} = m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}, \quad (h, k = 1, 2, \ldots, p) \tag{13.32}$$

iar dacă întregul sistem mecanic este constituit numai din puncte materiale, coeficienții de inerție ai sistemului mecanic vor căpăta formele simplificate:

$$\boxed{g_{hk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_h}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, p).} \tag{13.33}$$

Scanned with CamScanner

Observînd că numărul coeficienţilor de inerţie ai unui sistem mecanic este dat de pătratul numărului gradelor lui de libertate, rezultă că în cazul unui sistem mecanic scleronom cu un singur grad de libertate va exista un singur coeficient de inerţie ; întrucît în cazul acestor sisteme elementele lor execută numai rotaţii în jurul unor axe de direcţii fixe în spaţiu, luate totdeauna ca axe $Q_i z_i'$, pentru calculul coeficientului de inerţie al sistemului va trebui aplicată formula (13.31), cu $h = k = 1$, rezultînd astfel următoarea expresie a acestui coeficient :

$$\boxed{g_{11} = g = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q}\right)^2 + J_i\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i V_{i1}^2 + J_i \Omega_{i1}^2\right] = g(q)} \tag{13.34}$$

Dacă coordonata generalizată q coincide cu abscisa $x_{G_i} \neq 0$ a centrului de masă al elementului motor (S_1), coeficientul de inerţie definit mai sus va reprezenta masa redusă la centrul de masă al elementului conducător al sistemului mecanic, adică se va putea scrie

$$\boxed{g = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial x_{G_1}}\right)^2 + J_i\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{G_1}}\right)^2\right] = M_r = g(x_{G_1})}, \tag{13.35}$$

iar dacă parametrul lagrangeian q va coincide cu unghiul de rotaţie $\varphi_1 \neq 0$ al elementului motor (S_1), atunci coeficientul de inerţie redus definit prin relaţia (13.34) va reprezenta momentul de inerţie redus în axa de rotaţie a elementului motor al sistemului mecanic, adică :

$$\boxed{g = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial \varphi_1}\right)^2 + J_i\left(\frac{\partial \varphi_r}{\partial \varphi_1}\right)^2\right] = J_r = g(\varphi_1)} \tag{13.36}$$

În fine, în cazul unui sistem mecanic redus la un s ingur rigid în mişcare liberă plană, deci cu 3 grade de libertate, cu coordonatele

generalizate reprezentate chiar prin parametrii săi de poziţie, $q_1 = x_G$; $q_2 = y_G$; $q_3 = \varphi$), vor rezulta condiţiile

$$\frac{\partial \bar{r}_G}{\partial q_1} = \frac{\partial \bar{r}_G}{\partial x_G} = \bar{i}; \quad \frac{\partial \bar{r}_G}{\partial q_2} = \frac{\partial \bar{r}_G}{\partial y_G} = \bar{j}; \quad \frac{\partial \bar{r}_G}{\partial q_3} = \frac{\partial \bar{r}_G}{\partial \varphi} = 0$$

şi

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial q_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_G}\bar{k}' = 0; \quad \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial q_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_G}\bar{k}' = 0; \quad \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial q_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}\bar{k}' = \bar{k}',$$

în baza cărora se obţin următoarele valori pentru coeficienţii de inerţie:

$$g_{11} = M; \; g_{12} = 0; \; g_{13} = 0; \; g_{21} = 0; \; g_{22} = M; \; g_{23} = 0, \tag{13.37}$$

$$g_{31} = 0; \; g_{32} = 0; \; g_{33} = J$$

iar matricea de inerţie va lua forma

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I \end{Vmatrix}. \tag{13.38}$$

13.2. *Caracteristicile cinetice ale sistemelor mecanice*

În cele ce urmează vor fi extinse la cazul sistemelor de rigide noţiunile de caracteristici cinetice definite în dinamica rigidului.

1°. Impulsul unui sistem mecanic

Alegînd, de regulă, polii invariabil legaţi de elementele sistemului mecanic chiar în centrele lor de masă, se va defini *impulsul unui sistem mecanic* ca fiind mărimea reprezentată prin suma geometrică

a impulsurilor tuturor elementelor ce alcătuiesc sistemul mecanic, acest impuls avînd deci expresia

$$\boxed{\overline{\mathscr{H}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{H}_i} = \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_{G_i}} \tag{13.39}$$

în cazul cînd toate elementele sistemului mecanic sînt considerate rigide ca atare şi expresia

$$\boxed{\overline{\mathscr{H}} = \sum_{\mathscr{A}(S_i)} M_i \bar{v}_{G_i} + \sum_{\mathscr{A}(G_i)} m_j \bar{v}_j} \tag{13.40}$$

în cazul cînd sistemul mecanic este alcătuit dintr-un subansamblu de rigide şi un subansamblu de puncte materiale.

Dacă în unul din elementele sistemului mecanic, (S_k), polul invariabil legat de el nu va putea fi ales în centrul său de masă, $(Q_k \not\equiv G_k)$, atunci expresia impulsului său va fi scrisă sub forma corespunzătoare acestui pol, adică

$$\overline{\mathscr{H}}_k = M_k(\bar{v}_{Q_k} + \bar{\omega}_k \times \bar{r}'_{G_k}). \tag{14.41}$$

Pentru impulsul unui sistem mecanic poate fi scrisă şi o altă expresie, analogă aceleia care exprimă teorema lui Koenig relativă la impuls în dinamica rigidului, observîndu-se că prin derivarea în raport cu timpul a relaţiilor (13.10), respectiv (13.11) pentru sisteme ce conţin şi puncte materiale, se obţin relaţiile

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \dot{\bar{r}}_{G_i} = M \dot{\bar{r}}_C,$$

respectiv

$$\sum_{(\mathscr{A}S_i)} M_i \dot{\bar{r}}_{G_i} + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} m_j \dot{\bar{r}}_j = M \dot{\bar{r}}_C,$$

conducînd, dacă se ţine seama de semnificaţiile termenilor, la concluzia

$$\boxed{\overline{\mathscr{H}} = M \bar{v}_C}$$

$\bar{v}_C$ fiind viteza centrului de masă al sistemului mecanic; ultima relație exprimă *teorema lui Koenig relativă la impuls în dinamica sistemelor mecanice*, cu următoarea formulare:

„Impulsul unui sistem mecanic în mișcare este egal cu impulsul centrului de masă al sistemului, considerîndu-se concentrată în acest centru întreaga masă a sistemului mecanic".

2°. Momentul cinetic al unui sistem mecanic

Trebuie făcută de la început precizarea că un asemenea moment cinetic va putea fi definit numai în raport cu un pol comun tuturor elementelor unui sistem mecanic, acesta putînd fi fie polul fix, reprezentînd originea reperului absolut la care este raportată mișcarea sistemului mecanic, fie centrul de masă al sistemului mecanic.

a) *Momentul cinetic în raport cu polul fix al unui sistem mecanic.* Se definește *momentul cinetic în raport cu polul fix al unui sistem mecanic* ca fiind mărimea reprezentată prin suma geometrică a momentelor cinetice în raport cu polul fix considerat ale tuturor elementelor ce formează sistemul mecanic.

Prin alegerea polilor invariabil legați de elementele sistemului mecanic în centrele lor de masă, momentul cinetic al fiecărui element va putea fi calculat cu ajutorul teoremei lui Koenig relativă la momentul cinetic și deci relația de definiție a momentului cinetic față de polul fix al sistemului mecanic considerat va avea forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{K}}_i = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_{G_i} \times M_i \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathcal{K}}_{G_i}]} \qquad (13.43)$$

dacă sistemul mecanic este constituit numai din rigide considerate ca atare și forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}} = \sum_{\mathcal{M}(S_i)} [\bar{r}_{G_i} \times M_i \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathcal{K}}_{G_i}] + \sum_{\mathcal{M}(G_j)} \bar{r}_j \times m_j v_j} \qquad (13.44)$$

dacă sistemul mecanic conține și un subansamblu de puncte materiale.

În cazul cînd în unul din elementele sistemului, de exemplu în elementul (S_k), polul invariabil legat de acest element nu poate fi luat

în centrul de masă, ($Q_k \not\equiv G_k$), atunci expresia momentului său cinetic în raport cu polul fix va trebui scrisă sub forma corespunzătoare acestui pol, adică

$$\bar{\mathcal{K}}_k = \bar{r}_{Q_k} \times \bar{\mathcal{K}}_k + M_k \bar{r}'_{G_k} \times \bar{v}_{Q_k} + \bar{\mathcal{K}}_{Q_{k_{rot}}}. \tag{13.45}$$

Se reamintește că în expresiile (13.43) și (13.44) termenii $\bar{\mathcal{K}}_{G_i}$ au, în ipoteza coincidenței axelor reperelor legate de elementele sistemului mecanic cu axele centrale de inerție corespunzătoare, semnificațiile

$$\bar{\mathcal{K}}_{G_i} = \bar{\mathcal{K}}_{G_{i_{rot}}} = J'_{i_x}\omega'_{i_x}\bar{i}'_i + J'_{i_y}\omega'_{i_y}\bar{j}'_i + J'_{i_z}\omega'_{i_z}\bar{k}'_i \tag{13.46}$$

dacă rotațiile elementelor respective se efectuează în jurul unor axe instantanee de direcții variabile în spațiu și semnificațiile

$$\bar{\mathcal{K}}_{G_i} = J_i\bar{\omega}_i \tag{13.47}$$

dacă rotațiile se efectuează în jurul axelor centrale de inerție $G_iz'_i$ de direcții fixe în spațiu.

b) *Momentul cinetic al unui sistem mecanic în raport cu centrul de masă al sistemului.* Considerînd un reper $Cx^*y^*z^*$, cu originea în centrul de masă al sistemului mecanic, în mișcare de translație, odată cu centrul de masă, în raport cu reperul fix $Oxyz$ la care este raportată mișcarea sistemului mecanic, astfel încît axele celor două repere să fie mereu paralele două cîte două (fig. 13.1), poziția unui element (S_i) al sistemului mecanic în mișcarea relativă a sa față de acest nou reper va fi determinată prin vectorul de poziție al polului G față de polul C, avînd expresia analitică

$$\bar{r}^*_{Ca_i} = x^*_{a_i}\bar{i} + y^*_{a_i}\bar{j} + z^*_{a_i}\bar{k} \tag{13.48}$$

în raport cu reperul $Cx^*y^*z^*$ și prin unghiurile lui Euler corespunzătoare acestei mișcări relative, unghiuri care vor fi însă egale cu cele ale mișcării absolute a elementului (S_i), deoarece atît reperul $Cx^*y^*z^*$, cît și reperul $G_ix^*_iy^*_iz^*_i$ — ultimul fiind cel care determină unghiurile lui Euler corespunzătoare mișcării absolute — se deplasează numai prin translație. Rezultă de aici că și viteza unghiulară $\bar{\omega}_{i_r}$ în mișca-

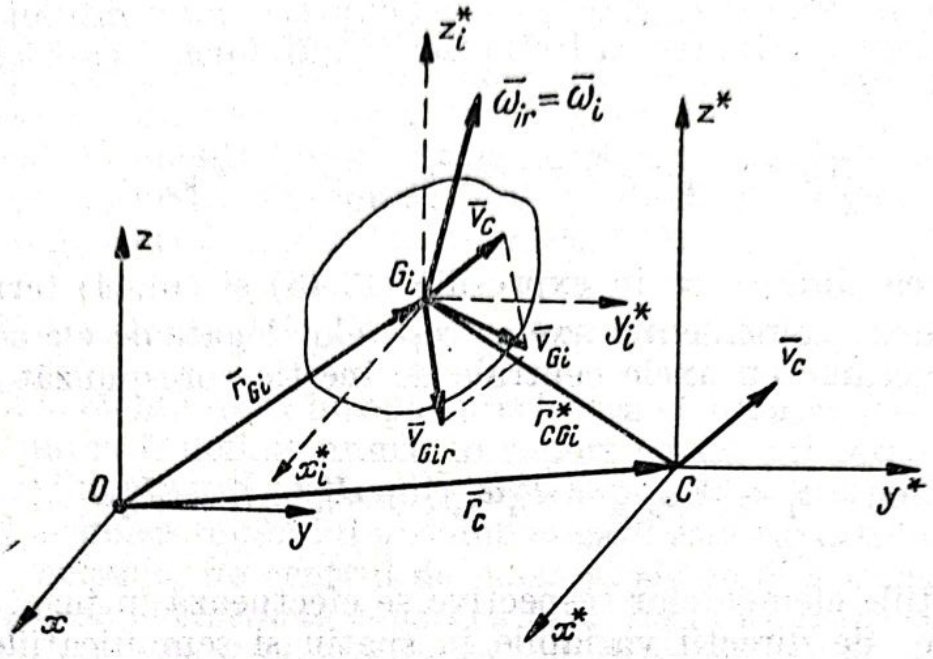


Fig. 13.1

rea relativă a elementului (S_i) faţă de reperul $Cx^*y^*z^*$ va fi egală cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_i$, corespunzătoare mişcării absolute faţă de reperul fix a elementului respectiv, fiind deci valabile relaţiile

$$\bar{\omega}_{i_r} = \bar{\omega}_i, \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13.49}$$

cu consecinţele directe

$$\bar{K}_{G_{i_r}} = \bar{K}_{G_i}, \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13.50}$$

$\bar{K}_{G_{i_r}}$ fiind momentul cinetic corespunzător mişcării de rotaţie a elementului (S_i) în jurul centrului său de masă în mişcarea relativă faţă de reperul $Cx^*y^*z^*$.

Momentul cinetic al elementului (S_i) în raport cu polul C va fi dat de o relaţie asemănătoare relaţiei care exprimă teorema lui Koenig, cu singura modificare că parametrii cinematici de ordinul întîi care figurează în relaţie vor trebui să fie cei corespunzători mişcării relative, adică se va scrie

$$\bar{K}_{i_{rC}} = \bar{r}^*_{CG_i} \times M_i \bar{v}_{G_{i_r}} + \bar{K}_{G_{i_r}}, \tag{13.51}$$

cu $\bar{v}_{G_{i_r}}$ reprezentînd viteza relativă a centrului de masă G_i în raport cu reperul $Cx^*y^*z^*$, viteză determinată prin relaţia

$$\bar{v}_{G_{i_r}} = \dot{\bar{r}}^*_{CG_i} = \dot{x}^*_{G_i}\bar{i} + \dot{y}^*_{G_i}\bar{j} + \dot{z}^*_{G_i}\bar{k}. \tag{13.52}$$

Momentul cinetic al sistemului mecanic în raport cu centrul său de masă va fi definit, în consecinţă, prin relaţia

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}}_C = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{K}}_{i_{rC}} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}^*_{CG_i} \times M_i \bar{v}_{G_{i_r}} + \bar{\mathcal{K}}_{G_i}].} \tag{13.53}$$

c) *Relaţia dintre momentele cinetice ale sistemului mecanic în raport cu polul fix şi în raport cu centrul său de masă*

Plecînd de la relaţia de definiţie (13.43) a momentului cinetic al sistemului mecanic în raport cu polul fix O şi efectuînd în ea înlocuirile evidente (fig. 13.1) :

$$\bar{r}_{G_i} = \bar{r}_C + \bar{r}^*_{CG_i}, \tag{13.54}$$

iar prin derivare în raport cu timpul :

$$\bar{v}_{G_i} = \bar{v}_C + \bar{v}_{G_{i_r}}, \tag{13.55}$$

cu vectorul

$$\bar{v}_C = \dot{\bar{r}}_C = \dot{x}_C\bar{i} + \dot{y}_C\bar{j} + \dot{z}_C\bar{k} \tag{13.56}$$

jucînd rol de viteză de transport, rezultă relaţia

$$\bar{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_C \times M_i\bar{v}_C + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}^*_{CG_i} \times M_i\bar{v}_C + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_C \times M_i\bar{v}_{G_{i_r}} + \tag{13.457}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}^*_{CG_i} \times M_i\bar{v}_{G_{i_r}} + \bar{\mathcal{K}}_{G_i}].$$

Este evidentă semnificația primului grup de termeni din membrul drept al ultimei relații :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_C \times M_i \bar{v}_C = (\bar{r}_C \times \bar{v}_C) \sum_{i=1}^{n} M_i = (\bar{r}_C \times \bar{v}_C) M = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C \quad (13.58)$$

Pentru cel de-al doilea grup de termeni din membrul drept al relației (13.57) rezultă, așa cum se arată mai jos, valoarea zero :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}^*_{CG_i} \times M_i \bar{v}_C = \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{r}^*_{CG_i} \times \bar{v}_C = \left(\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{r}^*_{CG_i} \right) \times \bar{v}_C = 0, \quad (13.59)$$

deoarece suma din paranteză reprezintă momentul static al sistemului mecanic chiar în raport cu centrul său de masă, moment evident egal cu zero

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{r}^*_{CG_i} = M\bar{r}^*_{CC} = 0 \quad (13.60)$$

prin coincidența polului față de care se calculează vectorul de poziție al centrului de masă chiar cu acest centru.

Observînd apoi că prin derivarea în raport cu timpul a ultimei relații rezultă concluzia

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_{G_{i_r}} = 0, \quad (13.61)$$

se va putea constata că și cel de-al treilea grup de termeni din membrul drept al relației (13.57) este zero, așa cum rezultă din relația de mai jos :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_C \times M_i \bar{v}_{G_{i_r}} = \bar{r}_C \times \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_{G_{i_r}} = 0. \quad (13.62)$$

Ținînd seama de egalitățile (13.58), (13.59) și (13.62), precum și de relația (13.53) de definiție a momentului cinetic $\bar{\mathcal{K}}_C$, rezultă următoarea relație între momentele cinetice ale sistemului mecanic

în raport cu polul fix şi în raport cu centrul de masă al sistemului :

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}} = \bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \bar{\mathcal{K}}_C} \cdot \tag{13.63}$$

Această ultimă relaţie exprimă *teorema lui Koenig relativă la momentul cinetic în dinamica sistemelor mecanice*, ea avînd următoarea formulare :

„Momentul cinetic în raport cu un pol fix al unui sistem mecanic este egal cu suma geometrică a momentului cinetic în raportul cu acel pol fix al centrului de masă al sistemului, în care se consideră concentrată întreaga masă a acestuia şi a momentului cinetic corespunzător mişcării lui relative în raport cu centrul de masă".

Se reaminteşte că în această formulare prin mişcare relativă a sistemului mecanic în raport cu centrul său de masă se înţelege mişcarea sistemului în raport cu reperul $Cx^*y^*z^*$.

3°. Torsorul impulsurilor unui sistem mecanic

a) *Torsorul în polul fix al impulsurilor unui sistem mecanic* va avea drept componente impulsul sistemului şi momentul său cinetic în raport cu polul fix, el avînd deci forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}(\bar{\mathcal{H}}) = \begin{cases} \bar{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_{G_i} \\ \bar{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_{G_i} \times M_i \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathcal{K}}_{G_i}] \end{cases}} \tag{13.64}$$

dacă sistemul este constituit numai din rigide considerate ca atare şi forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}(\bar{\mathcal{H}}) = \begin{cases} \bar{\mathcal{H}} = \sum_{\mathcal{A}(S_i)} M_i \bar{v}_{G_i} + \sum_{\mathcal{A}(G_j)} m_j \bar{v}_j \\ \bar{\mathcal{K}} = \sum_{\mathcal{A}(S_i)} [\bar{r}_{G_i} \times M_i \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathcal{K}}_{G_i}] + \sum_{\mathcal{A}(G_j)} \bar{r}_j \times m_j \bar{v}_j \end{cases}} \tag{13.65}$$

dacă sistemul mecanic conţine şi un subansamblu de puncte materiale.

Scanned with CamScanner

b) *Torsorul în centrul de masă al impulsurilor unui sistem mecanic* va fi definit prin impulsul sistemului mecanic şi prin momentul său cinetic corespunzător mişcării sale relative faţă de centrul de masă, adică va avea forma

$$\bar{\mathcal{T}}_C(\bar{\mathcal{H}}) = \begin{cases} \bar{\mathcal{H}} = M\bar{v}_C \\ \bar{\mathcal{K}}_C = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}^*_{CG_i} \times M_i \bar{v}_{G_{i_r}} + \bar{\mathcal{K}}_{G_i}] \end{cases} \tag{13.66}$$

Se face menţiunea că teorema lui Koenig relativă la momentul cinetic în dinamica sistemelor mecanice îşi păstrează valabilitatea, uşor de verificat prin repetarea calculelor, şi în cazul sistemelor ce conţin şi subansamble de puncte materiale.

13.2.2. Energia cinetică a unui sistem mecanic

Extinzîndu-se, la cazul sistemelor de rigide, noţiunea de energie cinetică, se va ţine şi aici seama de faptul că o asemenea noţiune poate fi definită atît pentru mişcarea absolută, cît şi pentru mişcarea relativă a sistemului mecanic în raport cu reperul $C\,x^*y^*z^*$, care a fost introdus cu prilejul definirii momentelor cinetice.

1°. Energia cinetică corespunzătoare mişcării absolute a sistemului mecanic

Folosind teorema lui Koenig relativă la energia cinetică pentru exprimarea energiei cinetice a unui element (S_i) al unui sistem mecanic, se va defini *energia cinetică a unui sistem mecanic corespunzătoare mişcării sale absolute* ca fiind mărimea reprezentată prin suma energiilor cinetice corespunzătoare acestei mişcări ale tuturor elementelor sistemului, relaţia de definiţie a acestei mărimi fiind deci

$$\mathcal{E} = \sum_{1=1}^{n} \mathcal{E}_i = \sum_{1=1}^{n} \left[\frac{1}{2} M_i \bar{v}^2_{G_i} + \mathcal{E}_{i_{rot}} \right] \tag{13.67}$$

dacă toate elementele sistemului sînt considerate rigide ca atare şi

$$\boxed{\mathscr{E} = \sum_{\mathscr{A}(S_i)} \left[\frac{1}{2} M_i \bar{v}_{G_i}^2 + \mathscr{E}_{i_{rot}} \right] + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} \frac{1}{2} m_j v_j^2} \tag{13.68}$$

dacă sistemul mecanic conţine şi un subansamblu de puncte materiale.

În cazul cînd în unul din elementele sistemului mecanic, de exemplu în elementul (S_k), polul invariabil legat de rigid nu va putea fi luat în centrul de masă al acestuia, $(Q_k \not\equiv G_k)$, atunci pentru calculul momentului cinetic al acestui element va fi folosită expresia corespunzătoare acestui pol, adică

$$\mathscr{E}_k = \frac{1}{2} M_k \bar{v}_{Q_k}^2 + M_k \bar{v}_{Q_k} (\bar{\omega}_k \times \bar{r}'_{G_k}) + \mathscr{E}_{k_{rot}}. \tag{13.69}$$

În relaţiile precedente, energiile de rotaţie au expresiile

$$\mathscr{E}_{i_{rot}} = \frac{1}{2} [J'_{i_x} \omega'^2_{i_x} + J'^2_{i_y} \omega'^2_{i_y} + J'^2_{i_z} \omega'^2_{i_z}], \tag{13.70}$$

dacă este vorba de rotaţii instantanee oarecare şi expresiile

$$\mathscr{E}_{i_{rot}} = \frac{1}{2} J_i \bar{\omega}_i^2 \tag{13.71}$$

dacă axele instantanee de rotaţie, luate ca axe $G_i z_i$, au direcţii fixe în spaţiu; în această ultimă situaţie se găsesc şi sistemele mecanice plane, pentru care expresia (13.67) a energiei cinetice va lua forma

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [M_i \bar{v}_{G_i}^2 + J_i \bar{\omega}_i^2]}. \tag{13.72}$$

Dacă sistemul mecanic este scleronom, are un singur grad de libertate și elementul conducător (S_1) are mișcare de translație, atunci, prin scoaterea forțată în factor a pătratului vitezei de translație a elementului motor în relația (13.72), rezultă, ținînd seama și de relația (13.4) de definiție a masei reduse a sistemului mecanic, expresie care va lua acum forma

$$M_r = \sum_{i=1}^{n} \left[M_i \left(\frac{v_{G_i}}{v_{G_1}} \right)^2 + J_i \left(\frac{\omega_i}{v_{G_1}} \right)^2 \right] = M_r(x_{G_1}), \qquad (13.73)$$

următoarea relație de calcul al energiei cinetice a sistemului mecanic considerat :

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2} M_r(x_{G_1}) \dot{x}_{G_1}^2.} \qquad (13.74)$$

În cazul cînd elementul conducător (S_1) al sistemului mecanic plan scleronom cu un singur grad de libertate are mișcare de rotație în jurul unei axe fixe, atunci, prin scoaterea forțată în factor a pătratului vitezei unghiulare a elementului motor în relația (13.72), precum și prin considerarea relației (13.17) de definiție a momentului de inerție al sistemului mecanic redus la axa elementului motor, se obține următoarea expresie pentru energia cinetică a sistemului mecanic considerat :

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2} J_r(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2.} \qquad (13.75)$$

Energia cinetică corespunzătoare mișcării absolute a unui sistem mecanic poate fi exprimată și în funcție de componentele torsorilor impulsurilor în centrele de masă ale elementelor ce alcătuiesc sistemul.

Într-adevăr, considerînd cazul general, al unui sistem mecanic spațial și alegînd și acum axele reperelor invariabil atașate elementelor după axele centrale de inerție respective, expresia energiei cinetice a sistemului va putea fi scrisă sub forma

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [M_i \bar{v}_{G_i}^2 + J_{i_x}^2 \omega_{i_x}'^2 + J_{i_y}' \omega_{i_y}^2 + J_{i_z}' \omega_{i_z}'^2]. \qquad (13.76)$$

Dacă se ţine seama de expresiile impulsurilor şi ale momentelor cinetice ale elementelor în raport cu centrele lor de masă, adică

$$\bar{\mathscr{H}}_i = M_i \bar{v}_{G_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

şi

$$\bar{\mathscr{K}}_{G_i} = J'_{i_x} \omega'_{i_x} \bar{i}'_i + J'_{i_y} \omega'_{i_y} \bar{j}'_i + J'_{i_z} \omega'_{i_z} \bar{k}'_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

atunci se observă că pot fi scrise relaţiile

$$M_i \bar{v}^2_{G_i} = (M_i \bar{v}_{G_i}) \bar{v}_{G_i} = \bar{\mathscr{H}}_i \bar{v}_{G_i}$$

şi

$$J'_{i_x} \omega'^2_{i_x} + J'_{i_y} \omega'^2_{i_y} + J'_{i_z} \omega'^2_{i_z} = \mathscr{K}'_{G_{i_x}} \omega'_{i_x} + \mathscr{K}'_{G_{i_y}} \omega'_{i_y} + \bar{\mathscr{K}}'_{G_{i_z}} \omega'_{iz} = \bar{\mathscr{K}}_{G_i} \bar{\omega}_i.$$

Înlocuind ultimele expresii în relaţia (13.76), se obţine o nouă expresie pentru energia cinetică a sistemului mecanic corespunzătoare mişcării lui absolute, în funcţie de componentele torsorilor impulsurilor în centrele de masă ale elementelor:

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{H}}_i \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathscr{K}}_{G_i} \bar{\omega}_i].} \tag{13.77}$$

b) *Energia cinetică corespunzătoare mişcării relative a sistemului mecanic în jurul centrului său de masă.* Observînd că mişcarea relativă a unui element (S_i) al sistemului mecanic în raport cu reperul $Cx^*y^*z^*$ se efectuează cu parametrii cinematici $\bar{v}_{G_{i_r}}$ şi $\bar{\omega}_{i_r}$, rezultă că energia cinetică a acestui sistem, corespunzătoare mişcării lui relative în raport cu reperul $C\,x^*y^*z^*$ va fi definită prin relaţia

$$\boxed{\mathscr{E}_C = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} M_i \bar{v}^2_{G_{i_r}} + \mathscr{E}_{i_{rot_r}} \right]} \tag{13.78}$$

Scanned with CamScanner

cu

$$\mathcal{E}_{i_{rot_r}} = \mathcal{E}_{i_{rot}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{13.79}$$

ca urmare a valabilității condițiilor (13.49).

c) *Relația dintre energiile cinetice ale sistemului mecanic corespunzătoare mișcărilor lui absolute și relative în raport cu centrul de masă al sistemului.* Înlocuind, în expresia (13.76) a energiei cinetice corespunzătoare mișcării absolute a unui sistem mecanic, vitezele absolute $\bar{v}_{G_i}$ cu expresiile (13.55), rezultă relația

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M_i \bar{v}_C^2 + \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_C \bar{v}_{G_{i_r}} + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} M_i \bar{v}_{G_{i_r}}^2 + \mathcal{E}_{i_{rot}} \right]. \tag{13.80}$$

Semnificația primului și a celui de-al doilea grup de termen din membrul drept al ultimei relații rezultă imediat:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_C^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} M_i \right) \bar{v}_C^2 = \frac{1}{2} M \bar{v}_C^2$$

și

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_C \bar{v}_{G_{i_r}} = \left(\sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_{G_{i_r}} \right) \bar{v}_C = 0,$$

ultima ca urmare a condiției (13.61).

În ceea ce privește ultimul grup de termeni din membrul drept al relației (13.78), el va reprezenta, ținînd seama și de condițiile (13.77), chiar energia cinetică corespunzătoare mișcării relative a sistemului mecanic în raport cu reperul $C\ x^*y^*z^*$.

Se poate scrie deci, în baza precizărilor precedente, relația

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} M \bar{v}_C^2 + \mathcal{E}_C}, \tag{13.81}$$

care va exprima *teorema lui Koenig relativă la energia cinetică în dinamica sistemelor mecanice*, cu următoarea formulare:

„Energia cinetică a unui sistem mecanic corespunzătoare mișcării lui absolute în raport cu un reper fix este egală cu energia cine-

tică a centrului său de masă, în care se consideră concentrată întreaga masă a sistemului, adunată cu energia cinetică corespunzătoare mișcării relative a sistemului mecanic în jurul centrului său de masă".

Se reamintește și aici că prin mișcarea relativă față de centrul de masă se va înțelege mișcarea sistemului mecanic față de reperul $C\,x^*y^*z^*$.

Se poate verifica și aici, prin repetarea calculelor, că teorema enunțată mai sus își păstrează valabilitatea și în cazul cînd sistemul mecanic conține și un subansamblu de puncte materiale.

d) *Expresia energiei cinetice a unui sistem mecanic în funcție de parametrii lagrangeieni și de vitezele generalizate ale sistemului.* Considerînd cazul mai general, al unui sistem mecanic reonom și alegînd și de astă dată axele reperelor invariabil atașate elementelor sistemului astfel încît să coincidă cu axele centrale de inerție respective, energia cinetică a sistemului va fi dată de relația (13.76), adică

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[M_i\bar{v}_{G_i}^2 + J'_{i_x}\omega_{i_x}'^2 + J'_{i_y}\omega_{i_y}'^2 + J'_{i_z}\omega_{i_z}'^2\right], \qquad (13.76)$$

cu parametrii cinematici de ordinul întîi avînd acum expresiile

$$\bar{v}_{G_i} = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial t}; \qquad \bar{\omega}_i = \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}, \qquad (13.82)$$

ultimii cu următoarele proiecții pe axele reperelor invariabil legate de elementele respective :

$$\omega'_{i_x} = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{i}'_i\right)\dot{q}_k + \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{i}'_i\right);$$

$$\omega'_{i_y} = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right)\dot{q}_k + \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{j}'_i\right); \qquad (13.83)$$

$$\omega'_{i_z} = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right)\dot{q}_k + \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{k}'_i\right);$$

Scanned with CamScanner

în care factorii $\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{i}'_i\right)$, $\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right)$ și $\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right)$ au semnificațiile (13.22), iar ultimii termeni au semnificațiile de mai jos:

$$\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{i}'_i=\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\bar{k}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\bar{k}'_i+\frac{\partial\theta_i}{\partial t}\bar{n}_i\right]\bar{i}'_i=\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\alpha^i_{xz}+\frac{\partial\theta_i}{\partial t}\cos\varphi_i;$$

$$\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{j}'_i=\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\bar{k}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\bar{k}'_i+\frac{\partial\theta_i}{\partial t}\bar{n}_i\right]\bar{j}'_i=\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\alpha^i_{yz}-\frac{\partial\theta_i}{\partial t}\sin\varphi_i;$$

$$\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{k}'_i=\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\bar{k}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\bar{k}'_i+\frac{\partial\theta_i}{\partial t}\bar{n}_i\right]\bar{k}'_i=\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\alpha^i_{zz}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}.$$

(13.84)

Introducerea expresiilor (13.82) și (13.83) în relația (13.76) conduce la următoarea expresie pentru energia cinetică a sistemului mecanic considerat:

$$\mathscr{E}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{M_i\left[\sum_{h=1}^{p}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}\dot{q}_h+\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial t}\right]\left[\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial t}\right]+\right.$$

$$+J'_{i_x}\left[\sum_{h=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{i}'_i\right)\dot{q}_h+\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{i}'_i\right)\right]\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{i}'_i\right)\dot{q}_k+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{i}'_i\right)\right]+J'_{i_y}\left[\sum_{h=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{j}'_i\right)\dot{q}_h+\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{j}'_i\right)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right)\dot{q}_k+\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{j}'_i\right)\right]+J'_{i_z}\left[\sum_{h=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{k}'_i\right)\dot{q}_h+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{k}'_i\right)\right]\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right)\dot{q}_h+\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{k}'_i\right)\right]\right\},$$

care, prin o grupare convenabilă de termeni și prin schimbarea ordinii de sumare astfel încît vitezele generalizate să poată fi scoase în factori comuni, mai poate fi scrisă sub forma

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{p}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[M_i\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + J'_{i_x}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{i}'_i\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{i}'_i\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J'_{i_y}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{j}'_i\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right) + J'_{i_z}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{k}'_i\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right)\right]\right\}\dot{q}_h\dot{q}_k +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{p}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[M_i\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial t} + J'_{i_x}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{i}'_i\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{i}'_i\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J'_{i_y}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{j}'_i\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{j}'_i\right) + J'_{i_z}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{k}'_i\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{k}'_i\right)\right]\right\}\dot{q}_h +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[M_i\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial t} + J'_{i_x}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{i}'_i\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{i}'_i\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J'_{i_y}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{j}'_i\right) + J'_{i_z}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{k}'_i\right)\right]\right\}\dot{q}_k +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[M_i\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial t}\right)^2 + J'_{i_x}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{i}'_i\right)^2 + J'_{i_y}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{j}'_i\right)^2 + \right.$$

$$\left. + J'_{i_z}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{k}'_i\right)^2\right]. \tag{13.85}$$

Se observă că ultima expresie a energiei cinetice conține:

— O formă pătratică în vitezele generalizate, ai cărei coeficienți reprezintă tocmai coeficienții de inerție ai sistemului mecanic definiți prin relațiile (13.29), cu singura deosebire că de astă dată ei

vor depinde nu numai de parametrii lagrangeini de poziţie, ci și de timp explicit, adică vor fi de forma

$$q_{hk} = q_{kh}(q\,;\,t),\ (h, k = 1\,,2,\ \ldots,\ p). \tag{13.86}$$

Această formă pătratică, reprezentată prin primul grup de termeni ai relaţiei (13.85), va fi notată cu simbolul $\mathscr{E}_2$, ea putînd fi scrisă deci sub forma

$$\mathscr{E}_2 = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{p} g_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k. \tag{13.87}$$

— Două forme liniare în vitezele generalizate, reprezentate prin cel de-al doilea și cel de-al treilea grup de termeni, grupuri care diferă între ele numai prin notarea indicelui de sumare —h la primul și k la cel de-al doilea —, dar care sînt identice, deoarece indicii de sumare iau aceleași valori, de la 1 la p; în consecinţă, în locul celor două grupuri de termeni menţionate mai sus, va putea fi considerat dublul primului grup.

Introducînd notaţiile

$$g_{h0} = \sum_{i=1}^{n}\left[M_i\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial t} + J'_{i_x}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{i}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{i}'_i\right) + J'_{i_y}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{j}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{j}'_i\right) + J'_{i_z}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_h}\bar{k}'_i\right)\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\bar{k}'_i\right)\right] = q_{h0}(q\,;\,t) \tag{13.88}$$

cu mărimile g_{h0} depinzînd atît de parametrii lagrangeieni, cît și de timp explicit, suma celor două grupuri de termeni reprezentate prin formele liniare în vitezele generalizate, notată cu simbolul $\mathscr{E}_1$, va putea fi scrisă sub forma

$$\mathscr{E}_1 = \sum_{h=1}^{p} g_{h0}\dot{q}_h. \tag{13.89}$$

— Un grup de termeni independent de vitezele generalizate, dar depinzînd de parametrii lagrangeieni de poziţie și de timp.

Introducînd notaţia

$$g_{00} = \sum_{i=1}^{n} \left[M_i \left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial t} \right)^2 + J'_{i_x} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} \bar{i}'_i \right)^2 + J'_{i_y} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} \bar{j}'_i \right)^2 + J'_{i_z} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} \bar{k}'_i \right)^2 \right] = g_{00}(q\,;\, t), \tag{13.90}$$

ultimul grup de termeni ai expresiei (13.85) a energiei cinetice a sistemului mecanic, notat cu simbolul $\mathscr{E}_0$, va putea fi scris sub forma

$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2} g_{00}. \tag{13.91}$$

Ţinînd seama de semnificaţiile (13.87), (13.89) şi (13.91) ale grupurilor de termeni din expresia (13.85) a energiei cinetice, rezultă următoarea formă finală pentru această expresie

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_0 = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{p} g_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^{p} g_{h0} \dot{q}_h + \frac{1}{2} g_{00} = \mathscr{E}(q\,;\, \dot{q}\,;\, t) \tag{13.92}$$

numită uneori *expresia energiei cinetice a sistemului mecanic în coordonate generalizate.*

În cazul sistemelor mecanice scleronome fiind valabile condiţiile

$$\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial t} \equiv 0\,; \quad \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t} \equiv 0\,; \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.93}$$

cu consecinţele

$$g_{h0} \equiv 0\,; \quad g_{00} \equiv 0\,; \quad (h = 1, 2, \ldots, p), \tag{13.94}$$

expresia (13.92) a energiei cinetice în coordonate generalizate se va reduce numai la forma pătratică în vitezele generalizate, adică

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{p} g_{hk}\dot{q}_h\dot{q}_k = \mathcal{E}(q;\dot{q})}, \tag{13.95}$$

cu coeficienţii de inerţie depinzînd acum numai de parametrii lagrangeieni de poziţie.

În cazul unui sistem mecanic scleronom cu un singur grad de libertate, ($p = 1$; $h = 1 = k$), expresia precedentă a energiei cinetice se va reduce la un singur termen

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}g_{11}\dot{q}_1^2 = \frac{1}{2}g\dot{q}^2}, \tag{13.96}$$

cu coeficientul de inerţie reprezentînd masa sistemului mecanic redusă în centrul de masă al elementului motor (S_1) dacă coordonata generalizată este abscisa acestui din urmă centru ($q = x_{G_1}$; $g = M_r(x_{G_1})$, respectiv momentul de inerţie al sistemului mecanic redus la axa elementului motor (S_1) dacă coordonata generalizată este unghiul de rotaţie al elementului motor ($q = \varphi_1$; $g = J_r(\varphi_1)$).

13.3. *Caracteristicile dinamice ale sistemelor mecanice*

13.3.1. Caracteristicile dinamice vectoriale

Ca şi în dinamica rigidului, aceste caracteristici vor fi reprezentate prin componentele torsorilor solicitărilor aplicate elementelor unui sistem mecanic; aceşti torsori vor putea fi consideraţi fie în polul fix, comun tuturor elementelor sistemului, — acesta fiind originea reperului absolut la care este raportată mişcarea sistemului mecanic —, fie în polii invariabil legaţi de elementele sistemului — aceştia fiind, de regulă, centrele de masă ale elementelor.

Scanned with CamScanner

Clasificarea solicitărilor la care pof fi supuse elementele unui sistem mecanic este aceeași din dinamica rigidului, cu următoarele două noi precizări :

— Elementul constitutiv nemaifiind reprezentat prin masa elementară, ca în dinamica rigidului, ci prin rigidul finit, se vor lua în considerație numai torsorii rezultanți ai diverselor distribuții de forțe elementare, torsori cu componente finite, considerate fie în diversele puncte teoretice de aplicație, fie în polii invariabil legați de rigide.

— Noțiunile de „interior" și „exterior" trebuind să fie raportate, de astă dată, la sistem și nu la fiecare element constitutiv al sistemului mecanic, prin solicitări interioare se vor înțelege acum forțele și momentele cuplurilor din punctele de legătură interioară, solicitări care, fie că este vorba de interacțiuni prin legături interioare active, fie că este vorba de interacțiuni prin legături interioare pasive, vor satisface principiul acțiunii și reacțiunii.

În legătură cu solicitările rezultante, se introduce următoarea convenție de notare : atît forțele rezultante, cît și momentele rezultante, măsurînd interacțiunile dintre două elemente ale sistemului mecanic, vor fi notate cu cei doi indici de ordine ai elementelor respective, primul indice corespunzînd totdeauna elementului supus solicitărilor luate în considerație ; în cazul cînd corpul cu care se află în interacțiune un element al sistemului mecanic nu aparține sistemului, fiind un corp oarecare din mediul înconjurător, cel de-al doilea indice pentru desemnarea solicitărilor aplicate elementului în cauză va fi înlocuit cu indicele zero.

1°. Solicitările exterioare

Prin solicitări exterioare se vor înțelege forțele și momentele cuplurilor de forțe exercitate asupra elementelor unui sistem mecanic de către corpurile din mediul înconjurător, care nu fac parte din sistem, aceste solicitări putînd fi împărțite și aici în :

a) *Solicitări exterioare active*, cuprinzînd

Solicitările active de interacțiune directă, reprezentate prin greutățile elementelor, precum și prin diversele forțe și momente ale cuplurilor motoare exercitate din exterior.

Scanned with CamScanner

Torsorii în centrele de masă G_i ale greutăților elementelor sistemului mecanic vor avea formele

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{P}_i) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{P}_i = M_i \bar{g} \\ \\ \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{P}_i) = 0 \end{array} \right\},} \tag{13.97}$$

iar dacă în unul din elemente, de exemplu, în elementul (S_k), polul invariabil legat de rigid nu va putea fi luat în centrul de masă G_k, $(Q_k \neq G_k)$, torsorul în polul Q_k al greutății elementului menționat va lua forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_{Q_k}(\bar{P}_k) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{P}_k = M_k \bar{g} \\ \\ \overline{\mathfrak{M}}_{Q_k}(\bar{P}_k) = \bar{\mathcal{M}}_{Q_k}(\bar{P}_k) = \bar{r}'_{G_k} \times \bar{P}_k \end{array} \right\},} \tag{13.98}$$

cu ultima componentă a torsorului avînd expresia analitică

$$\bar{\mathcal{M}}_{Q_k}(\bar{P}_k) = - M_k g a_k \cos\varphi_k \, k'_k \tag{13.99}$$

în cazul sistemelor mecanice plane în mișcare în planul fix Oxy, cu axa Oy orientată pe verticală și în sus, (fig. 13.2).

Solicitările de legătură exterioară activă. Considerînd modelul mai general de legătură exterioară activă prezentat în dinamica rigidului, cu elementul elastic de legătură deformat atît prin întindere și comprimare, cît și prin torsionare în jurul axei fixe (Δ_{i0}), care permite elementului (S_i), căruia îi este aplicată, să execute o mișcare elicoidală în jurul axei (Δ_{i0}), (fig. 13.3) și luînd și aici în considerație numai cazurile cele mai des întîlnite în aplicațiile practice, cînd centrele de masă G_i se găsesc pe axele mișcărilor elicoidale ale elementelor respective, asupra elementului (S_i) va acționa un răsucitor al solicitărilor elastice dezvoltate prin deformarea elementului elastic de legătură, cu componentele avînd, în condițiile de valabilitate a legii lui Hooke, expresiile stabilite în dinamica rigidului, completate acum cu indicii de ordine corespunzători, conform

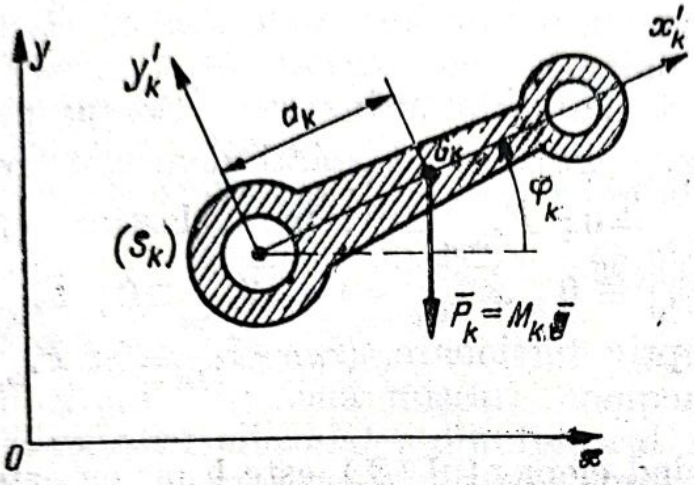


Fig. 13.2

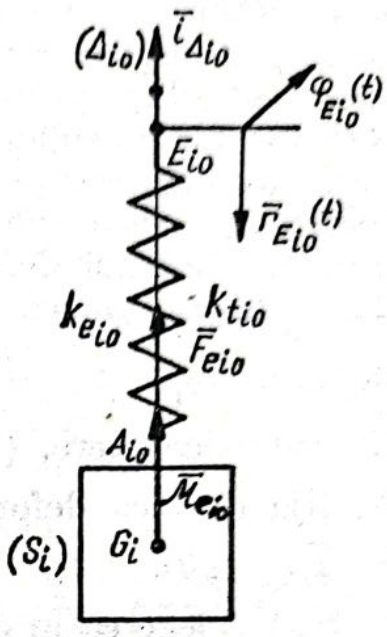


Fig. 13.3

convenției de notare adoptate, adică :

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{F}_{e_{i0}}) =$$

$$= \begin{cases} \bar{F}_{e_{i0}} = -k_{e_{i0}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}}) + \bar{F}_{e_{i0_{st}}} + k_{e_{i0}}(\bar{r}_{E_{i0}} - \bar{r}_{E_{i0_{st}}}) = \bar{F}_{e_{i0_c}} + \bar{F}_{e_{i0_{pt}}} \\ \bar{\mathcal{M}}_{e_{i0}} = -k_{t_{i0}}(\varphi_i - \varphi_{i_{st}})\bar{i}_{\Delta_{i0}} + \bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_{st}}} + k_{t_{i0}}(\varphi_{E_{i0}} - \varphi_{E_{i0_{st}}})\bar{i}_{\Delta_{i0}} = \bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_c}} + \bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_{pt}}} \end{cases} \tag{13.100}$$

Termenii

$$\begin{cases} \bar{F}_{e_{i0_c}} = -k_{e_{i0}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}} + \bar{F}_{e_{i0_{st}}}; \\ \bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_c}} = -k_{t_{i0}}(\varphi_i - \varphi_{i_{st}})\bar{i}_{\Delta_{i0}} + \bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_{st}}}, \end{cases} \tag{13.101}$$

vor purta și aici numele de *componentele conservative ale solicitărilor elastice*, iar termenii

$$\begin{cases} \bar{F}_{e_{i0_{pt}}} = k_{e_{i0}}(\bar{r}_{E_{i0}} - \bar{r}_{E_{i0_{st}}}) = \bar{F}_{e_{i0_{pt}}}(t); \\ \bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_{pt}}} = k_{t_{i0}}(\varphi_{E_{i0}} - \varphi_{E_{i0_{st}}})\bar{i}_{\Delta_{i0}} = \bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_{pt}}}(t) \end{cases} \tag{13.102}$$

Scanned with CamScanner

funcții vectoriale cunoscute de timp în cazul cînd extremitatea F_{i0}, legată cu exteriorul, a elementului elastic este mobilă și identic egali cu zero în cazul extremității E_{i0} fixe, se vor numi și acum *componentele perturbatoare* ale solicitărilor elastice.

Expresiile componentelor răsucitorului solicitărilor elastice vor căpăta și aici forme simplificate în cazul legăturilor elastice simple: arcul elicoidal deformat numai prin întindere și comprimare, ($\varphi_i - \varphi_{i_{st}} \equiv 0$; $\bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_{st}}} = 0$; $\bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_{pt}}} \equiv 0$); arcul spiral deformat prin torsionare, ($\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}} \equiv 0$; $\bar{F}_{e_{i0_{st}}} = 0$; $\bar{F}_{e_{i0_{pt}}} \equiv 0$); bara elastică deformată prin încovoiere, ($\varphi_i - \varphi_{i_{st}} \equiv 0$; $\bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_{st}}} = 0$; $\bar{\mathcal{M}}_{e_{i0_{pt}}} \equiv 0$; $\bar{F}_{e_{i0_{pt}}} \equiv \equiv 0$); tija elastică deformată prin torsionare, ($\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}} \equiv 0$; $\bar{F}_{e_{i0_{st}}} = = 0$; $\bar{F}_{e_{i0_{pt}}} \equiv 0$).

Se înțelege că în cazul cînd elementul (S_i) este legat cu exteriorul prin mai multe elemente elastice de legătură, va trebui să se ia în considerație torsorul rezultant în centrul de masă G_i al tuturor solicitărilor elastice, exercitate de fiecare legătură exterioară activă în parte.

În problemele de dinamica sistemelor mecanice ce vor fi prezentate în continuare, toate solicitările active aplicate elementelor unui sistem mecanic vor fi considerate reduse în centrele de masă G_i ale elementelor la torsori rezultanți, de componente:

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{\mathcal{T}}_{ext_{a_i}}) = \begin{cases} \bar{F}_{ext_{a_i}} \\ \\ \bar{\mathfrak{M}}_{ext_{a_{G_i}}} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, .., n) \tag{13.103}$$

b) *Solicitări exterioare pasive.* Ca și în dinamica rigidului, în această categorie de solicitări exterioare vor intra:

Solicitările datorate rezistențelor mediului (aerului). Pentru fiecare element (S_i) al sistemului mecanic, rezistențele mediului — acesta fiind, de regulă, aerul — se vor reduce în centrul de masă G_i la un torsor de componente:

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{R}_{z_i}) = \begin{cases} \bar{R}_{z_i} \\ \\ \bar{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{z_i}) \end{cases}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.104}$$

expresiile concrete ale acestor componente depinzînd atît de forma — generală, sau particulară — adoptată pentru legea lui Bernoulli, cît și de forma suprafeței de atac a rigidului respectiv; pentru modelul mai general examinat în dinamica rigidului, al rigidului în formă de placă în mișcare elicoidală în jurul axei de simetrie a suprafeței de atac în mediu cu rezistența dată de prima lege a lui Newton, componentele torsorului în centrul de masă G_i al unui asemenea element vor avea expresiile cunoscute din dinamica rigidului, scrise acum cu convenția de notare adoptată, adică

$$\bar{R}_{z_i} = -c_{R_{i0}}\bar{v}_{G_i}; \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{z_i}) = -k_{R_{i0}}\bar{\omega}_i \tag{13.105}$$

Se înțelege că în cazul absenței uneia din cele două mișcări componente ale mișcării elicoidale, din torsorul rezistențelor mediului va dispărea componenta corespunzătoare acelei mișcări.

Solicitările datorate rezistențelor de amortizare ale elementelor de legătură elastică. Pentru modelul de legătură elastică examinat la prezentarea solicitărilor elastice exterioare, rezistențele de amortizoare se vor manifesta, ca și în dinamica rigidului, sub forma unui răsucitor al rezistențelor de amortizare (fig. 13.4), cu expresiile celor două componente identice cu cele stabilite în primul volum al lucrării, modificate doar prin convenția de notare adoptată.

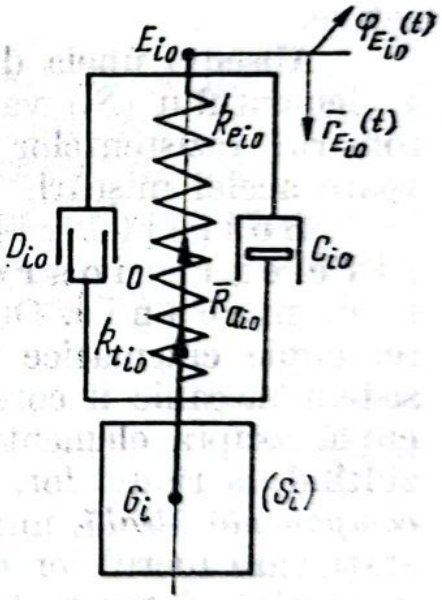


Fig. 13.4

Rezultă deci următoarea formă pentru acest răsucitor:

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{R}_{a_{i0}}) = \begin{cases} \bar{R}_{a_{i0}} = -C_{i0}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{E_{i0}}) = -C_{i0}\bar{v}_{G_i} + C_{i0}\bar{v}_{E_{i0}} = \bar{R}_{a_{i0d}} + R_{a_{i0pt}} \\ \bar{\mathcal{M}}_{a_{i0}} = -D_{i0}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_{E_{i0}}) = -D_{i0}\bar{\omega}_i + D_{i0}\bar{\omega}_{E_{i0}} = \bar{\mathcal{M}}_{a_{i0d}} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{i0pt}} \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

(13.105)

cu termenii

$$\bar{R}_{a_{i0_d}} = -C_{i0}\bar{v}_{G_i}; \quad \bar{\mathcal{M}}_{a_{i0_d}} = -D_{i0}\bar{\omega}_i \tag{13.106}$$

reprezentînd şi aici *componentele disipative ale torsorului rezistenţelor de amortizoare* şi cu termenii

$$\bar{R}_{a_{i0_{pt}}} = C_{i0}\bar{v}_{E_{i0}} = \bar{R}_{a_{i0_{pt}}}(t); \quad \bar{\mathcal{M}}_{a_{i0_{pt}}} = D_{i0}\bar{\omega}_{E_{i0}} = \bar{\mathcal{M}}_{a_{i0_{pt}}}(t), \tag{13.107}$$

funcţii cunoscute de timp în cazul cînd extremităţile E_{i0} sînt mobile şi identic egali cu zero în cazul imobilităţii extremităţilor E_{i0}, numiţi şi acum *componentele perturbatoare ale torsorului rezistenţelor de amortizaare* şi jucînd, de fapt, rolul de solicitări perturbatoare exterioare active.

Absenţa uneia din mişcările componente ale mişcării elicoidale a elementului (S_i) va avea drept consecinţă, evident, dispariţia în torsorul rezistenţelor de amortizare a componentelor corespunzătoare acelei mişcări.

Solicitările de reacţiune ale legăturilor pasive exterioare aplicate elementelor unui sistem mecanic. După cum s-a arătat în dinamica rigidului, fiecărei cuple cinematice exterioare aplicate unui element (S_i) al unui sistem mecanic îi corespunde un torsor al reacţiunilor exercitate de cuplă asupra elementului respectiv, cu componentele torsorului rezultînd, la rîndul lor, din însumarea a cîte două componente: cîte o *componentă ideală*, numită astfel pentru motivul că în cazul legăturii staţionare lucrul lor mecanic este egal cu zero şi cîte o *componentă disipativă*, datorate fenomenelor de frecare şi numite astfel pentru că ele provoacă disipări de energie mecanică; folosind aceleaşi notaţii din dinamica rigidului, cu completările corespunzătoare convenţiei de notare adoptate în dinamica sistemelor mecanice, torsorul reacţiunilor unei cuple cinematice exterioare aplicate elementului (S_i) va avea deci forma

$$\bar{\mathcal{T}}_{C_{i0}}(\bar{R}_{i0}) = \begin{cases} \bar{R}_{i0} = \bar{R}_{i0_{id}} + \bar{\Phi}_{i0} \\ \bar{\mathfrak{M}}_{G_{i0}}(\bar{R}_{i0}) = \bar{\mathfrak{M}}_{C_{i0}}(\bar{R}_{i0_{id}}) + \bar{\mathcal{M}}_{fr_{i0}} \end{cases} \tag{13.108}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

în punctul teoretic de cuplare și forma

$$\overline{\mathcal{T}}_{G_i}(\overline{R}_{i0}) = \begin{cases} \overline{R}_{i0} = \overline{R}_{i0_{id}} + \overline{\Phi}_{i0} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{R}_{i0}) = [\overline{\mathfrak{M}}_{C_{i0}}(\overline{R}_{i0_{id}}) + \overline{r}'_{G_i C_{i0}} \times \overline{R}_{i0_{id}}] + [\overline{\mathcal{M}}_{fr_{i0}} + \overline{r}'_{G_i C_{i0}} \times \overline{\Phi}_{i0}] \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.109}$$

în centrul de masă G_i al elementului (S_i).

Expresiile concrete ale diferiților termeni din relațiile precedente vor fi stabilite în funcție de tipul cuplei aplicate, așa cum s-a arătat în dinamica rigidului pentru tipurile uzuale de cuple.

Dacă unui element (S_i) al sistemului mecanic îi sînt aplicate un număr l_i de cuple cinematice exterioare, fiecăreia din ele corespunzîndu-i cîte un torsor al reacțiunilor avînd, în centrul de masă G_i al elementului, forma

$$\overline{\mathcal{T}}_{G_i}(\overline{R}_{i0}^{(\lambda)}) = \begin{cases} \overline{R}_{i0}^{(\lambda)} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{R}_{i0}^{(\lambda)}) \end{cases} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, l_i), \tag{13.110}$$

atunci torsorul rezultant în centrul de masă G_i al reacțiunilor tuturor cuplelor cinematice experioare aplicate elementului (S_i) va avea forma

$$\overline{\mathcal{T}}_{G_i}(\overline{R}_{i0}) = \begin{cases} \overline{R}_{i0} = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \overline{R}_{i0}^{(\lambda)} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{R}_{i0}) = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{R}_{i0}^{(\lambda)}). \end{cases} \tag{13.111}$$

Încheind prezentarea solicitărilor exterioare pasive, se mai face precizarea că în expunerea ulterioară a problemelor dinamicii sistemelor mecanice, toate solicitările pasive aplicate unui element (S_i)

al sistemului mecanic vor fi înlocuite cu un torsor rezultant în centrul de masă G_i al elementului al tuturor acestor solicitări, de forma

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{F}_{ext_{p_i}}) = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathcal{F}}_{ext_{p_i}} = \bar{R}_{z_i} + \bar{R}_{a_{i0}} + \bar{R}_{i0} \\ \bar{\mathcal{M}}_{ext_{p_{G_i}}} = \bar{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{R}_{z_i}) + \bar{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{R}_{a_{i0}}) + \bar{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{R}_{i0}) \end{array} \right\} \quad (13.112)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

2° Solicitări interioare

Solicitările interioare sînt forțele și momentele — cuplurile de forțe de interacțiune dintre elementele unui sistem mecanic, exercitate asupra a două elemente ca urmare a legăturilor aplicate lor și, în funcție de tipul legăturilor — active, sau pasive — se împart în:

a) *Solicitările interioare active.* În această categorie de solicitări interioare intră solicitările dezvoltate prin deformarea elementului elastic de legătură activă interioară aplicată între două elemente, (S_i) și (S_j), ale unui sistem mecanic, solicitări care se exercită asupra fiecăruia din cele două elemente cuplate și satisfac principiul acțiunii și reacțiunii.

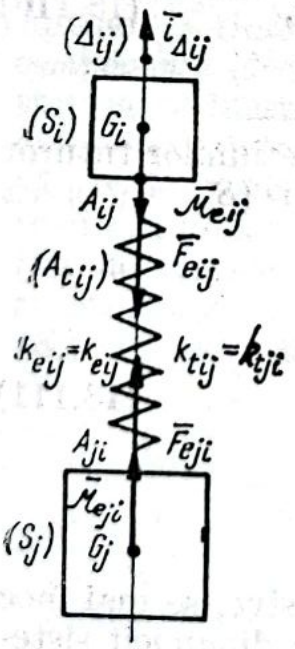


Fig. 13.5.

Considerînd același model, mai general, de legătură elastică, care permite celor două elemente cuplate prin ea, (S_i) și (S_j), să execute mișcări elicoidale coaxiale în jurul axei comune fixe (Δ_{ij}), de versor $\bar{i}_{\Delta_{ij}}$ și admițînd și acum că centrele de masă, G_i și G_j, ale celor două elemente se găsesc și ele pe axa (Δ_{ij}), (fig. 13.5), se va observa că pentru elementul (S_i), punctul A_{ji}, de legătură a elementului elastic (Ae_{ij}) cu rigidul (S_j), joacă rolul punctului E_{i0} din cazul legăturii elastice exterioare, ceea ce înseamnă că pentru cele două componente ale răsucitorului ce acționează asupra elementului (S_i) prin deformarea, în condițiile de valabilitate

a legii lui Hooke, a elementului elastic de legătură, pot fi scrise expresiile

$$\begin{aligned}\bar{F}_{e_{ij}} &= -k_{e_{ij}}([\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}})] - (\bar{r}_{A_{ji}} - \bar{r}_{A_{ji_{st}}})] + \bar{F}_{e_{ij_{st}}};\\ \bar{\mathcal{M}}_{e_{ij}} &= -k_{t_{ij}}[(\varphi_i - \varphi_{i_{st}}) - (\varphi_{A_{ji}} - \varphi_{A_{ji_{st}}})]\bar{i}_{\Delta_{ij}} + \bar{\mathcal{M}}_{ij_{st}}.\end{aligned} \tag{13.113}$$

Observînd din fig. 13.5 că se pot efectua înlocuirile

$$\bar{r}_{A_{ji}} - \bar{r}_{A_{ji_{st}}} = (\bar{r}_{G_j} + \bar{r}'_{G_jA_{ji}}) - (\bar{r}_{G_{j_{st}}} + \bar{r}'_{G_jA_{ji}}) = \bar{r}_{G_j} - \bar{r}_{G_{j_{st}}}$$

şi

$$\varphi_{A_{ji}} - \varphi_{A_{ji_{st}}} = \varphi_j - \varphi_{j_{st}}$$

punctul A_{ji} fiind fix în rigidul (S_j), rezultă următoarea formă finală a torsorului în polul G_i al solicitărilor elastice exercitate asupra elementului (S_i) prin deformarea legăturii elastice interioare (Ae_{ij}):

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{F}_{e_{ij}}) = \begin{cases}\bar{F}_{e_{ij}} = -k_{e_{ij}}[(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}}) - (\bar{r}_{G_j} - \bar{r}_{G_{j_{st}}})] + \bar{F}_{e_{ij_{st}}};\\ \bar{\mathcal{M}}_{e_{ij}} = -k_{t_{ij}}[(\varphi_i - \varphi_{i_{st}}) - (\varphi_j - \varphi_{j_{st}})]\bar{i}_{\Delta_{ij}} + \bar{\mathcal{M}}_{e_{ij_{st}}}.\end{cases} \tag{13.114}$$

Conform principiului acţiunii şi reacţiunii, un răsucitor analog va acţiona asupra elementului (S_j), pentru componentele lui în polul G_j rezultînd, prin repetarea raţionamentului precedent, expresiile

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_j}(\bar{F}_{e_{ji}}) = \begin{cases}\bar{F}_{e_{ji}} = -k_{e_{ji}}[(\bar{r}_{G_j} - G_{j_{st}}) - (\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}})] + \bar{F}_{e_{ji_{st}}}\\ \bar{\mathcal{M}}_{e_{ji}} = -k_{t_{ji}}[(\varphi_j - \varphi_{j_{st}}) - (\varphi_i - \varphi_{i_{st}})]\bar{i}_{\Delta_{ij}} + \bar{\mathcal{M}}_{e_{ji_{st}}}\end{cases} \tag{13.115}$$

Scanned with CamScanner

cu

$$k_{e_{ij}} = k_{e_{ji}}; \quad k_{t_{ij}} = k_{t_{ji}}. \tag{13.116}$$

Cum cei doi poli, G_i și G_j, sînt situați pe axa comună (Δ_{ij}) a celor doi răsucitori, rezultă, conform principiului acțiunii și reacțiunii, condițiile

$$\bar{F}_{e_{ij}} + \bar{F}_{e_{ji}} = 0; \quad \bar{\mathcal{M}}_{e_{ij}} + \bar{\mathcal{M}}_{e_{ji}} = 0, \tag{13.117}$$

ele avînd drept consecințe și egalitatea cu zero a sumei celor două momente rezultante ale acestor două ansambluri de solicitări în polul fix, comun tuturor elementelor sistemului mecanic, în baza relației evidente

$$\overline{\mathfrak{M}}(\bar{F}_{e_{ij}}) + \overline{\mathfrak{M}}(\bar{F}_{e_{ji}}) = \bar{\mathcal{M}}_{e_{ij}} + \bar{r}_{G_i} \times \bar{F}_{e_{ij}} + \bar{\mathcal{M}}_{e_{ji}} + \bar{r}_{G_j} \times \bar{F}_{e_{ji}} =$$

$$(\bar{\mathcal{M}}_{e_{ij}} + \bar{\mathcal{M}}_{e_{ji}}) + (\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j}) \times \bar{F}_{e_{ij}} = 0,$$

diferența $(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j})$ fiind, în condițiile precizate, coliniară cu forța $\bar{F}_{e_{ij}}$.

Întrucît elementul (S_i) poate avea legături elastice interioare cu mai multe elemente (S_k) ale sistemului mecanic, toate solicitările interioare active corespunzătoare acestor legături vor forma un torsor rezultant în polul G_i, cu componentele determinate prin relațiile

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{F}_{int_{a_i}}) = \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} = \sum\limits_k \bar{F}_{e_{ik}} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_{G_i}}} = \sum\limits_k \bar{\mathcal{M}}_{e_{ik}} \end{cases} \tag{13.118}$$

ambele diferite de zero; torsorul în polul fix al acelorași solicitări va avea deci componentele

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}(\bar{\mathcal{F}}_{int_{a_i}}) = \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} \neq 0 \\ \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_i}} = \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_{G_i}}} + \bar{r}_{G_i} \times \bar{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} \neq 0. \end{cases}} \tag{13.119}$$

La însumarea tuturor acestor componente ale torsorilor rezultanți în polul fix ai solicitărilor interioare active corespunzătoare

tuturor elementelor sistemului mecanic vor rezulta însă, prin regruparea perechilor de forţe şi momente direct opuse, condiţiile

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\mathscr{F}}_{int_{a_i}} = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{M}}_{int_{a_i}} = 0, \tag{13.201}$$

scoţînd în evidenţă faptul că sistemul solicitărilor interioare active, corespunzător întregului sistem mecanic, este un sistem echivalent cu zero.

b) *Solicitări interioare pasive.* Următoarele două tipuri de solicitări interioare fac parte din această categorie:

Solicitările de amortizare ale elementelor elastice de legătură interioară. Observaţia făcută la subpunctul precedent, privind faptul că în cazul legăturii elastice interioare aplicate elementului (S_i) rolul extremităţii legate cu exteriorul în cazul legăturii elastice exterioare îl joacă acum punctul A_{ji} din rigidul (S_j), (fig. 13.6), permite să se tragă concluzia că parametrii cinematici $\bar{v}_{E_{i0}}$ şi $\bar{\omega}_{E_{i0}}$, care caracterizează deplasarea extremităţii E_{i0} în cazul legăturii exterioare, vor trebui înlocuiţi acum cu cei ai elementului (S_j), $\bar{v}_{A_{ji}}$ şi $\bar{\omega}_{A_{ji}}$, cu observaţia că în condiţiile precizate, pot fi scrise relaţiile

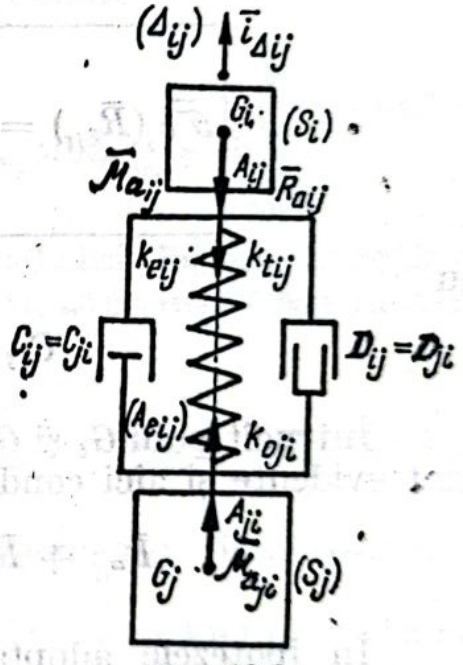


Fig. 13.6

$$\bar{v}_{A_{ji}} = \dot{\bar{r}}_{A_{ji}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\bar{r}_{G_j} + \bar{r}'_{G_jA_{ji}}\right] = \dot{\bar{r}}_{G_j} = \bar{v}_{G_j}\,; \tag{13.121}$$

$$\bar{\omega}_{A_{ji}} = \bar{\omega}_j.$$

În consecinţă, rezistenţele de amortizare dezvoltate prin deformarea elastică a elementului de legătură (Δe_{ij}) şi acţionînd asupra

elementului (S_i) se vor reduce, în centrul de masă G_i al elementului considerat (fig. 13.6), la un răsucitor de componente

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}_{G_i}(\bar{R}_{a_{ij}}) = \begin{cases} \bar{R}_{a_{ij}} = -C_{ij}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j}) \\ \bar{\mathcal{M}}_{a_{ij}} = -D_{ij}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j) \end{cases}}. \tag{13.122}$$

Valabilitatea, și în acest caz, a principiului acțiunii și reacțiunii conduce la concluzia că un răsucitor analog va acționa asupra elementului (S_j), (fig. 13.6), torsorul în polul G_j al acestor din urmă solicitări avînd forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}_{G_j}(\bar{R}_{a_{ji}}) = \begin{cases} \bar{R}_{a_{ji}} = -C_{ji}(\bar{v}_{G_j} - \bar{v}_{G_i}) \\ \bar{\mathcal{M}} = -D_{ji}(\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) \end{cases}}, \tag{13.123}$$

cu

$$C_{ij} = C_{ji}; \qquad D_{ij} = D_{ji} \tag{13.124}$$

Întrucît polii G_i și G_j sînt situați pe axa comună a răsucitorilor sînt evidente și aici condițiile

$$\bar{R}_{a_{ij}} + \bar{R}_{b_{ji}} = 0; \quad \bar{\mathcal{M}}_{a_{ij}} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{ji}} = 0. \tag{13.125}$$

În ipotezele adoptate privind modelul de legătură elastică, interioară, rezultă că și momentul rezultant în polul fix O, comun tuturor elementelor sistemului mecanic, ale celor două ansambluri de solicitări de amortizare va fi egal cu zero, așa cum rezultă din relația de mai jos :

$$\overline{\mathcal{M}}(\bar{R}_{a_{ij}}) + \overline{\mathcal{M}}(\bar{R}_{a_{ji}}) = \bar{\mathcal{M}}_{a_{ji}} + \bar{r}_{G_i} \times \bar{R}_{a_{ij}} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{ji}} + \bar{r}_{G_j} \times \bar{R}_{a_{ji}} =$$

$$= (\bar{\mathcal{M}}_{a_{ij}} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{ji}}) + (\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j}) \times \bar{R}_{a_{ij}} = 0,$$

vectorii $(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j})$ și $\bar{R}_{a_{ij}}$ fiind și acum coliniari.

Dacă elementul (S_i) este supus la mai multe legături interioare active cu diferite elemente (S_k) ale sistemului mecanic, se va putea defini un torsor rezultant în polul G_i al tuturor solicitărilor de amortizare exercitate de elementele de legătură elastică interioară aplicate rigidului (S_i), de componente

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{R}_{a_{int_i}}) = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{a_{int_i}} = \sum_k \bar{R}_{a_{ik}} \\ \\ \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{a_{int_i}}) = \sum \bar{\mathcal{M}}_{a_{ik}} \end{Bmatrix}, \tag{13.126}$$

precum şi un torsor corespunzător în polul fix O, comun tuturor elementelor sistemului mecanic, de componente

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{R}_{a_{int_i}}) = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{a_{int_i}} \neq 0 \\ \\ \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_{a_{int_i}}) = \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{a_{int_i}}) + \bar{r}_{G_i} \times \bar{R}_{a_{int_i}} \neq 0 \end{Bmatrix}, \tag{13.127}$$

Torsorul rezultant în polul fix al solicitărilor de amortizare corespunzătoare întregului sistem mecanic va avea însă componentele egale cu zero, adică vor rezulta condiţiile

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_{a_{int_i}} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_{a_{int_i}}) = 0. \tag{13.128}$$

datorită aceloraşi regrupări de forţe şi momente direct opuse la considerarea întregului sistem mecanic.

Solicitările de reacţiune ale legăturilor interioare pasive. Cuplei cinematice interioare, care leagă un element (S_i) al unui sistem mecanic de un alt element (S_j) al sistemului, îi corespunde un torsor, în punctul teoretic de cuplare C_{ij}, al reacţiunilor exercitate, prin intermediul cuplei cinematice, de elementul (S_j), forma acestui torsor fiind analogă celei corespunzătoare unei cuple exterioare, (13.108), cu înlocuirea însă a indicelui zero cu indicele j; se va scrie deci şi aici :

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij}) = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{ij} = \bar{R}_{ij_{id}} + \bar{\Phi}_{ij} \\ \\ \overline{\mathfrak{M}}_{ij}(\bar{R}_{ij}) = \overline{\mathfrak{M}}_{ij}(\bar{R}_{ij_{id}}) + \bar{\mathcal{M}}_{fr_{ij}} \end{Bmatrix}}, \tag{13.129}$$

unele din componente putînd, evident, lipsi în cazul unor tipuri mai simple de cuple cinematice.

În baza principiului acțiunii și reacțiunii, un torsor cu componentele de mărimi egale și de sensuri contrare va acționa asupra elementului (S_j), în punctul teoretic de cuplare C_{ji} din acest element, adică torsorilor (13.129) li se vor asocia torsorii înglobînd reacțiunile elementului (S_i) exercitate asupra elementului (S_j), de forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_{C_{ji}}(\bar{R}_{ji}) = \begin{cases} \bar{R}_{ji} = \bar{R}_{ji_{ig}} + \bar{\Phi}_{ji} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{C_{ji}}(\bar{R}_{ji}) = \overline{\mathfrak{M}}_{C_{ji}}(\bar{R}_{ji_{id}}) + \bar{\mathcal{M}}_{fr_{ji}} \end{cases}} \tag{13.130}$$

cu condițiile

$$\begin{cases} \bar{R}_{ij} = -\bar{R}_{ji}\,; & \bar{R}_{ij_{id}} = -\bar{R}_{ji_{id}}\,; & \Phi_{ij} = -\Phi_{ji} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij}) = -\overline{\mathfrak{M}}_{C_{ji}}(\bar{R}_{ji})\,; & \overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij_{id}}) = -\overline{\mathfrak{M}}_{C_{ji}}(\bar{R}_{ji_{id}})\,; & \bar{\mathcal{M}}_{fr_{ij}} = -\bar{\mathcal{M}}_{fr_{ji}}. \end{cases} \tag{13.131}$$

Torsorul în centrul de masă G_i al reacțiunilor exercitate asupra elementului (S_i) ca urmare a cuplajului cu elementul (S_j) va avea forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{R}_{ij}) = \begin{cases} \bar{R}_{ij} = \bar{R}_{ij_{id}} + \bar{\Phi}_{ij} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{ij}) = [\overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij_{id}}) + \bar{r}'_{G_iC_{ij}} \times \bar{R}_{ij_{id}}] + \\ \qquad + [\bar{\mathcal{M}}_{fr_{ij}} + \bar{r}'_{G_iC_{ij}} \times \Phi_{ij}] \end{cases}} \tag{13.132}$$

un torsor analog putînd fi scris, evident, și pentru reacțiunile exercitate asupra elementului (S_j), dar cu polul de reducere în centrul de masă G_j.

Expresiile concrete ale componentelor ideale și disipative ale reacțiunilor și momentelor lor vor fi stabilite și aici în funcție de

tipul cuplei utilizate, pentru cele uzuale putîndu-se folosi datele din tabelele conținute în primul volum al lucrării.

În cazul cînd elementul (S_i) este legat, prin cuple cinematice interioare, cu mai multe elemente din sistem, torsorul rezultant în centrul de masă G_i al reacțiunilor tuturor cuplelor cinematice aplicate elementului (S_i) va avea forma

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{R}_{int_i}) = \begin{cases} \bar{R}_{int_i} = \sum\limits_j \bar{R}_{ij} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_i}) = \sum\limits_j \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{ij}) \end{cases} \tag{13.133}$$

lui corespunzîndu-i următorul torsor în polul fix O:

$$\bar{\mathcal{T}}(\bar{R}_{int_i}) = \begin{cases} \bar{R}_{int_i} \neq 0 \\ \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_{int_i}) = \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_i}) + \bar{r}_{G_i} \times \bar{R}_{int_i} \neq 0. \end{cases} \tag{13.134}$$

Torsorul rezultant în polul fix al tuturor acestor reacțiuni ale cuplelor cinematice interioare aplicate întregului sistem mecanic va avea însă și aici ambele componente egale cu zero, adică vor rezulta și în cazul acestor solicitări condițiile

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{R}_{int_i} = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_{int_i}) = 0, \tag{13.135}$$

datorită regrupărilor, la considerarea sistemului mecanic în totalitatea lui, ale reacțiunilor și momentelor reacțiunilor legăturilor interioare pasive în perechi de vectori direct opuși.

În prezentarea, în continuare, a problemelor dinamicii sistemelor mecanice se va lucra, de regulă, cu torsorii rezultanți, fie în centrele de masă ale elementelor sistemului mecanic, fie în polul fix, ai tuturor solicitărilor interioare pasive, cu componentele determinate prin însumarea componentelor corespunzătoare celor două tipuri de solicitări interioare pasive, adică

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{\mathcal{F}}_{int_{p_i}}) = \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} = \bar{R}_{a_{int_i}} + \bar{R}_{int_i} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_{G_i}}} = \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{a_{int_i}}) + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_i}) \end{cases} \quad (i=1,2,\ldots,n) \tag{13.136}$$

respectiv

$$\mathcal{T}(\overline{\mathcal{F}}_{int_i}) = \begin{cases} \overline{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} = \overline{R}_{a_{int_i}} + \overline{R}_{int_i} \neq 0 \\ \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}} = \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_{G_i}}} + \bar{r}_{G_i} \times \overline{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} \neq 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{13.137}$$

În ceea ce privește torsorul rezultant în polul fix O al tuturor acestor solicitări interioare pasive, corespunzătoare întregului sistem mecanic, el va avea, în baza condițiilor (13.128) și (13.135), ambele componente egale cu zero, adică vor rezulta și aici condițiile

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}} = 0, \tag{13.138}$$

evidențiind faptul că și sistemul solicitărilor interioare pasive, corespunzătoare întregului sistem mecanic, formează un sistem echivalent cu zero.

3°. Solicitări de inerție și inerțiale

a) *Solicitări de inerție.* Ca și în dinamica rigidului, prin solicitări de inerție se vor înțelege forțele rezultante de inerție și momentele rezultante ale forțelor de inerție, corespunzătoare diverselor elemente ale unui sistem mecanic.

Torsorul, în centrul de masă G_i, al solicitărilor de inerție corespunzătoare elementului (S_i) va avea deci forma stabilită în dinamica rigidului, cu adăugarea, evident, a indicelui de ordine la componentele torsorului, adică

$$\mathcal{T}_{G_i}(\overline{\mathcal{F}}_i^{\,i}) = \begin{cases} \overline{\mathcal{F}}_i^{\,i} = -\dot{\overline{\mathcal{K}}}_i \\ \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^{\,i} = -\dot{\overline{\mathcal{K}}}_{G_i} \\ (i = 1, 2, \ldots n) \end{cases} \tag{13.139}$$

cu momentul cinetic $\bar{\mathcal{K}}_{G_i}$ dat, după caz, de una din relaţiile (13.46), sau (13.47).

În condiţiile unei deplasări a elementului (S_i) cu axa instantanee de rotaţie de direcţie fixă în spaţiu şi coincizînd şi cu axa centrală de inerţie $G_i z_i'$, $(\bar{\mathcal{K}}_{G_i} = J_i \bar{\omega}_i)$, torsorul în centrul de masă G_i al solicitărilor de inerţie corespunzătoare elementului considerat va lua forma particulară

$$\bar{\mathcal{T}}_{G_i}(\bar{\mathcal{F}}_i^i) = \begin{cases} \bar{\mathcal{F}}_i^i = -M_i \bar{a}_{G_i} \\ \bar{\mathcal{M}}_{G_i}^i = -J_i \bar{\varepsilon}_i. \end{cases} \tag{13.140}$$

În cazul cînd elementul (S_i) este asimilat cu un punct material, torsorul solicitărilor de inerţie se reduce, evident, numai la forţa de inerţie

$$\bar{\mathcal{F}}_i^i = -m_i \bar{a}_i . \tag{13.141}$$

Se reaminteşte faptul că pentru observatorul solidar cu reperul fix la care se raportează mişcarea sistemului mecanic, forţele de inerţie şi momentele forţelor de inerţie nu acţionează asupra elementului (S_i), ci asupra corpurilor cu care se găseşte în interacţiune elementul respectiv şi că considerarea lor ca solicitări aplicate elementului (S_i), aşa cum se va întîlni uneori şi pe parcursul acestei expuneri, este pur convenţională.

b) *Solicitări inerţiale.* Şi în dinamica sistemelor mecanice, prin solicitări inerţiale se vor înţelege solicitările de excitaţie — forţe şi momente ale forţelor de excitaţie — exercitate asupra unui element (S_i) al unui sistem mecanic prin intermediul excitatoarelor inerţiale.

În cazul unui singur excitator inerţial montat pe elementul (S_i), de masă m_i^* şi excentricitate r_i^*, în rotaţie uniformă cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_i^*$ în jurul unei axe fixe în elementul (S_i) şi trecînd prin centrul de masă G_i al elementului, torsorul, în acest centru de masă G_i,

Scanned with CamScanner

al solicitărilor inerțiale — sau de excitație — exercitate asupra elementului (S_i) va avea forma

$$\mathscr{T}_{G_i}(\overline{F}_{ex_i}) = \begin{cases} \overline{F}_{ex_i} = m_i^* r_i^* \omega_i^{*2} \vec{i}_{C_i^* G_i^*} \\ \mathfrak{M}_{G_i}(\overline{F}_{ex_i}) = \bar{r}'_{G_i G_i^*} \times \overline{F}_{ex_i} = \overline{M}_{G_i}(\overline{F}_{ex_i}) \end{cases} \tag{13.142}$$

vectorul $\vec{i}_{C_i^* G_i^*}$ reprezentînd versorul componentei normale la axa de rotație a excitatorului, a vectorului de poziție $\bar{r}'_{G_i G_i^*}$ al centrului de masă G_i^* al excitatorului în raport cu centrul de masă G_i al elementului (S_i), pe care este montat excitatorul; în cazul cînd centrele de masă G_i și G_i^* se găsesc pe aceeași normală la axa de rotație a excitatorului, $(\bar{r}'_{G_i G_i^*} = \lambda \overline{F}_{ex_i})$, momentul forței de excitație va lua valoarea zero.

Dacă pe elementul (S_i) se montează doi excitatori inerțiali sincroni sinfazici, simetric plasați în raport cu centrul de masă G_i al elementului (S_i), atunci, așa cum s-a arătat în dinamica rigidului, torsorul în polul G_i al solicitărilor de excitație va fi format dintr-o forță de excitație armonică unidirecțională și dintr-un moment de excitație cu una sau două componente armonice, în funcție de modul de amplasare a celor două excitatoare.

Se reamintește și aici faptul că încadrarea solicitărilor inerțiale în categoria solicitărilor exterioare active implică satisfacerea celor trei condiții menționate în dinamica rigidului:

— valori reduse ale caracteristicilor inerțiale ale excitatoarelor pentru a nu influența sensibil mișcările absolute ale elementelor pe care sînt montate;

— alegerea axelor de rotație relativă a excitatoarelor după axe principale de inerție;

— moduli suficient de mici ai parametrilor cinematici de ordinul întîi și doi ai elementelor pe care sînt montate excitatoarele, pentru a se putea neglija accelerațiile de transport ale centrelor de masă ale excitatoarelor în raport cu accelerațiile lor relative.

În cazul cînd condițiile de mai sus nu sînt satisfăcute, excitatorul inerțial va trebui considerat și el ca un element al sistemului mecanic, în rotație relativă comandată față de elementul pe care este montat.

Scanned with CamScanner

13.3.2. Caracteristicile dinamice scalare în dinamica sistemelor de rigide

1°. Lucrul mecanic elementar al solicitărilor aplicate unui sistem mecanic

a) *Lucrul mecanic elementar real al unui sistem de solicitări aplicate unui sistem de rigide.* Dacă $\bar{\mathscr{F}}_i$ și $\bar{\mathscr{M}}_{G_i}$ sînt componentele torsorului în centrul de masă G_i al unui anumit tip, sau categorie, de solicitări aplicate elementului (S_i) al unui sistem mecanic, suma lucrurilor mecanice elementare ale acestor solicitări corespunzătoare tuturor elementelor sistemului va defini lucrul mecanic elementar al solicitărilor considerate corespunzător întregului sistem mecanic, adică

$$\boxed{\mathrm{d}\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\mathscr{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{F}}_i \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{G_i} \mathrm{d}\bar{\Theta}_i]}, \tag{13.143}$$

cu

$$\mathrm{d}\bar{r}_{G_i} = \bar{v}_{G_i}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x_{G_i}\bar{i} + dy_{G_i}\bar{j} + \mathrm{d}z_{G_i}\bar{k} \tag{13.144}$$

și

$$\mathrm{d}\bar{\Theta}_i = \bar{\omega}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}\psi_i \bar{k} + \mathrm{d}\varphi_i \bar{k}_i' + \mathrm{d}\theta_i \bar{n}_i \tag{13.145}$$

în cazul unor rotații instantanee oarecari, respectiv

$$\mathrm{d}\bar{\Theta}_i = \bar{\omega}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi_i \bar{k}_i' \tag{13.146}$$

în cazul rotațiilor efectuate în jurul axelor centrale de inerție $G_i z_i'$, de direcții fixe în spațiu.

Dacă sistemul mecanic va conține și un subansamblu de puncte materiale, lucrul mecanic elementar corespunzător tipului considerat de solicitări aplicate întregului sistem mecanic va fi dat de relația

$$\boxed{\mathrm{d}\mathscr{L} = \sum_{\mathscr{A}(S_i)} [\bar{\mathscr{F}}_i \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{G_i} \mathrm{d}\bar{\Theta}_i] + \sum_{\mathscr{A}(G_j)} \bar{\mathscr{F}}_j \mathrm{d}\bar{r}_j} \tag{13.147}$$

Scanned with CamScanner

În continuare, vor fi stabilite expresiile concrete ale lucrului mecanic elementar real, definit mai sus, pentru toate categoriile și grupele de solicitări examinate în cadrul subpunctului precedent, (3.1).

Lucrul mecanic elementar real al solicitărilor exterioare. *Lucrul mecanic elementar al solicitărilor exterioare active.* Notînd cu $\overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}}$ și $\overline{\mathscr{M}}_{ext_{a_{G_i}}}$ componentele torsorilor în polii S_i ai solicitărilor exterioare active aplicate elementelor (S_i), $(i = 1,2,\ldots,n)$, ale unui sistem mecanic, lucrul mecanic elementar corespunzător tuturor acestor solicitări aplicate sistemului mecanic va fi dat de relația

$$\boxed{\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_a} = \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}} \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathscr{M}}_{ext_{a_{G_i}}} \mathrm{d}\bar{\Theta}_i],} \qquad (13.148)$$

luîndu-se în considerație aici, ca și în continuare, numai cazul cînd toate elementele sistemului mecanic sînt considerate rigide ca atare.

Se va arăta, în continuare, că pentru cele două tipuri de solicitări conservative, întîlnite obișnuit în practica inginerului mecanic —greutățile și componentele conservative ale solicitărilor elastice —, se pot defini și acum funcții de forțe, corespunzătoare, de astă dată, întregului sistem mecanic.

Considerînd, mai întîi, cazul greutăților, prin alegerea polilor invariabili legați de elementele sistemului mecanic chiar în centrele de masă ale acestora $(\overline{\mathscr{M}}_{G_i}(\bar{P}_i) = \overline{\mathscr{M}}_{G_i}(\bar{P}_i) = 0)$ și prin orientarea axei fixe Oz după verticala locului și în sus $(\bar{P}_i = -M_i g\bar{k})$, lucrul mecanic corespunzător greutăților tuturor elementelor sistemului mecanic va fi dat de relația

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_g = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} = -\sum_{i=1}^{n} M_i g\, \mathrm{d}z_{G_i} = \mathrm{d}\left\{-g\sum_{i=1}^{n} M_i z_{G_i} + C\right\},$$

adică

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_g = \mathrm{d}U_g = -\mathrm{d}V_g, \qquad (13.149)$$

cu funcţia de forţă gravifică, respectiv funcţia potenţială gravifică, definite acum prin relaţia

$$\boxed{U_g = -V_g = -g\sum_{i=1}^{n} M_i z_{G_i} + C}, \qquad (13.150)$$

C fiind şi aici o constantă aditivă arbitrară.

În cazul cînd valoarea acestei constante aditive va fi astfel aleasă încît pentru poziţia de echilibru static a sistemului mecanic funcţia de forţă să ia valoarea zero, atunci funcţia potenţială va reprezenta şi aici *energia potenţială gravifivă a sistemului mecanic considerat*, $(V_g = \mathcal{E}_p)$,

Pentru sistemele mecanice plane, în mişcare în plan orizontal, $(z_{G_i} = const;\ i = 1, 2, \ldots, n)$, va rezulta condiţia

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_g = \mathrm{d}U_g = 0 \qquad (13.151)$$

În cazul unui sistem mecanic plan în mişcare în planul vertical Oxy, cu axa Oy orientată pe verticală şi în sus $(\bar{P}_i = -M_i g\bar{j})$ şi în care polii Q, invariabili legaţi de elementele sistemului, nu vor putea fi aleşi, din diferite motive, în centrele de masă ale elementelor $(\overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}(\bar{P}_i) = \bar{\mathscr{M}}_{Q_i}(\bar{P}_i) = -M_i g a_i \cdot \cos\varphi_i \bar{k}_i')$, atunci expresia lucrului mecanic elementar al greutăţilor va lua forma

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_g = \sum_{i=1}^{n} [\bar{P}_i \mathrm{d}\bar{r}_{Q_i} + \bar{\mathscr{M}}_{Q_i}(\bar{P}_i)\mathrm{d}\bar{\Theta}_i] = \sum_{i=1}^{n} [-M_i g\,\mathrm{d}y_{Q_i} - M_i g a_i \cos\varphi_i \bar{k}_i'] =$$

$$= \mathrm{d}\left\{-g\sum_{i=1}^{n} [M_i(y_{Q_i} + a_i \sin\varphi_i)] + C\right\},$$

cu funcţia de forţă gravifică determinată acum prin relaţia

$$\boxed{U_g = -V_g = -g\sum_{i=1}^{n} [M_i(y_{Q_i} + a_i \sin\varphi_i)] + C}, \qquad (13.152)$$

respectiv prin relația

$$\boxed{U_g = -V_g = -g\sum_{i=1}^{n} M_i y_{G_i} + C}, \tag{13.153}$$

dacă polii Q_i vor coincide totuși cu centrele de masă $G_i (a_i = 0)$.

În ceea ce privește lucrul mecanic elementar al componentelor conservative ale solicitărilor elastice exterioare, el va fi determinat, în cazul modelului mai general de legătură elastică adoptat în această lucrare, de relația

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{ec}} = \sum_i [\bar{\mathscr{F}}_{e_{i0_c}} \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{e_{i0_c}} \mathrm{d}\bar{\Theta}_i] = \sum_i \{[-k_{e_{i0}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}}) +$$

$$+ \bar{F}_{e_{i0_{st}}}]\mathrm{d}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}}) + (-k_{t_{i0}}(\varphi_i - \varphi_{i_{st}}) + \mathscr{M}_{e_{i0_{st}}}]\mathrm{d}(\varphi_i - \varphi_{i_{st}})\},$$

sau

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{e0}} = \mathrm{d}\left\{\sum_i \left[-\frac{1}{2}k_{e_{i0}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}})^2 - \frac{1}{2}k_{t_{i0}}(\varphi_i - \varphi_{i_{st}})^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{F}_{e_{i0_{st}}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}}) + \mathscr{M}_{e_{i0_{st}}}(\varphi_i - \varphi_{i_{st}})\right] + C\right\} = \mathrm{d}U_{ext_e} \tag{13.154}$$

funcția de forță elastică exterioară avînd acum forma

$$\boxed{U_{ext_e} = -V_{ext_e} = \sum_i \left[-\frac{1}{2}k_{e_{i0}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}})^2 - \frac{1}{2}k_{t_{i0}}(\varphi - \varphi_{i_{st}})^2 + \right.$$

$$\left. + \bar{F}_{e_{i0_{st}}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_{i_{st}}}) + \mathscr{M}_{e_{i0_{st}}}(\varphi_i - \varphi_{i_{st}})\right] + C} \tag{13.155}$$

evident, cu simplificările corespunzătoare cazurilor particulare de deformare a elementelor de legătură elastică exterioară.

Scanned with CamScanner

Este uşor de înţeles că în expresiile precedente sumele vor fi extinse numai la elementele care sînt supuse la legături exterioare active.

Lucrul mecanic elementar al tuturor acestor solicitări exterioare conservative — greutăţi şi componente conservative ale solicitărilor elastice exterioare — va fi dat de relaţia

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{ac}} = \sum_i [\bar{\mathscr{F}}_{ext_{ac_i}} \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{ac_{G_i}}} \mathrm{d}\bar{\Theta}_i] = \mathrm{d}U_g + \mathrm{d}U_{ext_e} = \mathrm{d}U_g + U_{ext_e}),$$

sau încă, introducînd noţiunea de *funcţie de forţă exterioară totală*, definită prin relaţia

$$\boxed{U_{ext} = U_g + U_{ext_e}}, \tag{13.156}$$

se va mai putea scrie

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{ac}} = \mathrm{d}U_{ext}. \tag{13.157}$$

Lucrul mecanic elementar real al solicitărilor exterioare pasive. Dacă

$$\bar{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}} = \bar{R}_{z_i} + \bar{R}_{a_{io}} + \bar{R}_{i0} \text{ şi } \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_{G_i}}} = \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{z_i}) + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{a_{i0}}) + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{i0})$$

sînt componentele torsorului rezultant în polul G_i al solicitărilor exterioare pasive la care este supus elementul (S_i) al unui sistem mecanic, atunci lucrul mecanic elementar real corespunzător tuturor acestor solicitări la care este supus întregul sistem mecanic va fi determinat prin relaţia

$$\boxed{\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_p} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}} \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_{G_i}}} \mathrm{d}\bar{\Theta}_i] = \mathrm{d}\mathscr{L}_{R_z} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_a}} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{ex\cdot R}} \tag{13.158}$$

cu următoarele semnificaţii ale celor trei termeni:

— Termenul

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{R_z} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{z_i} \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{z_i}) \mathrm{d}\bar{\Theta}_i] \tag{13.159}$$

va reprezenta lucrul mecanic elementar al rezistențelor mediului, totdeauna rezistent, ca și în dinamica rigidului; în cazul unui sistem mecanic cu elementele asimilabile modelului pentru care componentele torsorilor rezistențelor mediului aveau forma (13.105), expresia acestui lucru mecanic va lua forma particulară

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{R_x} = -\sum_{i=1}^{n} [c_{R_{i_0}} \bar{v}_{G_i}^2 + k_{R_{i_0}} \bar{\omega}_i^2] \, \mathrm{d}t < 0. \tag{13.160}$$

Se înțelege de la sine că lucrul mecanic elementar al rezistențelor mediului va putea fi considerat egal cu zero numai în cazul sistemelor mecanice în mișcare în mediu cu rezistență neglijabilă (densitate mică) și cu elementele sistemului având profile de minimă rezistență și moduli mici ai parametrilor cinematici de ordinul întîi.

— Termenul

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_a}} = \sum_i [\bar{R}_{a_{i_0}} \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{a_{i_0}} \mathrm{d}\bar{\Theta}_i] = \mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_{a_d}}} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_{a_{pt}}}} \tag{13.161}$$

va reprezenta lucrul mecanic elementar al rezistențelor de amortizare exterioară, cu

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_{a_d}}} = -\sum_i [C_{i_0} \bar{v}_{G_i}^2 + D_{i_0} \bar{\omega}_i^2] \, \mathrm{d}t < 0 \tag{13.162}$$

reprezentînd lucrul mecanic elementar al componentelor disipative ale acestor solicitări și cu

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_{a_{pt}}}} = \sum_i [C_{i_0} \bar{v}_{E_{i_0}} \bar{v}_{G_i} + D_{i_0} \bar{\omega}_{E_{i_0}} \bar{\omega}_i] \, \mathrm{d}t \tag{13.163}$$

reprezentînd lucrul mecanic elementar al componentelor perturbatoare ale solicitărilor de amortizare exterioară.

Lucrul mecanic elementar aî solicitărilor de amortizare exterioară va putea fi considerat egal cu zero numai în cazul legăturilor elastice exterioare cu amortizare neglijabilă, ($C_{i_0} \approx 0$; $D_{i_0} \approx 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$).

Scanned with CamScanner

Se înțelege și aici că sumele din relațiile precedente vor fi extinse numai la elementele cărora le sînt aplicate legături active exterioare.

— Termenul

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_R} = \sum_{i=1}^{n} [R_{i0}\,\mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{i0})\mathrm{d}\bar{\Theta}_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{i0}\,\mathrm{d}\bar{r}_{C_{i0}} + \overline{\mathfrak{M}}_{C_{i0}}(\bar{R}_{i0})\,\mathrm{d}\bar{\Theta}_i] = \mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_{id}}} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_d}} \tag{13.164}$$

va reprezenta lucrul mecanic elementar al tuturor reacțiunilor legăturilor pasive exterioare, cu

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_{id}}} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{i0_{id}}\,\mathrm{d}\bar{r}_{C_{i0}} + \overline{\mathfrak{M}}_{C_{i0}}(\bar{R}_{i0_{id}})\,\mathrm{d}\bar{\Theta}_i] \tag{13.165}$$

reprezentînd lucrul mecanic elementar al componentelor ideale ale torsorilor reacțiunilor legărilor pasive exterioare, egal cu zero numai în cazul legăturilor pasive staționare și cu

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_d}} = \mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{fr}} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\Phi}_{i0}\,\mathrm{d}\bar{r}_{C_{i0}} + \bar{\mathscr{M}}_{fr_{i0}}\mathrm{d}\bar{\Theta}_i] \tag{13.166}$$

reprezentînd lucrul mecanic elementar al componentelor disipative, datorate frecărilor, aie torsorilor reacțiunilor exterioare; ultimul lucru mecanic va putea fi considerat egal cu zero numai în cazul legăturilor exterioare pasive cu frecare neglijabilă.

Precizările făcute pe parcurs în legătură cu diverșii termeni ai lucrului mecanic elementar al solicitărilor pasive exterioare permit să se tragă concluzia că acceptarea ipotezei

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_p} \equiv 0 \tag{13.167}$$

implică satisfacerea următoarelor condițiuni:

— posibilitatea de neglijare a rezistențelor mediului ($\mathrm{d}\mathscr{L}_{R_2} \equiv \equiv 0$);

Scanned with CamScanner

— utilizarea numai a legăturilor elastice cu amortizare neglijabilă ($d\mathscr{L}_{ext_{R_a}} = 0$);

— aplicarea numai de legături pasive exterioare staționare și cu frecare neglijabilă. ($d\mathscr{L}_{ext_{R_{id}}} \equiv 0$; $d\mathscr{L}_{ex_{fr}} \equiv 0$; $d\mathscr{L}_{ext_R} \equiv 0$).

Lucrul mecanic elementar real al solicitărilor interioare apiicate unui sistem mecanic. *Lucrul mecanic elementar real al solicitărilor interioare active.* Considerînd elementele (S_i) și (S_j) ale unui sistem mecanic, legate prin modelul de legătură elastică interioară (Ae_{ij}) examinat în cadrul subpunctului 3.1.2.1., cu componentele torsorilor în centrele de masă G_i și G_j ai solicitărilor elastice, exercitate asupra celor două elemente la deformarea legăturii elastice, determinate prin relațiile (13.114) și, respectiv, (13.115), lucrul mecanic elementar al acestor solicitări acționînd asupra celor două elemente menționate va fi dat de relația

$$d\mathscr{L}_{ext_{a_{(ij)}}} = (\bar{F}_{e_{ij}} d\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{e_{ij}} d\bar{\Theta}_i) + (\bar{F}_{e_{ji}} d\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{e_{ji}} d\bar{\Theta}_j),$$

sau încă, ținînd seama și de condițiile (13.117), se mai poate scrie

$$d\mathscr{L}_{ext_{a_{(ij)}}} = \bar{F}_{e_{ij}} (d\bar{r}_{G_i} - d\bar{r}_{G_j}) + \bar{\mathscr{M}}_{e_{ij}} (d\bar{\Theta}_i - d\bar{\Theta}_j). \quad (13.168)$$

Scriind, pe de o parte, prin gruparea convenabilă a termenilor, expresiile solicitărilor $\bar{F}_{e_{ij}}$ și $\bar{\mathscr{M}}_{e_{ij}}$ sub formele

$$\begin{cases} \bar{F}_{e_{ij}} = -k_{e_{ij}} (\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j}) + [k_{e_{ij}} (\bar{r}_{G_{i_{st}}} - \bar{r}_{G_{j_{st}}}) + \bar{F}_{C_{ij_{st}}}]; \\ \bar{\mathscr{M}}_{e_{ij}} = -k_{t_{ij}} (\varphi_i - \varphi_j) \bar{i}_{\Delta_{ij}} + [k_{t_{ij}} (\varphi_{i_{st}} - \varphi_{j_{st}}) + \mathscr{M}_{e_{ij_{st}}}] \bar{i}_{\Delta_{ij}} \end{cases}$$

și observînd, pe de altă parte, că, în condițiile precizate pentru modelul de legătură elastică adoptat, se pot face înlocuirile

$$d\bar{r}_{G_i} - d\bar{r}_{G_j} = d(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j}); \quad d\bar{\Theta}_i - d\bar{\Theta}_j = d(\varphi_i - \varphi_j) \bar{i}_{\Delta_{ij}},$$

Scanned with CamScanner

expresia (13.168) a lucrului mecanic elementar al solicitărilor elastice considerate mai sus va lua forma

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{a(ij)}} = -k_{e_{ij}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j})\mathrm{d}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j}) - k_{t_{ij}}(\varphi_i - \varphi_j)\mathrm{d}(\varphi_i - \varphi_j) +$$

$$+[k_{e_{ij}}(\bar{r}_{G_{i_{st}}} - \bar{r}_{G_{j_{st}}}) + \bar{F}_{e_{ij_{st}}}]\mathrm{d}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j}) + [k_{t_{ij}}(\varphi_{i_{st}} - \varphi_{j_{st}}) + \mathscr{M}_{e_{ij_{st}}}]\mathrm{d}(\varphi_i - \varphi_j),$$

adică

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{a(ij)}} = \mathrm{d}\left\{-\frac{1}{2}k_{e_{ij}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j})^2 - \frac{1}{2}k_{t_{ij}}(\varphi_i - \varphi_j)^2 + \right.$$

$$+ [k_{e_{ij}}(\bar{r}_{G_{i_{st}}} - \bar{r}_{G_{j_{st}}}) + \bar{F}_{e_{ij_{st}}}](\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j}) +$$

$$\left. + [k_{t_{ij}}(\varphi_{i_{sr}} - \varphi_{j_{st}}) + \mathscr{M}_{e_{ij_{st}}}](\varphi_i - \varphi_j) + \mathrm{const}\right\}. \tag{13.169}$$

Folosind simbolul $\sum_{(\mathscr{A}_{e_{ij}})}$ pentru desemnarea sumei extinsă asupra tuturor elementelor de legătură elastică interioară aplicate rigidelor unui sistem mecanic, lucrul mecanic elementar al solicitărilor elastice corespunzătoare tuturor acestor legături active interioare va fi dat de relația

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_a} = \mathrm{d}\left\{\sum_{(\mathscr{A}_{e_{ij}})}\left[-\frac{1}{2}k_{e_{ij}}(\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j})^2 - \frac{1}{2}k_{t_{ij}}(\varphi_i - \varphi_j)^2 + \right.\right.$$

$$+ [k_{e_{ij}}(\bar{r}_{G_{i_{st}}} - \bar{r}_{G_{j_{st}}}) + \bar{F}_{e_{ij_{st}}}](\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j}) +$$

$$\left.\left. + [k_{t_{ij}}(\varphi_{i_{st}} - \varphi_{j_{st}}) + \mathscr{M}_{e_{ij_{st}}}](\varphi_i - \varphi_j)\right] + C\right\} = \mathrm{d}U_{int_a} \tag{13.170}$$

care scoate în evidență existența și în cazul solicitărilor elastice interioare a unei *funcții de forță elastică interioară*, determinată prin relația

$$\boxed{\begin{aligned} U_{int_a} = \sum_{(\mathscr{E}_{e_{ij}})} \Big[& -\frac{1}{2} k_{e_{ij}} (\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j})^2 - \frac{1}{2} k_{t_{ij}} (\varphi_i - \varphi_j)^2 + \\ & + [k_{e_{ij}} (\bar{r}_{G_{i_{st}}} - \bar{r}_{G_{j_{st}}}) + \bar{F}_{e_{ij_{st}}}] (\bar{r}_{G_i} - \bar{r}_{G_j}) + \\ & + [k_{t_{ij}} (\varphi_{i_{st}} - \varphi_{j_{st}}) + \mathscr{M}_{e_{ij_{st}}}] (\varphi_i - \varphi_j) \Big] + C \end{aligned}}, \quad (13.171)$$

C fiind, ca de obicei, o constantă aditivă arbitrară; se înțelege că expresia precedentă a funcției U_{int_a} va căpăta forme simplificate în condițiile tipurilor particulare de legături elastice interioare.

O concluzie importantă, care trebuie reținută, în legătură cu lucrul mecanic elementar al solicitărilor interioare active este aceea că, deși ansamblul acestor solicitări, corespunzător întregului sistem mecanic, formează, în baza condițiilor (13.120), un sistem echivalent cu zero, totuși lucrul lor mecanic elementar este totdeauna diferit de zero, adică rezultă condiția

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_a} \neq 0. \quad (13.172)$$

Lucrul mecanic elementar real al solicitărilor interioare pasive. Lucrul mecanic elementar al solicitărilor de amortizare interioară. Ținînd seama de condițiile (13.125) pe care le satisfac componentele torsorilor în centrele de masă G_i și G_j ai solicitărilor de amortizare interioară corespunzătoare legăturii elastice dintre elementele (S_i) și (S_j) ale unui sistem mecanic, se va putea scrie următoarea expresie pentru lucrul mecanic elementar al solicitărilor de amortizare interioară aplicate celor două elemente menționate:

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{Ra_{(ij)}}} = \bar{R}_{a_{ij}} \mathrm{d}\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{a_{ij}} \mathrm{d}\bar{\Theta}_i + \bar{R}_{a_{ji}} \mathrm{d}\bar{r}_{G_j} + \bar{\mathscr{M}}_{a_{ji}} \mathrm{d}\bar{\Theta}_j =$$

$$= \bar{R}_{a_{ij}} (\mathrm{d}\bar{r}_{G_i} - \mathrm{d}\bar{r}_{G_j}) + \bar{\mathscr{M}}_{a_{ij}} (\mathrm{d}\bar{\Theta}_i - \mathrm{d}\bar{\Theta}_j),$$

Scanned with CamScanner

sau încă, efectuînd înlocuirile cunoscute

$$d\bar{r}_{G_i} - d\bar{r}_{G_j} = (\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j})dt\,; \quad d\bar{\Theta}_i - d\bar{\Theta}_j = (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)dt$$

și ținînd seama și de expresiile (13.122) și (13.123) ale componentelor torsorilor solicitărilor de amortizare interioară, se mai poate scrie

$$d\mathscr{L}_{int_{R_a(ij)}} = -[C_{ij}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j})^2 + D_{ij}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2]dt < 0. \quad (13.173)$$

În consecință, lucrul mecanic elementar al solicitărilor de amortizare interioară corespunzătoare întregului sistem mecanic va fi dat de relația

$$\boxed{d\mathscr{L}_{int_{R_a}} = -\sum_{(\mathscr{A}_{e_{ij}})} [C_{ij}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j})^2 + D_{ij}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2]\,dt}, \quad (13.174)$$

simbolul $\sum_{(\mathscr{A}_{e_{ij}})}$, avînd aceeași semnificație ca și la subpunctul precedent.

Se observă că acest lucru mecanic este totdeauna rezistent și că deci egalitatea lui cu zero va putea fi acceptată numai în cazul aplicării de legături elastice interioare cu amortizare neglijabilă, ($C_{ij} \approx 0$; $D_{ij} \approx 0$).

— *Lucrul mecanic elementar real al solicitărilor de reacțiune a legăturilor interioare pasive aplicate unui sistem mecanic.* Avînd în vedere expresiile (13.133) ale componentelor torsorilor în centrele de masă G_i ai solicitărilor de reacțiune corespunzătoare legăturilor pasive aplicate elementului (S_i) al unui sistem mecanic, lucrul mecanic al acestei subgrupe de solicitări pasive interioare va fi dat, pentru întregul sistem mecanic, de relația

$$\boxed{d\mathscr{L}_{int_R} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{int_i} d\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_i})]d\bar{\Theta}_i}, \quad (13.175)$$

suma fiind extinsă, evident, asupra tuturor elementelor din sistem cărora le sînt aplicate legături pasive interioare.

Scanned with CamScanner

Pentru a putea aprecia valoarea şi caracterul acestui lucru mecanic, se va considera şi acum o pereche de elemente, (S_i) şi (S_j), între care este aplicată o legătură pasivă.

Alegînd, pentru calculul lucrului mecanic elementar al acestor solicitări de reacţiune, drept poli legaţi de elementele sistemului chiar punctele teoretice de aplicaţie, C_{ij} în elementul (S_i) şi C_{ji} în elementul (S_j), şi ţinînd seama de condiţiile (13.131), se poate scrie următoarea expresie pentru lucrul mecanic elementar corespunzător acestei perechi de elemente cuplate :

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{R_{(ij)}}} = \bar{R}_{ij}\mathrm{d}\bar{r}_{C_{ij}} + \overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij})\mathrm{d}\bar{\Theta}_i + \bar{R}_{ji}\mathrm{d}\bar{r}_{C_{ji}} + \overline{\mathfrak{M}}_{C_{ji}}(\bar{R}_{ji})\mathrm{d}\bar{\Theta}_j =$$

$$= \bar{R}_{ij}(\mathrm{d}\bar{r}_{C_{ij}} - \mathrm{d}\bar{r}_{C_{ji}}) + \overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij})(\mathrm{d}\bar{\Theta}_i - \mathrm{d}\bar{\Theta}_j),$$

sau încă, avînd în vedere şi expresiile (13.129) ale acestor componente şi efectuînd şi înlocuirile cunoscute

$$\mathrm{d}\bar{r}_{C_{ij}} - \mathrm{d}\bar{r}_{C_{ji}} = (\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}})\mathrm{d}t\,; \quad \mathrm{d}\bar{\Theta}_i - \mathrm{d}\bar{\Theta}_j = (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)\mathrm{d}t,$$

se mai poate scrie

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{R_{(ij)}}} = [\bar{R}_{ij_{id}}(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}}) + \overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij_i})\,(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)]\,\mathrm{d}t +$$

$$+ [\bar{\Phi}_{ij}(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}}) + \bar{\mathscr{M}}_{fr_{ij}}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)]\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{R_{id_{(ij)}}}} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{R_{d_{(ij)}}}}, \tag{13.176}$$

primul termen din membrul drept al relaţiei precedente, adică

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{R_{d_{(ij)}}}} = [\bar{R}_{ij_{id}}(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}}) + \overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij_{id}})\,(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)]\,\mathrm{d}t \tag{13.177}$$

reprezentînd lucrul mecanic elementar al componentelor ideale ale solicitărilor de reacţiune interioară, iar termenul

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{R_{id_{(ij)}}}} = \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{fr_{(ij)}}} = [\bar{\Phi}_{ij}(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}}) + \bar{\mathscr{M}}_{fr_{ij}}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)]\,\mathrm{d}t \tag{13.178}$$

Scanned with CamScanner

reprezentînd lucrul mecanic elementar al componentelor disipative, datorate frecărilor, ale solicitărilor de reacţiune interioară.

Se reaminteşte faptul că în cazul unora din cuplele cinematice interioare unii din termenii ce figurează în expresiile (13.177) şi (13.178) vor putea lipsi, ca urmare a absenţelor, în torsorii solicitărilor de reacţiune, a unora din componente (cel mai adesea componenta $\overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij_{id}})$ şi uneori una, sau chiar ambele componente disipative, ca în cazul cuplelor prin fire, sau tije rigide).

În legătură cu primul termen al expresiei (13.176) a lucrului mecanic elementar $d\mathscr{L}_{int_{R_{(ij)}}}$, pot fi făcute următoarele observaţii, uşor de verificat prin calcularea acestui termen pentru diferitele tipuri uzuale de cuple cinematice interioare:

— Lucrul mecanic al componentelor ideale ale reacţiunilor legăturilor interioare este diferit de zero în cazul legăturilor nestaţionare, datorită orientărilor oarecare în spaţiu atît ale vectorilor $\bar{R}_{ij_{id}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij_{id}})$, cît şi ale vectorilor $(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}})$ şi $(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)$.

— Lucrul mecanic elementar al componentelor ideale ale reacţiunilor legăturilor pasive interioare este totdeauna egal cu zero în cazul legăturilor staţionare, fie ca urmare a condiţiilor de ortogonalitate a componentelor ideale $\bar{R}_{ij_{id}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij_{id}})$ ale torsorilor reacţiunilor în raport cu parametrii cinematici relativi $(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}})$ şi, respectiv, $(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)$, ai mişcării relative a elementului (S_j) în raport cu elementul (S_i), fie ca urmare a egalităţii cu zero a unuia dintre parametrii cinematici relativi (de ex., $\bar{R}_{ij} = \bar{N}_{ij}$ este normal la vectorul $(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}})$ şi $\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \equiv 0$ în cazul cuplelor de translaţie; $\bar{R}_{ij} = \bar{T}_{ij}$ este normal la vectorul $(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}})$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij_{id}}) \equiv 0$ în cazul cuplelor prin fire cu extremităţile fixate de rigidele cuplate; $\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}} \equiv 0$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{C_{ij}}(\bar{R}_{ij_{id}}) \equiv 0$ în cazul articulaţiilor sferice şi cilindrice etc.).

De asemenea, în legătură cu cel de-al doilea termen al expresiei (13.176) a lucrului mecanic elementar $d\mathscr{L}_{int_{R_{(ij)}}}$ pot fi făcute următoarele observaţii:

— Lucrul mecanic elementar al componentelor disipative ale solicitărilor de reacţiune este totdeauna rezistent, chiar în cazul cuplelor staţionare, dacă nu se pot neglija frecările, ca urmare a faptului că vectorii $\bar{\Phi}_{ij}$ şi $\bar{\mathscr{M}}_{fr_{ij}}$ au totdeauna sensurile contrare parametri-

lor cinematici relativi $(\bar{v}_{C_{ii}} - \bar{v}_{C_{ji}})$, respectiv $(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)$, precum și faptului că cel puțin una din componentele disipative menționate este diferită de zero dacă se consideră frecările (de ex., vectorul $\bar{\Phi}_{ij}$ are sensul contrar vitezei de translație relativă $(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}})$, care este și viteza de alunecare pentru elementul (S_i) în mișcarea față de elementul (S_j), în cazul cuplei de translație și deși este valabilă în acest caz condiția $\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \equiv 0$, va rezulta $\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{fr_{(ij)}}} = \bar{\Phi}_{ij}(\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}})\mathrm{d}t < 0$; vectorul $\bar{\mathscr{M}}_{fr_{ij}}$ are sensul contrar vitezei unghiulare relative $(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)$ în cazul articulațiilor staționare și deși este satisfăcută condiția $\bar{v}_{C_{ij}} - \bar{v}_{C_{ji}} \equiv 0$, va rezulta totuși $\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{fr_{(ij)}}} = \bar{\mathscr{M}}_{fr_{ij}}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)\mathrm{d}t < 0$ etc).

Constatările precedente permit să se tragă următoarele concluzii în legătură cu lucrul mecanic elementar al solicitărilor de reacțiune ale legăturilor pasive interioare:

— Lucrul mecanic elementar al solicitărilor de reacțiune interioară este totdeauna diferit de zero și se datorează atît componentelor disipative, cît și componentelor ideale ale torsorilor reacțiunilor legăturilor pasive interioare, în cazul cînd aceste legături sînt nestaționare, adică se poate scrie

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_R} = \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{R_{id}}} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{fr}} \neq 0. \tag{13.179}$$

— Lucrul mecanic elementar al solicitărilor de reacțiune interioară se datorează numai componentelor disipative ale torsorilor reacțiunilor în cazul cînd legăturile pasive interioare aplicate elementelor sistemului mecanic sînt staționare, dar cu frecări care nu pot fi neglijate, rezultînd deci în acest caz condiția

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_R} = \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{fr}} < 0. \tag{13.180}$$

— Lucrul mecanic elementar al solicitărilor de reacțiune ale legăturilor pasive interioare aplicate unui sistem mecanic poate fi considerat egal cu zero în cazul cînd toate legăturile interioare pasive aplicate sistemului mecanic sînt staționare și cu frecare neglijabilă, rezultînd în aceste situații condiția

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_R} = 0. \tag{13.181}$$

Scanned with CamScanner

După cum s-a mai precizat pe parcurs, în expunerea ulterioară a problemelor de dinamica sistemelor mecanice se va lucra cu torsorii rezultanți în centrele de masă G_i ai celor două tipuri de solicitări interioare pasive, examinate mai sus, cu componentele torsorilor avînd formele (13.136); acestor solicitări rezultante le va corespunde un lucru mecanic elementar al solicitărilor interioare pasive, determinat prin relația

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_p} = \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{R_a}} + \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_R}, \tag{13.182}$$

în general diferit de zero.

Ținînd seama de precizările făcute în legătură cu fiecare din cei doi termeni ai membrului drept al relației precedente, se poate trage concluzia că egalitatea cu zero a lucrului mecanic elementar al solicitărilor interioare pasive corespunzătoare întregului sistem mecanic, adică ipoteza

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{int_p} \equiv 0 \tag{13.183}$$

poate fi acceptată numai în următoarele condiții:

— cînd toate legăturile elastice interioare aplicate elementelor sistemului mecanic sînt cu amortizare neglijabilă;

— cînd toate legăturile pasive interioare aplicate sistemului mecanic sînt staționare și cu frecare neglijabilă.

b) *Lucrul mecanic virtual al solicitărilor aplicate unui sistem mecanic.* Analog modului de definire a lucrului mecanic elementar real al unui anumit tip de solicitări aplicate elementelor unui sistem mecanic, poate fi definit și un lucru mecanic virtual al solicitărilor respective, corespunzător sistemului de deplasări virtuale la translație și rotație, $\delta\bar{r}_{G_i}$ și $\delta\bar{\Theta}_i$, $(i = 1,2,\ldots,n)$ ale sistemului mecanic considerat.

În consecință, dacă $\bar{\mathscr{F}}_i$ și $\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}$ sînt componentele torsorilor în polii G_i ai unui anumit tip, sau categorii, de solicitări aplicate elementelor (S_i) al unui sistem mecanic, atunci lucrul mecanic virtual (elementar) al acestor solicitări, notat cu simbolul $\delta\mathscr{L}$, va fi definit prin relația

$$\boxed{\delta\mathscr{L} = \sum_{i=k}^{n} [\bar{\mathscr{F}}_i \delta\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i} \delta\bar{\Theta}_i]}. \tag{13.184}$$

Scanned with CamScanner

În continuare, vor fi examinate expresiile și valorile acestui lucru mecanic, corespunzător diverselor tipuri și categorii de solicitări examinate la subpunctul 3.1.

Lucrul mecanic virtual al solicitărilor exterioare aplicate unui sistem mecanic. *Lucrul mecanic virtual al solicitărilor exterioare active.* Dacă $\overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}}$ și $\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_{G_i}}}$ sînt componentele torsorilor în polii G_i ai solicitărilor exterioare active aplicate elementelor (S_i) ale unui sistem mecanic, atunci lucrul mecanic virtual corespunzător acestor solicitări va fi determinat prin relația

$$\boxed{\delta\mathscr{L}_{ext_a} = \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}} \delta\overline{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_{G_i}}} \delta\overline{\Theta}_i]}, \tag{13.185}$$

În cazul solicitărilor conservative, pentru care se poate defini, o funcție de forță exterioară U_{ext}, depinzînd de parametrii de poziție ai sistemului mecanic, lucrul mecanic virtual va avea o expresie analogă expresiei (13.157), adică se va putea scrie

$$\delta\mathscr{L}_{ext_{ac}} = \delta U_{ext}, \tag{13.186}$$

cu simbolul δ aplicat funcției U_{ext} avînd și aici semnificația matematică de operator diferențial, adică

$$\delta U_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial U_{ext}}{\partial x_{G_i}} \delta x_{G_i} + \frac{\partial U_{ext}}{\partial y_{G_i}} \delta y_{G_i} + \frac{\partial U_{ext}}{\delta z_{G_i}} \delta z_{G_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U_{ext}}{\partial \psi_i} \delta\psi_i + \frac{\partial U_{ext}}{\partial \varphi_i} \delta\varphi_i + \frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta_i} \delta\theta_i \right]. \tag{13.187}$$

Scanned with CamScanner

Lucrul mecanic virtual al solicitărilor exterioare pasive.

— *Lucrul mecanic virtual al rezistențelor mediului.* Acest lucru mecanic va fi determinat prin relația

$$\boxed{\delta\mathcal{L}_{R_z} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{z_i}\delta\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_{z_i})\delta\bar{\Theta}_i]} \qquad (13.188)$$

și va putea fi considerat egal cu zero numai în cazul sistemelor mecanice cu elementele avînd profile de minimă rezistență și în mișcare în mediu cu rezistență neglijabilă.

— *Lucrul mecanic virtual al solicitărilor de amortizare exterioară.* Avînd în vedere existența celor două serii de componente — disipative și perturbatoare — ale solicitărilor de amortizare exterioară, va rezulta următoarea expresie pentru lucrul mecanic virtual corespunzător acestor solicitări :

$$\boxed{\delta\mathcal{L}_{ext_{R_a}} = \sum_{i} [\bar{R}_{z_i}\delta\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{iO}}\delta\bar{\Theta}_i] = \delta\mathcal{L}_{ext_{R_{a_d}}} + \delta\mathcal{L}_{ext_{R_{a_{pt}}}}} \qquad (13.189)$$

unde termenul

$$\delta\mathcal{L}_{ext_{R_{a_d}}} = \sum_{i} [\bar{R}_{a_{iO_d}}\delta\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{iO_d}}\delta\bar{\Theta}_i] \qquad (13.190)$$

reprezintă lucrul mecanic virtual al componentelor disipative ale solicitărilor de amortizare exterioară, iar termenul

$$\delta\mathcal{L}_{ext_{R_{a_{pt}}}} = \sum_{i} [\bar{R}_{a_{iO_{pt}}}\delta\bar{r}_{G_i} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{iO_{pt}}}\delta\bar{\Theta}_i] \qquad (13.191)$$

reprezintă lucrul mecanic virtual al componentelor perturbatoare ale solicitărilor de amortizare.

Acest lucru mecanic va putea fi considerat egal cu zero numai în cazul sistemelor mecanice cu legături elastice exterioare avînd amortizări neglijabile.

— *Lucrul mecanic virtual al solicitărilor de reacțiune ale legăturilor exterioare pasive.* Avînd în vedere modul de definire a siste-

Scanned with CamScanner

mului de deplasări virtuale— corespund situaţiei cînd toate legăturile pasive exterioare şi interioare ar deveni staţionare — , ceea ce atrage după sine valabilitatea condiţiei

$$\delta\mathcal{L}_{ext_{Rid}} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{iO_{id}}\delta\bar{r}_{C_{iO}} + \overline{\mathfrak{M}}_{C_{iO}}(\bar{R}_{iO_{id}})\delta\bar{\Theta}_i] \equiv 0, \qquad (13.192)$$

rezultă că lucrul mecanic virtual al solicitărilor de reacţiune ale legăturilor pasive exterioare se va reduce numai la termenul corespunzător componentelor disipative ale torsorilor reacţiunilor, adică se va putea scrie

$$\boxed{\delta\mathcal{L}_{ext_R} = \delta\mathcal{L}_{ext_{R_d}} = \delta\mathcal{L}_{ext_{fr}} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\Phi}_{iO}\delta\bar{r}_{C_{iO}} + \bar{\mathcal{M}}_{fr_{iO}}\delta\bar{\Theta}_i]}. \qquad (13.193)$$

Numai în cazul posibilităţii de neglijare a frecărilor, ($\bar{\Phi}_{iO} \approx 0$; $\bar{\mathcal{M}}_{fr_{iO}} \approx 0$; $i = 1,2,\ldots,n$), se va putea accepta egalitatea cu zero a lucrului mecanic virtual al solicitărilor de reacţiune exterioare.

Considerînd şi aici torsorii rezultanţi în centrele de masă G_i ai tuturor solicitărilor exterioare pasive aplicate elementelor (S_i) ale unui sistem mecanic, se va putea scrie relaţia

$$\delta\mathcal{L}_{ext_p} = [\delta\mathcal{L}_{R_z} + \delta\mathcal{L}_{ext_{R_{a_d}}} + \delta\mathcal{L}_{sxt_{fr}}] + \delta\mathcal{L}_{ext_{R_{a_{pt}}}} = \delta\mathcal{L}_{ext_d} + \delta\mathcal{L}_{ext_{R_{a_{pt}}}}, \qquad (19.194)$$

termenul $\delta\mathcal{L}_{ext_d}$ reprezentînd lucrul mecanic virtual corespunzător tuturor solicitărilor disipative exterioare.

Egalitatea cu zero a acestui lucru mecanic, adică satisfacerea relaţiei

$$\delta\mathcal{L}_{ext_p} \equiv 0, \qquad (13.195)$$

va fi acceptată şi aici numai în următoarele condiţii:

— mişcarea sistemului mecanic să se efectueze în mediu cu rezistenţă neglijabilă, iar elementele sistemului să aibă profile de minimă rezistenţă, ($\delta\mathcal{L}_{R_z} = 0$);

— legăturile active exterioare aplicate sistemului mecanic să fie cu amortizare neglijabilă, ($\delta\mathscr{L}_{ext_{R_a}} \equiv 0$);

— legăturile pasive exterioare aplicate elementelor sistemului mecanic să fie cu frecări neglijabile, ($\delta\mathscr{L}_{ext_{fr}} \equiv 0$).

Lucrul mecanic virtual al solicitărilor interioare. *Lucrul mecanic virtual al solicitărilor interioare active.* În condițiile aceluiași model general de legătură activă interioară, care a fost adoptat și la calculul lucrului mecanic real al solicitărilor elastice interioare, lucrul mecanic virtual al acestor din urmă solicitări va fi dat de relația

$$\boxed{\delta\mathscr{L}_{int_a} = \delta U_{iut}}, \tag{13.196}$$

cu funcția de forță U_{int} determinată și acum prin relația (13.171) și cu operatorul δ având și aici semnificația matematică de operator diferențial, adică se va scrie

$$\delta U_{int} = \sum_i \left[\frac{\partial U_{int}}{\partial x_{G_i}} \delta x_{G_i} + \frac{\partial U_{int}}{\partial y_{G_i}} \delta y_{G_i} + \frac{\partial U_{int}}{\partial z_{G_i}} \delta z_{G_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U_{int}}{\partial \psi_i} \delta\psi_i + \frac{\partial U_{int}}{\partial \varphi_i} \delta\varphi_i + \frac{\partial U_{int}}{\partial \theta_i} \delta\theta_i \right]. \tag{13.197}$$

Lucrul mecanic virtual al solicitărilor interioare pasive.

— *Lucrul mecanic virtual al rezistențelor de amortizare interioară.* Ținînd seama de expresiile (13.122) și (13.123), precum și de condiția (13.125), ale componentelor torsorilor în polii G_i ai acestor solicitări, lucrul mecanic virtual corespunzător lor va fi determinat prin relația

$$\boxed{\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_{int_{R_a}} = -\sum_{(\mathscr{A}e_{ij})} & [C_{ij}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j})(\delta\bar{r}_{G_i} - \delta\bar{r}_{G_i}) + \\ & + D_{ij}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)(\delta\bar{\Theta}_i - \delta\bar{\Theta}_j)]\end{aligned}}, \tag{13.198}$$

cu semnificația cunoscută pentru simbolul $\sum_{(\mathscr{A}_{e_{ij}})}$; acest lucru mecanic virtual va putea fi considerat egal cu zero numai în cazul legăturilor active interioare cu amortizare neglijabilă.

— *Lucrul mecanic virtual al solicitărilor de reacțiune a legăturilor pasive interioare.* Ținînd seama și aici de modul de definire a sistemului de deplasări virtuale, precum și de observațiile făcute cu prilejul calculului lucrului mecanic real al reacțiunilor legăturilor pasive interioare aplicate unui sistem mecanic, rezultă egalitatea cu zero a lucrului mecanic virtual al componentelor ideale ale torsorilor reacțiunilor interioare, adică condiția

$$\delta\mathscr{L}_{int_{R_{id}}} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{int_{i_{id}}} \delta\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_{i_{id}}})\, \delta\bar{\Theta}] \equiv 0 \qquad (13.199)$$

și deci reducerea expresiei lucrului mecanic virtual al solicitărilor de reacțiune ale legăturilor pasive interioare numai la termenul datorat frecărilor:

$$\boxed{\delta\mathscr{L}_{in_R} = \delta\mathscr{L}_{int_{fr}}}. \qquad (43.200)$$

Egalitatea cu zero a acestui lucru mecanic virtual va putea fi acceptată deci numai în cazul posibilității de neglijare a frecărilor în cuplele cinematice interioare.

Luînd în considerație toate solicitările interioare pasive aplicate elementelor unui sistem mecanic, lucrul mecanic virtual corespunzător lor va fi determinat prin relația

$$\delta\mathscr{L}_{int_p} = \delta\mathscr{L}_{int_{R_a}} + \delta\mathscr{L}_{int_{fr}} = \delta\mathscr{L}_{int_d} \qquad (43.201)$$

și va putea fi considerat egal cu zero numai în următoarele condiții:

— toate legăturile active interioare aplicate sistemului mecanic să fie cu amortizare neglijabilă, ($\delta\mathscr{L}_{int_{R_a}} \equiv 0$);

— toate legăturile pasive interioare să fie cu frecare neglijabilă, ($\delta\mathscr{L}_{int_{fr}} \equiv 0$).

Scanned with CamScanner

Lucrul mecanic virtual al solicitărilor de inerţie. Noţiunea de lucru mecanic virtual al solicitărilor de inerţie, deşi lipsită de o semnificaţie fizică concretă atît prin modul de definire a sistemului de deplasări virtuale, cît şi prin caracterul fictiv, pentru observatorul legat de reperul absolut la care este raportată mişcarea unui sistem mecanic, al solicitărilor de inerţie atunci cînd ele sînt considerate aplicate elementelor sistemului, va juca, după cum se va vedea ulterior, un rol important în prezentarea unei anumite metode generale de rezolvare a problemelor de dinamica sistemelor mecanice, metodă purtînd numele de *mecanica analitică* şi care va fi expusă în paragraful următor al lucrării.

Dacă $\bar{\mathscr{F}}_i^i = -\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i = -\dot{\bar{\mathscr{K}}}_{G_i}$ sînt componentele torsorilor în polii G_i ai solicitărilor de inerţie corespunzătoare elementelor (S_i) ale unui sistem mecanic, atunci lucrul mecanic virtual al acestor solicitări de inerţie va fi determinat prin relaţia

$$\boxed{\delta\mathscr{L}^i = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{F}}^i \delta\bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \delta\bar{\Theta}_i]} \qquad (43.202)$$

sau încă, ţinînd seama şi de expresiile (13.139) ale componentelor torsorilor solicitărilor de inerţie, mai rezultă

$$\boxed{\delta\mathscr{L}^i = -\sum_{i=1}^{n} [\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i \delta\bar{r}_{G_i} + \dot{\bar{\mathscr{K}}}_{G_i} \delta\bar{\Theta}_i]} \qquad (43.203)$$

La această expresie se va reveni la sfîrşitul paragrafului.

2°. Puterea mecanică a solicitărilor aplicate unui sistem mecanic

Puterea mecanică a unui sistem de solicitări, de un tip determinat, aplicate elementelor unui sistem mecanic va fi definită ca sumă a puterilor mecanice corespunzătoare solicitărilor de tipul

considerat, aplicate tuturor elementelor ce alcătuiesc sistemul mecanic respectiv.

În consecinţă, dacă $\bar{\mathcal{F}}_i$ şi $\bar{\mathcal{M}}_{G_i}$ sînt componentele torsorilor în polii G_i ai solicitărilor de un tip sau categorie determinată, aplicate elementelor (S_i) ale unui sistem mecanic şi $\bar{v}_{G_i}$ şi $\bar{\omega}_i$ sînt parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor respective, atunci puterea mecanică a solicitărilor considerate, corespunzătoare întregului sistem mecanic va fi determinată prin relaţia

$$\boxed{\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathcal{F}}_i \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathcal{M}}_{G_i} \bar{\omega}_i]} \qquad (13.204)$$

în cazul cînd toate elementele sistemului mecanic sînt considerate rigide ca atare şi prin relaţia

$$\boxed{\mathcal{P} = \sum_{\mathcal{A}(S_i)} [\bar{\mathcal{F}}_i \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathcal{M}}_{G_i} \bar{\omega}_i] + \sum_{\mathcal{A}(G_j)} \bar{\mathcal{F}}_j \bar{v}_j} \qquad (43.205)$$

în cazul cînd sistemul conţine şi un subansamblu de elemente asimilate cu puncte materiale.

În continuare, vor fi stabilite expresiile puterilor mecanice pentru categoriile şi tipurile de solicitări examinate în subpunctele precedente.

a) *Puterea mecanică a solicitărilor exterioare.*

— *Puterea mecanică a solicitărilor exterioare active.* Notînd şi acum cu $\bar{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}}$ şi $\bar{\mathcal{M}}_{ext_{a_{G_i}}}$ componentele torsorilor în centrele de masă G_i ai solicitărilor exterioare active aplicate elementelor (S_i) ale unui sistem mecanic, atunci puterea mecanică corespunzătoare acestor solicitări va fi dată de relaţia

$$\boxed{\mathcal{P}_{ext_a} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathcal{M}}_{ext_{a_{G_i}}} \bar{\omega}_i]} \cdot \qquad (43.206)$$

Scanned with CamScanner

În cazul cînd solicitările exterioare active derivă dintr-o funcție de forță exterioară U_{ext}, atunci puterea mecanică corespunzătoare acestor solicitări va fi determinată prin relația

$$\mathscr{P}_{ext_a} = \frac{d\mathscr{L}_{ext_a}}{dt} = \frac{dU_{ext}}{dt} = \dot{U} = \sum_i \left[\frac{\partial U_{ext}}{\partial x_{G_i}} \dot{x}_{G_i} + \frac{\partial U_{ext}}{\partial y_{G_i}} \dot{y}_{G_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U_{ext}}{\partial z_{G_i}} \dot{z}_{G_i} + \frac{\partial U_{ext}}{\partial \psi_i} \dot{\psi}_i + \frac{\partial U_{ext}}{\partial \varphi_i} \dot{\varphi}_i + \frac{\partial U_{ext}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right]. \qquad (43.207)$$

Puterea mecanică a solicitărilor exteritoare pasive. Folosind, pentru componentele torsorilor diferitelor tipuri de solicitări exterioare pasive, notațiile utilizate și în cadrul primelor două puncte ale acestui paragraf, vor rezulta următoarele expresii pentru puterile mecanice ale acestor solicitări :

— *Puterea mecanică a rezistențelor mediului*, va avea expresia

$$\boxed{\mathscr{P}_{R_z} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{z_i} \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{z_i}) \bar{\omega}_i]}, \qquad (13.208)$$

cu forma particulară

$$\boxed{\mathscr{P}_{R_z} = -\sum_{i=1}^{n} [c_{R_{i0}} \bar{v}^2_{G_i} + k_{R_{i0}} \bar{\omega}_i^2] < 0} \qquad (13.209)$$

pentru sistemele mecanice constituite din elemente reprezentate prin modelul pentru care torsorul rezistențelor mediului are forma (13.105).

— *Puterea mecanică a solicitărilor de amortizare exterioară.* Expresia acestei puteri mecanice va avea forma

$$\boxed{\mathscr{P}_{ext_{R_a}} = \sum_i [\bar{R}_{a_{i0}} \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathcal{M}}_{a_{i0}} \bar{\omega}_i] = \mathscr{P}_{ext_{R_{a_d}}} + \mathscr{P}_{ext_{R_{a_{pt}}}}}, \qquad (13.210)$$

Scanned with CamScanner

cu termenul

$$\mathscr{P}_{extR_{a_d}} = \sum_i [\bar{R}_{a_{i0_d}} \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{a_{i0_d}} \bar{\omega}_i]. \tag{13.211}$$

reprezentînd puterea mecanică a componentelor disipative ale solicitărilor de amortizare şi cu termenul

$$\mathscr{P}_{extR_{a_{pt}}} = [\bar{R}_{a_{i0_{pt}}} \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{a_{i0_d}} \bar{\omega}_i] \tag{13.212}$$

reprezentînd puterea mecanică a componentelor perturbatoare ale solicitărilor de amortizare exterioară.

— *Puterea mecanică a solicitărilor de reacţiune ale legăturilor exterioare pasive* va fi dată de relaţia

$$\boxed{\mathscr{P}_{dxt_R} = \sum_i [\bar{R}_{i0} \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{i0})\bar{\omega}_i] = \mathscr{P}_{ex_{R_{id}}} + \mathscr{P}_{ex_{R_d}}} \tag{13.213}$$

cu termenul

$$\mathscr{P}_{ext_{R_{id}}} = \sum_i [\bar{R}_{i0_d} \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{i0_{id}})\bar{\omega}_i] \tag{13.214}$$

reprezentînd puterea mecanică a componentelor ideale ale torsorilor reacţiunilor — termen egal cu zero în cazul cînd legăturile pasive exterioare sînt staţionare — şi cu termenul

$$\mathscr{P}_{ext_{R_d}} = \mathscr{P}_{ext_{fr}} = \sum_i [\Phi_{i0} \bar{v}_{C_{i0}} + \bar{\mathscr{M}}_{fr_{i0}} \bar{\omega}_i] \tag{13.215}$$

reprezentînd puterea mecanică a componentelor disipative ale reacţiunilor legăturilor pasive exterioare, datorate frecărilor.

Ca şi în cazul lucrului mecanic elementar şi în cazul puterii mecanice se va considera, în prezentarea în continuare a problemelor dinamicii sistemelor mecanice, puterea mecanică a tuturor solicitărilor exterioare pasive, definită prin relaţia

$$\mathscr{P}_{ext_p} = \mathscr{P}_{R_z} + \mathscr{P}_{ext_{R_a}} + \mathscr{P}_{ext_R} \tag{13.216}$$

și care va fi considerată egală cu zero numai în condițiile în care și lucrul mecanic elementar real al solicitărilor exterioare pasive va putea fi considerat egal cu zero (mișcarea în mediu cu rezistență neglijabilă, legături exterioare active cu amortizare neglijabilă, legături exterioare pasive cu frecare neglijabilă).

P u t e r e a m e c a n i c ă a s o l i c i t ă r i l o r i n t e r i o a r e. *Puterea mecanică a solicitărilor interioare active* Avînd în vedere expresia (13.170) a lucrului mecanic elementar al acestor solicitări, care derivă din funcția de forță U_{int}, va rezulta următoarea expresie pentru puterea mecanică a lor

$$\boxed{\mathcal{P}_{int_a} = \frac{d\mathcal{L}_{int_a}}{dt} = \frac{dU_{int}}{dt} = \dot{U}_{int}} \qquad (13.217)$$

cu :

$$\dot{U}_{int} = \sum_i \left[\frac{\partial U_{int}}{\partial x_{G_i}} \dot{x}_{G_i} + \frac{\partial U_{int}}{\partial y_{G_i}} \dot{y}_{G_i} + \frac{\partial U_{int}}{\partial z_{G_i}} \dot{z}_{G_i} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial U_{int}}{\partial \psi} \dot{\psi}_i + \frac{\partial U_{int}}{\partial \varphi_i} \dot{\varphi}_i + \frac{\partial U_{int}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i \right].$$

Puterea mecanică a solicitărilor interioare pasive. Folosind și aici notațiile utilizate la primele două subpuncte ale paragrafului pentru componentele torsorilor în centrele de masă G_i ale solicitărilor interioare pasive, vor rezulta următoarele expresii pentru puterile mecanice ale celor două tipuri de asemenea solicitări :

— *Puterea mecanică a solicitărilor de amortizare interioară*, dată de relația

$$\boxed{\mathcal{P}_{int_{R_a}} = \frac{d\mathcal{L}_{int_{R_a}}}{dt} = - \sum_{(\mathcal{A}_{e_{ij}})} [C_{ij}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j})^2 = D_{ij}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2]} \qquad (43.218)$$

— *Puterea mecanică a solicitărilor de reacțiune ale legăturilor interioare pasive*, determinată prin relația

$$\boxed{\mathcal{P}_{int_R} = \sum_i [\bar{R}_{int_i}\bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_i})\bar{\omega}_i] = \mathcal{P}_{int_{R_{id}}} + \mathcal{P}_{int_{R_d}}} \quad (13.219)$$

unde termenul

$$\mathcal{P}_{int_{R_{id}}} = \sum_i [\bar{R}_{int_{i_{id}}}\bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_{i_{id}}})\bar{\omega}_i] \quad (13.220)$$

reprezintă puterea mecanică a componentelor ideale ale reacțiunilor — egală cu zero în cazul cînd legăturile interioare pasive sînt staționare —, iar termenul

$$\mathcal{P}_{int_{R_d}} = \mathcal{P}_{int_{fr}} = \sum_i [\bar{R}_{int_{i_d}}\bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_{i_d}})\bar{\omega}_i] \quad (13.221)$$

va reprezenta puterea mecanică a componentelor disipative ale torsorilor reacțiunilor legăturilor pasive interioare, datorate frecărilor.

Şi în cazul acestei ultime categorii de solicitări se va lucra, în continuare, cu puterea mecanică a tuturor solicitărilor interioare pasive, definită prin relația

$$\mathcal{P}_{int_p} = \mathcal{P}_{int_{R_a}} + \mathcal{P}_{int_{fr}}, \quad (13.222)$$

putere care va putea fi considerată egală cu zero numai în condițiile în care și lucrul mecanic elementar real al acestor solicitări putea fi acceptat ca fiind egal cu zero (legăturile interioare active cu amortizare neglijabilă și legături interioare pasive staționare și cu frecare neglijabilă).

13.3.3. Caracteristici dinamice generalizate

Considerînd un sistem mecanic cu p grade de libertate, cu elementele sale supuse la un tip determinat de solicitări, cu torsorii în centrele de masă G_i ale elementelor (S_i), $(i = 1,2,\ldots,n)$, de compo-

nente $\bar{\mathscr{F}}_i$ și $\bar{\mathfrak{M}}_{G_i}$, lucrul mecanic virtual corespunzător acestui sistem de solicitări va fi dat de relația

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{F}}\, \delta\bar{v}_{G_i} + \bar{\mathfrak{M}}_{G_i}\delta\bar{\Theta}_i]. \tag{13.223}$$

Efectuînd, în relația precedentă, înlocuirile cunoscute

$$\delta\bar{v}_{G_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\,\delta q_k; \quad \delta\bar{\Theta}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\,\delta q_k.$$

și inversînd ordinea de sumare astfel încît deplasările elementare generalizate să poată fi scoase în factor, rezultă următoarea expresie pentru lucrul mecanic virtual $\delta\mathscr{L}$:

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{k=1}^{p}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{\mathscr{F}}_i\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathfrak{M}}_{G_i}\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right)\right]\delta q_k. \tag{13.224}$$

Mărimile

$$\boxed{Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{F}}_i\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathfrak{M}}_{G_i}\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right], \quad (k = 1, 2, \ldots, p)} \tag{13.225}$$

reprezentînd caracteristicile dinamice generalizate corespunzătoare tipului de interacțiune considerat, sînt numite în literatura de specialitate *forțe generalizate ale gradelor de libertate* k, denumire justificată de faptul că produsele acestor mărimi prin deplasările virtuale generalizate δg_k dau lucru mecanic.

Calculul efectiv al forțelor generalizate definite prin relația (13.225) va fi realizat cu ajutorul expresiilor lor analitice, cu termenii corespunzători translațiilor exprimați în raport cu reperul fix și cu termenii datorați rotațiilor exprimați în raport cu reperele invariabil legate de elementele sistemului mecanic; vor rezulta astfel expresiile analitice

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathscr{F}_{i_x}\frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_k} + \mathscr{F}_{i_y}\frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_k} + \mathscr{F}_{i_z}\frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_k} + \right.$$

$$\left. + \mathfrak{M}'_{G_{i_x}}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_i}\bar{i}'_i\right) + \mathfrak{M}'_{G_{i_y}}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{j}'_i\right) + \mathfrak{M}'_{G_{i_z}}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\bar{k}'_i\right)\right], \tag{13.226}$$

cu semnificaţiile (13.22) pentru factorii ce înmulţesc momentele axiale, dacă este vorba de sisteme mecanice spaţiale, expresiile analitice

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathscr{F}_{i_x} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_k} + \mathscr{F}_{i_y} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_k} + \mathscr{F}_{i_z} \frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_k} + \mathscr{M}'_{G_{i_z}} \frac{\partial \varphi_n}{\partial q_k} \right], \tag{43.227}$$

dacă este vorba de sisteme conţinînd elemente ce execută rotaţii efectuate numai în jurul axelor centrale de inerţie $G_i z'_i$, de direcţii fixe în spaţiu, $\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \bar{k}'_i \right)$, respectiv expresiile analitice

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \left[\mathscr{F}_{i_x} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_k} + \mathscr{F}_{i_y} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_k} + \mathscr{M}_{G_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \right], \tag{13.228}$$

în cazul sistemelor mecanice plane $\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \bar{k}'_i ; \quad \overline{\mathscr{M}}_{G_i} = \mathscr{M}_{G_i} \bar{k}'_i \right)$.

În ceea ce priveşte semnificaţiile fizice ale forţelor generalizate, ele vor fi stabilite pe baza următoarelor observaţii:

— forţele generalizate Q_k au semnificaţii fizice de forţe în cazul cînd coordonatele lagrangiene q_k, care le definesc, sînt coordonate carteziene, sau alte mărimi cu dimensiuni fizice de lungimi;

— forţele generalizate Q_k au semnificaţii fizice de momente ale forţelor în cazul cînd coordonatele generalizate q_k, care le determină, sînt unghiuri ale lui Euler,

observaţii uşor de justificat constatîndu-se că în cazul unui sistem mecanic constituit dintr-un singur element în mişcare plan-paralelă liberă — deci al unui sistem cu trei grade de libertate şi cu poziţia determinată prin trei parametri lagrangeieni, care pot fi chiar cei trei parametri de poziţie, independenţi între ei, ai elementului, ($p = 3$; $q_1 = x_G$; $q_2 = y_G$; $q_3 = \varphi$) —,

pentru cele trei forțe generalizate corespunzătoare solicitărilor $\overline{\mathcal{F}}$ și $\overline{\mathcal{M}}_G$ aplicate elementului, rezultă semnificațiile de mai jos:

$$Q_1 = \overline{\mathcal{F}} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_1} + \overline{\mathcal{M}}_G \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial q_1} = \mathcal{F}_x \frac{\partial x_G}{\partial x_G} + \mathcal{F}_y \frac{\partial y_G}{\partial x_G} + \mathcal{M}_G \frac{\partial \varphi}{\partial x_G} = \mathcal{F}_x;$$

$$Q_2 = \overline{\mathcal{F}} \frac{\partial \bar{r}_G}{\partial q_2} + \overline{\mathcal{M}}_G \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial q_2} = \mathcal{F}_x \frac{\partial x_G}{\partial y_G} + \mathcal{F}_y \frac{\partial y_G}{\partial y_G} + \mathcal{M}_G \frac{\partial \varphi}{\partial y_G} = \mathcal{F}_y;$$

$$Q_3 = \overline{\mathcal{F}} \frac{\partial \bar{r}_G}{\partial q_3} + \overline{\mathcal{M}}_G \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial q_3} = \mathcal{F}_x \frac{\partial x_G}{\partial \varphi} + \mathcal{F}_y \frac{\partial y_G}{\partial \varphi} + \mathcal{M}_G \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = \mathcal{M}_G. \tag{13.229}$$

În continuare, vor fi stabilite expresiile forțelor generalizate pentru tipurile de solicitări examinate în cadrul subpunctului 3.1 al acestui paragraf.

1°. Forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor exterioare

a) *Forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor exterioare active.* Dacă $\overline{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}}$ și $\overline{\mathcal{M}}_{ext_{a_{G_i}}}$ sînt componentele torsorilor rezultanți în centrele de masă G_i ale solicitărilor active aplicate elementelor (S_i), $(i = 1,2,\ldots,n)$ ale unui sistem mecanic, atunci forțele generalizate corespunzătoare acestor solicitări vor avea expresiile

$$\boxed{Q_{ext_{a_k}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathcal{M}}_{ext_{a_{G_i}}} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right], \quad k = (1, 2 \ldots, p)} \tag{13.230}$$

cu expresiile analitice avînd, după caz, una din formele (13.226), (13.227), sau (13.228).

În cazul solicitărilor active care derivă dintr-o funcţie de forţă, s-a văzut că lucrul mecanic virtual al lor se exprimă prin relaţia

$$\delta \mathscr{L}_{ext_{ac}} = \delta U_{ext},$$

cu funcţia de forţă depinzînd de parametrii de poziţie ai sistemului mecanic şi deci, în baza relaţiilor (13.32), de coordonatele generalizate ale sistemului şi eventual şi de timp pentru sistemele mecanice reonome; considerînd, în continuare, numai situaţia cea mai des întîlnită în aplicaţiile practice, a sistemelor mecanice scleronome, se va putea exprima funcţia iniţială de forţă U_{ext} ca o funcţie depinzînd numai de parametrii lagrangeni de poziţie, în baza relaţiei

$$U_{ext} = U_{ext}(\ldots x_{Q_i}(q); y_{Q_i}(q); z_{Q_i}(q); \psi_i(q); \varphi_i(q); \theta_i(q) \ldots) =$$

$$= U_{ext}(q_1, \ldots, q_p) = U_{ext}(q). \tag{43.231}$$

Notînd acum cu $Q_{ext_{ac_k}}$ forţele generalizate ale unui sistem mecanic scleronom, corespunzătoare unui anumit tip de solicitări active conservative derivînd din funcţia de forţă U_{ext}, aceste forţe vor fi determinate, pe de o parte, prin relaţiile

$$Q_{ext_{ac_k}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{\mathscr{F}}_{ext_{ac_i}} \frac{\partial \overline{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathscr{M}}_{ext_{ac_{G_i}}} \frac{\partial \overline{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] \tag{13.232}$$

unde $\overline{\mathscr{F}}_{ext_{ac_i}}$ şi $\overline{\mathscr{M}}_{ext_{ac_{G_i}}}$ sînt componentele torsorilor în centrele de masă G_i ale acestor solicitări conservative aplicate elementelor (S_i) ale sistemului mecanic, rezultînd astfel următoarea expresie pentru lucrul mecanic virtual al lor:

$$\delta \mathscr{L}_{dxt_{ac}} = \sum_{k=1}^{p} Q_{ext_{ac_k}} \delta q_k. \tag{13.233}$$

Pe de altă parte, observînd că, în condiţiile precizate, semnificaţia matematică a simbolului δ aplicat funcţiei U_{ext} este aceea de

diferențială totală, pentru lucrul mecanic virtual al aceloraşi solicitări va mai putea fi scrisă expresia

$$\delta \mathscr{L}_{ext_{ac}} = \delta U_{ext} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial U_{ext}}{\partial q_k} \delta q_k. \tag{13.234}$$

Dată fiind arbitrarietatea deplasărilor virtuale generalizate δq_k, independente între ele ca şi coordonatele generalizate, rezultă, din compararea relaţiilor (13.233) şi (13.234), următoarele expresii pentru forţele generalizate corespunzătoare solicitărilor active conservative :

$$\boxed{Q_{ext_{ac_k}} = \frac{\partial U_{ext}}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)} \tag{13.235}$$

În cazul solicitărilor elastice exterioare, care pot conţine, după cum se ştie, şi termeni perturbatori, forţele generalizate corespunzătoare lor vor avea expresiile

$$Q_{ext_{e_k}} = \sum_i \left[(\bar{F}_{e_{i0_c}} + \bar{F}_{e_{i0_{pt}}}) \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + (\bar{\mathscr{M}}_{e_{i0_c}} + \bar{\mathscr{M}}_{e_{i0_{pt}}}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] =$$

$$= \sum_i \left[\bar{F}_{e_{i0_c}} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathscr{M}}_{e_{i0_c}} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] + \sum_i \left[\bar{F}_{e_{i0_{pt}}} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathscr{M}}_{e_{i0_{pt}}} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right],$$

adică

$$\boxed{Q_{ext_{e_k}} = \frac{\partial U_{ext_e}}{\partial q_k} + Q'_{ex_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)}, \tag{13.236}$$

în aceste relaţii primii termeni reprezentînd componentele datorate termenilor conservativi — cu funcţia de forţă exprimată în coordonate generalizate —, iar termenii

$$Q'_{ex_k} = \sum_i \left[\bar{F}_{e_{i0_{pt}}} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathscr{M}}_{e_{i0_{pt}}} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] =$$

$$= \sum_i \left[k_{e_{i0}} (\bar{r}_{E_{i0}} - \bar{r}_{E_{i0_{st}}}) \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + k_{t_{i0}} (\varphi_{E_{i0}} - \varphi_{E_{i0_{st}}}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k} \right]$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

Scanned with CamScanner

reprezentînd forțele generalizate corespunzătoare componentelor perturbatoare ale solicitărilor elastice, numite încă și *forțe generalizate de excitație*; aceste din urmă componente ale forțelor generalizate vor fi funcții de parametrii lagrangeieni de poziție — prin intermediul mărimilor $\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}$ și $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}$ —, cît și funcții explicite de timp — prin intermediul mărimilor $\bar{r}_{E_{i0}} = \bar{r}_{E_{i0}}(t)$ și $\varphi_{E_{i0}} = \varphi_{E_{i0}}(t)$, funcții de timp considerate cunoscute.

2°. Forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor exterioare pasive

— *Forțele generalizate corespunzătoare rezistențelor mediului* vor avea expresiile

$$\boxed{Q_{R_z} = \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{R}_{z_i} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{z_i}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] \quad (k = 1, 2, \ldots, p)} . \tag{13.237}$$

O formă particulară a acestor expresii poate fi obținută în cazul sistemelor mecanice în mișcare în mediu cu rezistență satisfăcînd prima lege a lui Newton și cu elementele asimilabile modelului pentru care au fost stabilite expresiile (13.105) ale componentelor torsorilor în centrele de masă G_i ale rezistențelor mediului.

Într-adevăr, folosind expresiile menționate mai sus și ținînd seama și de prima serie de relații Lagrange [relațiile (12.45)], se poate ajunge la următoarele expresii pentru forțele generalizate corespunzătoare rezistențelor mediului

$$Q_{R_{z_k}} = -\sum_{i=1}^{n} \left[c_{R_{i0}} \bar{v}_{G_i} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + k_{R_{i0}} \bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \left[c_{R_{i0}} \bar{v}_{G_i} \frac{\partial \bar{v}_{G_e}}{\partial \dot{q}_k} + k_{R_{i0}} \bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} \right],$$

adică

$$\boxed{Q_{R_{z_k}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(c_{R_{i0}}\bar{v}_{G_i}^2 + k_{R_{i0}}\bar{\omega}_i^2\right)\right] = -\frac{\partial \mathcal{R}_{R_z}}{\partial \dot{q}_k}} \tag{13.238}$$

funcţia

$$\boxed{\mathcal{R}_{R_z} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[c_{R_{i0}}\bar{v}_{G_i}^2 + k_{R_{i0}}\bar{\omega}_i^2\right] = \mathcal{R}_{R_z}(q, \dot{q}, t)} \tag{13.239}$$

purtînd numele de *funcţia disipativă a lui Rayleigh corespunzătoare rezistenţelor mediului*, ea depinzînd, prin intermediul parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic, de coordonatele lagrangeiene ale sistemului mecanic, de vitezele lui generalizate şi, în cazul sistemelor reonome, de timp explicit.

— *Forţele generalizate corespunzătoare rezistenţelor de amortizare exterioare.* Aceste forţe generalizate vor fi determinate prin relaţiile

$$\boxed{Q_{ext_{R_{a_k}}} = \sum_i\left[\bar{R}_{a_{i0}}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \bar{M}_{a_{i0}}\cdot\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] = Q_{ext_{Ra_{d_k}}} + Q_{ext_{Ra_{pt_k}}},\quad (k = 1, 2, \ldots, p)} \tag{13.240}$$

unde termenii

$$Q_{ext_{Ra_{d_k}}} = -\sum_i\left[C_{i0}\bar{v}_{G_i}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + D_{i0}\bar{\omega}_i\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{13.241}$$

vor reprezenta forţele generalizate corespunzătoare componentelor disipative ale rezistenţelor de amortizare exterioară, iar termenii

$$Q_{ext_{Ra_{d_k}}} = Q''_{ex_k} = \sum_i\left[C_{i0}\bar{v}_{E_{i0}}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + D_{i0}\bar{\omega}_i\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] = Q''_{ex_k}(q; t) \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{13.242}$$

funcții de coordonatele generalizate — prin intermediul mărimilor $\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}$ și $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}$ — și de timp — atît prin intermediul mărimilor $\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}$ și $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}$ în cazul sistemelor reonome, cît și prin intermediul parametrilor cinematici $\bar{v}_{E_{i0}} = \bar{v}_{E_{i0}}(t)$ și $\bar{\omega}_{E_{i0}} = \bar{\omega}_{E_{i0}}(t)$' — vor reprezenta forțele generalizate corespunzătoare componentelor perturbatoare ale solicitărilor de amortizare exterioară, jucînd de asemenea rolul de forțe de excitație, ca și cele corespunzătoare componentelor perturbatoare ale solicitărilor elastice exterioare.

Pentru forțele generalizate corespunzătoare componentelor disipative ale solicitărilor de amortizare exterioară vor putea fi stabilite expresii analoge expresiilor (13.238), observîndu-se că prin folosirea și aici a primei serii de relații Lagrange [relațiile (12.45)], vor putea fi scrise relațiile

$$Q_{ext_{Ra_{d_k}}} = -\sum_i \left[C_{i0}\bar{v}_{G_i} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + D_{i0}\bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] =$$

$$= -\sum_i \left[C_{i0}\bar{v}_{G_i} \frac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial \dot{q}_k} + D_{i0}\bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} \right],$$

adică

$$\boxed{Q_{ext_{Ra_{d_k}}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left\{\frac{1}{2}\sum_i [C_{i0}\bar{v}_{G_i}^2 + D_{i0}\bar{\omega}_i^2]\right\} = -\frac{\partial \mathcal{R}_{ext_{Ra}}}{\partial \dot{q}_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)} \tag{13.243}$$

unde

$$\boxed{\mathcal{R}_{ext_{Ra}} = \frac{1}{2}\sum_i [C_{i0}\bar{v}_{G_i}^2 + D_{i0}\bar{\omega}_i^2] = \mathcal{R}_{ext_{Ra}}(q; \dot{q}; t)} \tag{13.244}$$

este *funcția disipativă a lui Rayleigh corespunzătoare componentelor disipative ale solicitărilor de amortizare exterioară.*

Scanned with CamScanner

— *Forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor de reacțiune ale legăturilor exterioare pasive.* Avînd în vedere expresia (13.193) a lucrului mecanic virtual al solicitărilor de reacțiune a legăturilor exterioare pasive aplicate unui sistem mecanic, lucru mecanic datorat numai componentelor disipative ale acestor solicitări, se va putea trage concluzia că și forțele generalizate ale soliciărilor de reacțiune exterioare se vor reduce numai la cele corespunzătoare componentelor disipative ale acelor solicitări, adică se va putea scrie

$$Q_{ext_{R_k}} = Q_{ext_{R_{d_k}}} = Q_{ext_{fr_k}} = \sum_i \left[\bar{R}_{i0_d} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \right.$$

$$\left. + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{i0_d}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] = \sum_i \left[\bar{\Phi}_{i0} \frac{\partial \bar{r}_{C_{i0}}}{\partial q_k} + \bar{\mathcal{M}}_{fr_{i0}} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right],$$

sau încă, folosind și aici relațiile (12.45), mai rezultă

$$\boxed{Q_{ext_{R_k}} = Q_{ext_{fr_k}} = \sum_i \left[\bar{\Phi}_{i0} \frac{\partial \bar{v}_{C_{i0}}}{\partial \dot{q}_k} + \bar{\mathcal{M}}_{fr_{i0}} \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} \right]}. \quad (13.245)$$

$$\boxed{(k = 1, 2, \ldots, p)}$$

În legătură cu aceste solicitări trebuie făcută mențiunea că și în dinamica sistemelor mecanice, ca și în dinamica rigidului, rezolvarea problemelor va fi posibilă numai în cele două situații cunoscute :

— fie în condițiile neglijării tuturor frecărilor ($\bar{\Phi}_{i0} \approx 0$; $\bar{\mathcal{M}}_{fr_{i0}} \approx 0$; $i = 1,2,\ldots, n$), cînd forțele generalizate ale solicitărilor de reacțiune exterioare vor fi considerate și ele egale cu zero ;

— fie în condițiile aproximării componentelor disipative ale solicitărilor de reacțiune exterioare — forțe de frecare și momente de frecare — cu valori constante, corespunzătoare cazului static, considerate cunoscute și acceptate și ca valori medii pentru cazul dinamic.

Considerînd ultima situație, care include în ea, ca un caz particular, și pe prima — corespunzînd cazului cînd valorile constante

ale solicitărilor disipative devin chiar zero —, vor rezulta următoarele expresii finale pentru forţele generalizate ale solicitărilor de reacţiune ale legăturilor pasive exterioare aplicate unui sistem mecanic :

$$\boxed{Q_{ext_{R_k}} = Q_{ext_{fr_k}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\sum_i (\bar{\Phi}\bar{v}_{C_{i_0}} + \bar{\mathcal{M}}_{fr_{i_0}}\bar{\omega}_i)\right] = \frac{\partial \bar{R}_{ext_{fr}}}{\partial \dot{q}_k}} \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{13.246}$$

Celor trei tipuri de solicitări exterioare pasive le vor corespunde forţe generalizate totale exterioare pasive, determinate prin relaţiile

$$Q_{ext_{p_k}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\bar{F}_{ext_{p_i}}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_{G_i}}}\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] =$$

$$= [Q_{R_{z_k}} + Q_{ext_{Ra_{d_k}}} + Q_{ext_{fr_k}}] + Q''_{ex_k},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p) \tag{13.247}$$

suma primilor trei termeni, adică

$$Q_{ext_{d_k}} = Q_{R_{z_k}} + Q_{ext_{Ra_{d_k}}} + Q_{ext_{fr_k}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{13.248}$$

reprezentînd *forţele generalizate disipative exterioare totale* corespunzătoare gradelor de libertate k, iar ultimul termen

$$Q''_{ex_k} = Q''_{ext_{Ra_{pt_k}}} = Q''_{ex_k}(q; t) \qquad k = 1, 2, \ldots, p) \tag{13.249}$$

jucînd rolul de *forţă generalizată exterioară de excitaţie.*

În cazul cînd forţele generalizate corespunzătoare rezistenţelor mediului au formele (13.238), se poate defini o *funcţie disipativă*

exterioară totală a lui Rayleigh, în baza relației

$$Q_{R_{z_k}} + Q_{ext_{Ra_{d_k}}} = -\frac{\partial \mathcal{R}_{R_z}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{R}_{ext_{R_a}}}{\partial \dot{q}_k} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\mathcal{R}_{R_z} + \mathcal{R}_{ext_{R_a}}) = -\frac{\partial \mathcal{R}_{ext}}{\partial \dot{q}_k},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

această funcție disipativă totală avînd expresia

$$\boxed{\mathcal{R}_{ext} = \mathcal{R}_{R_z} + \mathcal{R}_{ext_{R_a}} = \frac{1}{2}\sum_i [(c_{R_{i0}} + C_{i0})\bar{v}_{G_i}^2 + (k_{R_{i0}} + D_{i0})\bar{\omega}_i^2]} \tag{13.250}$$

Se va arăta, în continuare, că în cazul sistemelor mecanice scleronome, funcția $\mathcal{R}_{ext}$ se prezintă ca o formă pătratică în vitezele generalizate, cu coeficienții formei pătratice funcții de parametrii lagrangeieni de poziție ai sistemului mecanic.

Într-adevăr, utilizînd expresiile (13.43) ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic scleronom considerat, expresia funcției disipative totale poate fi adusă la forma

$$\mathcal{R}_{ext} = \frac{1}{2}\sum_i \left[(c_{R_{i0}} + C_{i0}) \left(\sum_{h=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h} \dot{q}_h \right) \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \right.$$

$$\left. + (k_{R_{i0}} + D_{i0}) \left(\sum_{h=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h} \dot{q}_k \right) \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \right],$$

sau încă, efectuînd înmulțirile și inversînd ordinea de sumare astfel încît să se scoată vitezele generalizate în factori, mai rezultă

$$\mathcal{R}_{ext} = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{p} \left\{ \sum_i \left[(c_{R_{i0}} + C_{i0}) \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (k_{R_{i0}} + D_{i0}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] \right\} \dot{q}_h \dot{q}_k. \tag{13.251}$$

Scanned with CamScanner

Introducînd notaţiile

$$\beta_{ext_{hk}} = \beta_{ext_{kh}} = \sum_i \left[(c_{R_{i0}} + C_{i0}) \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \right.$$

$$\left. + (k_{R_{i0}} + D_{i0}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] = \beta_{ext_{kh}} = \beta_{ext_{hk}}(q),$$

$$(h, k = 1, 2, \ldots, p) \tag{13.252}$$

aceşti coeficienţi ai formei pătratice în vitezele generalizate (13.251) depinzînd de parametrii de poziţie lagrangeieni ai sistemului mecanic prin intermediul mărimilor $\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}$ şi $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}$, expresia funcţiei disipative totale va putea fi scrisă sub forma finală

$$\boxed{\mathcal{R}_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p} \beta_{ext_{hk}} \dot{q}_h \dot{q}_k} \tag{13.253}$$

care justifică afirmaţia făcută privind forma funcţiei $\mathcal{R}_{ext}$.

În condiţiile existenţei acestei funcţii şi în ipoteza valorilor constante ale solicitărilor de frecare exterioară, expresiile (13.247) ale forţelor generalizate pasive exterioare totale vor putea fi scrise sub formele

$$\boxed{Q_{ext_{p_k}} = -\frac{\partial \mathcal{R}_{ext}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathcal{P}_{ext_{fr}}}{\partial \dot{q}_k} + Q''_{ex_k}, \quad (k = 1, 2, .., p)}. \tag{13.254}$$

2°. Forţele generalizate corespunzătoare solicitărilor interioare

a) *Forţele generalizate corespunzătoare solicitărilor interioare active.* Pentru a stabili expresiile acestor forţe generalizate se va

observa că pentru lucrul mecanic virtual al lor poate fi scrisă, pe de o parte, expresia generală

$$\delta \mathscr{L}_{int_a} = \sum_{k=1}^{p} Q_{int_{a_k}} \delta q_k \tag{13.255}$$

și că, pe de altă parte, în baza relației (13.196), pentru același lucru mecanic va putea fi scrisă expresia

$$\delta \mathscr{L}_{int_a} = \delta U_{int} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial U_{int}}{\partial q_k} \delta q_k, \tag{13.256}$$

unde U_{int} este acum funcția de forță interioară după înlocuirea tuturor parametrilor de poziție ai sistemului mecanic conținuți în funcție cu expresiile lor în funcție de parametrii lagrangeieni de poziție.

Compararea, între ele, a relațiilor (13.255) și (13.256) conduce, ținînd seama și de arbitrarietatea deplasărilor virtuale δq_k, la următoarele expresii pentru forțele generalizate interioare active:

$$\boxed{Q_{int_{a_k}} = \frac{\partial U_{int}}{\partial q_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots p)}. \tag{13.267}$$

b) *Forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor interioare pasive.*

Forțele generalizate ale solicitărilor de amortizare interioară. Notînd cu $Q_{int_{Ra_k}}$ forțele generalizate corespunzătoare acestor solicitări, pentru lucrul lor mecanic virtual va putea fi scrisă, pe de o parte, expresia

$$\delta \mathscr{L}_{int_{Ra_k}} = \sum_{k=1}^{p} Q_{int_{Ra_k}} \delta q_k. \tag{13.258}$$

Pe de altă parte, plecînd de la expresia (13.198) a lucrului mecanic virtual al acestor solicitări și efectuînd în ea înlocuirile

$$\delta \bar{r}_{G_i} - \delta \bar{r}_{G_j} = \sum_{k=1}^{p} \left[\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} - \frac{\partial \bar{r}_{G_j}}{\partial q_k} \right) \delta q_k \right] = \sum_{k=1}^{p} \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \bar{v}_{G_j}}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j}) \right] \delta q_k$$

Scanned with CamScanner

și

$$\delta\bar{\Theta}_i - \delta\bar{\Theta}_j = \sum_{k=1}^{p}\left[\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial\bar{\Theta}_j}{\partial q_k}\right)\delta q_k\right] = \sum_{k=1}^{p}\left[\left(\frac{\partial\bar{\omega}_i}{\partial\dot{q}_k} - \frac{\partial\bar{\omega}_j}{\partial\dot{q}_k}\right)\delta q_k\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)\right]\delta q_k,$$

ușor de înțeles dacă se ține seama de relațiile (12.76) și (12.45), rezultă următoarea expresie pentru lucrul mecanic virtual $\delta\mathscr{L}_{int_{R_a}}$:

$$\delta\mathscr{L}_{int_{R_a}} = -\sum_{(A_{e_{ij}})}\left\{C_{ij}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j})\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j})\right]\delta q_k + \right.$$

$$\left. + D_{ij}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)\right]\delta q_k\right\}$$

sau încă, introducînd factorii din fața semnelor de sumare în interiorul sumelor și scoțînd deplasările generalizate virtuale δq_k în factori comuni, mai rezultă

$$\delta\mathscr{L}_{int_{R_a}} = -\sum_{(A_{e_{ij}})}\left\{\sum_{k=1}^{p}\left[C_{ij}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j})\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + D_{ij}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)\right]\delta q_k\right\}, \qquad (13.259)$$

Este suficient acum să se observe că această relație mai poate fi scrisă sub forma

$$\delta\mathscr{L}_{int_{R_a}} = -\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\frac{1}{2}\left[\sum_{(A_{e_{ij}})}\left[C_{ij}(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_j})^2 + D_{ij}(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2\right]\right\}\delta q_k, \qquad (13.260)$$

pentru ca, prin comparație cu expresia (13.258) a aceluiaș lucru mecanic virtual, precum și prin considerarea arbitrarietății deplasă-

rilor virtuale generalizate, să rezulte următoarele expresii pentru forţele generalizate ale solicitărilor de amortizare interioară;

$$\boxed{Q_{int_{Ra_k}} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left\{\frac{1}{2}\sum_{(\mathscr{A}_{e_{ij}})}[C_{ij}(\bar{v}_{G_i}-\bar{v}_{G_j})^2+D_{ij}(\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_j)^2]\right\}=-\frac{\partial \mathscr{R}_{int_{Ra}}}{\partial \dot{q}_k}} \qquad (k=1,2,\ldots,p) \tag{13.261}$$

expresii care scot în evidenţă existenţa şi în acest caz a unei *funcţii disipative a lui Rayleigh corespunzătoare solicitărilor de amortizare interioară*, funcţie definită de astă dată prin relaţia

$$\boxed{\mathscr{R}_{int_{Ra}} = \frac{1}{2}\sum_{(\mathscr{A}_{e_{ij}})}[C_{ij}(\bar{v}_{G_i}-\bar{v}_{G_j})^2+D_{ij}(\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_j)^2]}. \tag{13.262}$$

Se va arăta, în continuare, că şi această funcţie este, în cazul sistemelor mecanice scleronome, o formă pătratică în vitezele generalizate, cu coeficienţii formei pătratice funcţii de parametrii lagrangeieni de poziţie.

Într-adevăr, efectuînd în relaţia (13.262) înlocuirile:

$$(\bar{v}_{G_i}-\bar{v}_{G_j})^2 = \left[\sum_{h=1}^{p}\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}-\frac{\partial \bar{r}_{G_j}}{\partial q_h}\right)\dot{q}_h\right]\cdot\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}-\frac{\partial \bar{r}_{G_j}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\right]=$$

$$=\sum_{h,p=1}^{p}\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h}-\frac{\partial \bar{r}_{G_j}}{\partial q_h}\right)\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}-\frac{\partial \bar{r}_{G_j}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_h\dot{q}_k$$

şi

$$(\bar{\omega}_i-\bar{\omega}_j)^2 = \left[\sum_{h=1}^{p}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}-\frac{\partial \bar{\Theta}_j}{\partial q_h}\right)\dot{q}_h\right]\cdot\left[\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}-\frac{\partial \bar{\Theta}_j}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\right]=$$

$$=\sum_{h,k=1}^{p}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h}-\frac{\partial \bar{\Theta}_j}{\partial q_h}\right)\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}-\frac{\partial \bar{\Theta}_j}{\partial q_k}\right)\dot{q}_h\dot{q}_k,$$

funcţia $\mathscr{R}_{int_{R_a}}$ mai poate fi scrisă sub forma

$$\mathscr{R}_{int_{R_a}} = \frac{1}{2} \sum_{(\mathscr{A}_{e_{ij}})} \left\{ \sum_{h,k=1}^{p} \left[C_{ij} \left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_{G_j}}{\partial q_h} \right) \left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} - \frac{\partial \bar{r}_{G_j}}{\partial q_k} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + D_{ij} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{\Theta}_j}{\partial q_h} \right) \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \bar{\Theta}_j}{\partial q_k} \right) \right] \dot{q}_h \dot{q}_k \right\},$$

sau încă, inversînd ordinea de sumare astfel încît vitezele generalizate să poată fi scoase în factori şi introducînd notaţiile

$$\beta_{int_{hk}} = \beta_{int_{kh}} = \sum_{(\mathscr{A}_{e_{ij}})} \left[C_{ij} \left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_h} - \frac{\partial \bar{r}_{G_j}}{\partial q_h} \right) \left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} - \frac{\partial \bar{r}_{G_j}}{\partial q_k} \right) + \right.$$

$$\left. + D_{ij} \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \bar{\Theta}_j}{\partial q_h} \right) \left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \bar{\Theta}_j}{\partial q_k} \right) \right] = \beta_{int_{hk}}(q)$$

$$h, k = 1, 2, \ldots, p \tag{13.263}$$

se obţine următoarea expresie finală a funcţiei $R_{int_{R_a}}$:

$$\boxed{\mathscr{R}_{int_{R_a}} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{p} \beta_{int_{hk}} \dot{q}_h \dot{q}_h} \tag{13.264}$$

reprezentînd, după cum se vede, o formă pătratică în vitezele generalizate, cu coeficienţii $\beta_{int_{hk}}$ ai acestei forme pătratice depinzînd de parametrii lagrangeieni de poziţie prin intermediul mărimilor $\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}$ şi $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}$.

— *Forţele generalizate ale solicitărilor de reacţiune ale legăturilor pasive interioare.* Întrucît lucrul mecanic virtual al componentelor ideale ale solicitărilor de reacţiune ale legăturilor interioare pasive

aplicate elementelor sistemului mecanic este redus, în baza relaţiei (13.200), numai la termenul datorat frecărilor, forţele generalizate corespunzătoare acestor solicitări se vor reduce şi ele numai la cele ale solicitărilor de frecare ; în consecinţă, notînd cu $\bar{R}_{int_{i_d}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_{i_d}})$ componentele torsorilor rezultanţi în polii G ai acestor solicitări de frecare interioară la care sînt supuse elementele (S_i) ale sistemului mecanic, forţele generalizate corespunzătoare solicitărilor de reacţiune ale legăturilor pasive interioare vor fi determinate prin relaţiile

$$Q_{int_{R_k}} = Q_{int_{fr_k}} = \sum_i \left[\bar{R}_{int_{i_d}} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_{i_d}}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] =$$

$$= \sum_i \left[\bar{R}_{int_{i_d}} \frac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial \dot{q}_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_{i_d}}) \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} \right],$$

$$k = P, 2, \ldots, p \tag{13.265}$$

cu formele particulare

$$\boxed{Q_{int_{R_k}} = Q_{int_{fr_k}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left\{ \sum_i [\bar{R}_{int_{i_d}} \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_{i_d}}) \bar{\omega}_i] \right\} = \frac{\partial \mathscr{P}_{int_{fr}}}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, p}} \tag{13.266}$$

în cazul cînd solicitările de frecare $\bar{R}_{int_{i_d}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_{i_d}})$ vor putea fi considerate ca avînd valori constante.

În această din urmă situaţie, forţele generalizate corespunzătoare tuturor solicitărilor interioare pasive, vor avea expresiile

$$\boxed{Q_{int_{p_k}} = Q_{int_{Ra_k}} + Q_{int_{fr_k}} = -\frac{\partial \mathscr{R}_{int_{Ra}}}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \mathscr{P}_{int_{fr}}}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, p)} \tag{13.267}$$

3°. Forțele generalizate corespunzătoare solicitărilor de inerție (forțele generalizate de inerție).

Un rol esențial în rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor de rigide prin una din cele mai generale metode ale ei, numită mecanica analitică despre care s-a mai amintit, îl va juca noțiunea de *forțe generalizate de inerție*, forțe definite prin relațiile

$$\boxed{Q_k^i = \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{\mathscr{F}}_i^i \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)}, \tag{13.268}$$

unde $\bar{\mathscr{F}}_i^i = -\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i$ și $\bar{\mathfrak{M}}_{G_i}^i = -\dot{\bar{\mathscr{K}}}_{G_i}$ sînt componentele torsorilor rezultanți în centrele de masă G_i ai solicitărilor de inerție corespunzătoare elementelor (S_i) ale sistemelor mecanice.

Sînt ușor de verificat relațiile

$$\begin{cases} \bar{\mathscr{F}}_i^i \dfrac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} = -\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i \dfrac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} = -\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\bar{\mathscr{H}}_i \cdot \dfrac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} \right) - \bar{\mathscr{H}}_i \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dfrac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} \right) \right]; \\ \bar{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \dfrac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = -\dot{\bar{\mathscr{K}}}_{G_i} \dfrac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = -\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\bar{\mathscr{K}}_{G_i} \dfrac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] - \bar{\mathscr{K}}_{G_i} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dfrac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right) \right], \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, mn); \quad jk = 1, ,2, \ldots ,p) \tag{13.269}$$

care, ținînd seama și de cele două serii de relații Lagrange — relațiile (12.45) și (12.46) —, mai pot fi scrise sub formele

$$\begin{cases} \bar{\mathscr{F}}_i^i \dfrac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} = -\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\bar{\mathscr{H}}_i \dfrac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \bar{\mathscr{H}}_i \dfrac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial q_k} \right]; \\ \bar{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \dfrac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = -\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\bar{\mathscr{K}}_{G_i} \dfrac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \bar{\mathscr{K}}_{G_i} \dfrac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial q_k} \right], \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, p) \tag{13.2870}$$

Scanned with CamScanner

Introducerea ultimelor expresii în relaţiile (13.268) conduce la următoarele expresii pentru forţele generalizate de inerţie :

$$Q_k^i = -\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{\mathscr{H}}_i\frac{\partial\bar{v}_{G_i}}{\partial\dot{q}_k}+\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\frac{\partial\bar{\omega}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\bar{\mathscr{K}}_i\frac{\partial\bar{v}_{G_i}}{\partial q_k}+\bar{\mathscr{H}}_{G_i}\frac{\partial\bar{\omega}_i}{\partial q_k}\right)\right\}.$$

$$(k=1,2,\ldots,p) \qquad (13.271)$$

Pentru diversii termeni care figurează în relaţiile precedente pot fi stabilite următoarele semnificaţii, uşor de verificat în ipotezele de lucru adoptate privind orientările axelor reperelor invariabil legate de elementele sistemului mecanic :

$$\bar{\mathscr{H}}_i\frac{\partial\bar{v}_{G_i}}{\partial\dot{q}_k}=M_i\bar{v}_{G_i}\frac{\partial\bar{v}_{G_i}}{\partial\dot{q}_k}=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}M_i\bar{v}_{G_i}^2\right]=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\bar{\mathscr{H}}_i\bar{v}_{G_i}\right]; \qquad (13.272)$$

$$\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\frac{\partial\bar{\omega}_i}{\partial\dot{q}_k}=\mathscr{K}'_{G_{i_x}}\frac{\partial\omega'_{i_x}}{\partial\dot{q}_k}+\mathscr{K}'_{G_{i_y}}\frac{\partial\omega'_{i_y}}{\partial\dot{q}_k}+\mathscr{K}'_{G_{i_z}}\frac{\partial\omega'_{i_z}}{\partial\dot{q}_k}=$$

$$=J'_{i_x}\omega'_{i_x}\frac{\partial\omega'_{i_x}}{\partial\dot{q}_k}+J'_{i_y}\omega'_{i_y}\frac{\partial\omega'_{i_y}}{\partial\dot{q}_k}+J'_{i_z}\omega'_{i_z}\frac{\partial\omega'_{i_z}}{\partial\dot{q}_k}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}(J'_{i_x}\omega'^2_{i_x}+J'_{i_y}\omega'^2_{i}+J'_{i_z}\omega'^2_{i_z})\right]=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\bar{\omega}_i\right]. \qquad (13.273)$$

$$\bar{\mathscr{H}}_i\frac{\partial\bar{v}_{G_i}}{\partial q_k}=M_i\bar{v}_{G_i}\frac{\partial\bar{v}_{G_i}}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}M_i\bar{v}_{a_i}^2\right]=\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\bar{\mathscr{H}}_i\bar{v}_{G_i}\right] \qquad (13.274)$$

și

$$\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\frac{\partial\bar{\omega}_i}{\partial q_k}=\mathscr{K}'_{G_{i_x}}\frac{\partial\omega'_{i_x}}{\partial q_k}+\mathscr{K}'_{G_{i_y}}\frac{\partial\omega'_{i_y}}{\partial q_k}+\mathscr{K}'_{G_{i_z}}\frac{\partial\omega'_{i_z}}{\partial q_k}=$$

$$=J'_{i_x}\omega'_{i_x}\frac{\partial\omega'_{i_x}}{\partial q_k}+J'_{i_y}\omega'_{i_y}\frac{\partial\omega'_{i_y}}{\partial q_k}+J'_{i_z}\omega'_{i_z}\frac{\partial\omega'_{i_z}}{\partial q_k}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}(J'_{i_x}\omega'^2_{i_x}+J'_{i_y}\omega'^2_{i_y}+J'_{i_z}\omega'^2_{i_z})\right]=\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\bar{\omega}_i\right]. \tag{13.275}$$

Introducînd aceste expresii în relațiile (13.271), acestea din urmă vor lua formele

$$Q^i_k=-\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\bar{\mathscr{H}}_i\bar{v}_{G_i}+\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\bar{\omega}_i)\right]\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\bar{\mathscr{H}}_i\bar{v}_{G_i}+\bar{\mathscr{H}}_{G_i}\bar{\omega}_i)\right]\right\},$$

$$(k=1,2,\ldots,p) \tag{13.276}$$

rezultînd astfel, dacă se ține seama și de relația (13.77), următoarele expresii finale ale forțelor generalizate de inerție:

$$\boxed{Q^i_k=-\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_k}\right\},\qquad(k=1,2,\ldots,p)} \tag{13.277}$$

§ 14. Ecuațiile și problemele dinamicii sistemelor de rigide

Prezentarea ecuațiilor și problemelor dinamicii rigidului a fost precedată, în primul volum al acestei lucrări, de demonstrarea teoremelor fundamentale ale dinamicii, teoreme care își aveau originea în

principiile fundamentale ale mecanicii clasice și care au furnizat, așa cum s-a văzut, și ecuațiile dinamicii rigidului.

Întrucît și stabilirea ecuațiilor dinamicii sistemelor de rigide se va baza pe unele extinderi, la cazul sistemelor mecanice, ale teoremelor fundamentale din dinamica rigidului, este firesc deci ca și aici prezentarea acelor ecuații să fie precedetă de demonstrarea teoremelor fundamentale ale dinamicii sistemelor mecanice.

De asemenea, ca și în dinamica rigidului, și în această parte a lucrării, expunerea ecuațiilor și problemelor dinamicii sistemelor de rigide va fi urmată de prezentarea ecuațiilor și problemelor staticii sistemelor mecanice, considerată și aici ca un caz particular al dinamicii.

14.1 *Teoremele fundamentale ale dinamicii sistemelor mecanice*

Extinderea teoremelor fundamentale din dinamica rigidului în dinamica sistemelor de rigide se va face plecîndu-se, pentru fiecare din aceste teoreme, de la relațiile care le exprimă pentru un element considerat izolat din sistem —, ținîndu-se seama însă, de astă dată, și de termenii corespunzători solicitărilor interioare active și pasive — și însumîndu-se apoi relațiile respective, scrise pentru toate elementele sistemului mecanic dat.

14.1.1. Teoremele torsorilor impulsurilor

1°. Forme ale teoremei impulsurilor

a) *Teorema impulsului sub forma generală.* Considerînd un element oarecare, (S_i), $(i = 1,2,\ldots,n)$, dintr-un sistem mecanic și ținînd seama de precizările făcute mai sus, relația exprimînd teorema impulsului sub forma generală corespunzătoare acestui element va apare acum sub forma

$$\dot{\overline{\mathscr{H}}}_i = \overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}} + (\overline{\mathscr{F}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathscr{F}}_{int_{p_i}}), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14.1)$$

cu semnificațiile cunoscute din paragraful precedent pentru diverșii termeni ai relației.

Însumarea, membru cu membru, a acestor relaţii scrise pentru toate elementele sistemului mecanic, conduce la egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\overline{\mathscr{K}}}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}} + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}} + \sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathscr{F}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathscr{F}}_{int_{p_i}}), \quad (14.2))$$

cu următoarele semnificaţii ale diverselor grupuri de termeni:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\overline{\mathscr{K}}}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\overline{\mathscr{K}}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{K}}_i \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\overline{\mathscr{K}}) = \dot{\overline{\mathscr{K}}} \quad (14.3)$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}} = \overline{\mathscr{F}}_{ext_a}; \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}} = \overline{\mathscr{F}}_{ext_p}; \sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathscr{F}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathscr{F}}_{int_{p_i}}) \equiv 0 \quad (14.4)$$

— ultima, ca urmare a condiţiilor (13.120) şi (13.138) —, în aceste relaţii $\overline{\mathscr{K}}$ reprezentînd impulsul total al sistemului mecanic, iar $\overline{\mathscr{F}}_{ext_a}$ şi $\overline{\mathscr{F}}_{ext_p}$ reprezentînd rezultantele tuturor forţelor exterioare active, respectiv pasive, aplicate întregului sistem mecanic.

În baza acestor semnificaţii, relaţia (14.2) va lua forma

$$\boxed{\dot{\overline{\mathscr{K}}} = \overline{\mathscr{F}}_{ext_a} + \overline{\mathscr{F}}_{ext_p}} \quad (14.5)$$

şi va exprima *teorema impulsurilor sub forma generală în dinamica sistemelor mecanice*, cu următoarea formulare:

„Derivata în raport cu timpul a impulsului unui sistem mecanic în mişcare este egală cu rezultanta tuturor forţelor exterioare, active şi pasive, care acţionează asupra întregului sistem mecanic considerat".

b) *Teorema mişcării centrului de masă în dinamica sistemelor mecanice.* Observînd că în baza relaţiei (13.42), exprimînd teorema lui Koenig relativă la impulsul unui sistem mecanic, se poate face, în relaţia (14.5), înlocuirea

$$\dot{\overline{\mathscr{K}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (M \bar{v}_C) = M \dot{\bar{v}}_C = M \bar{a}_C,$$

se obţine egalitatea

$$\boxed{M\bar{a}_C = \overline{\mathscr{F}}_{ext_a} + \overline{\mathscr{F}}_{ext_p}} \tag{14.6}$$

exprimînd *teorema mişcării centrului de masă în dinamica sistemelor mecanice*; observînd că ultima relaţie poate fi interpretată ca reprezentînd ecuaţia vectorială a mişcării unui punct material de masă M şi solicitat de forţele $\overline{\mathscr{F}}_{ext_a}$ şi $\overline{\mathscr{F}}_{ext_p}$, se poate da următoarea formulare teoremei mişcării centrului de masă al unui sistem mecanic:

„Centrul de masă al unui sistem mecanic se deplasează ca şi un punct material, în care ar fi concentrată întreaga masă a sistemului şi asupra căruia ar acţiona toate forţele exterioare, active şi pasive, aplicate întregului sistem mecanic considerat".

c) *Legea de conservare a impulsului unui sistem mecanic.* În cazul cînd într-un interval de timp $[t_0, t]$ este satisfăcută condiţia

$$\overline{\mathscr{F}}_{ext_a} + \overline{\mathscr{F}}_{ext_p} \equiv 0, \tag{14.7}$$

momentului iniţial t_0 — obişnuit, cu $t_0 = 0$ — corespunzîndu-i impulsul iniţial

$$\overline{\mathscr{H}}^0 = \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}^0_{G_i} \tag{14.8}$$

al sistemului mecanic, iar momentului final t al intervalului corespunzîndu-i impulsul final

$$\overline{\mathscr{H}} = \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_{G_i}, \tag{14.9}$$

atunci relaţia (14.5), redusă în această situaţie la forma

$$\dot{\overline{\mathscr{H}}} \equiv 0,$$

conduce, prin integrare în intervalul de timp menţionat, la egalitatea

$$\boxed{\overline{\mathscr{H}} = \overline{\mathscr{H}}^0} \tag{14.10}$$

Scanned with CamScanner

exprimînd *legea de conservare a impulsului în dinamica sistemelor mecanice*, cu următoarea formulare :

„Impulsul unui sistem mecanic, supus unui sistem de solicitări exterioare, active şi pasive, cu rezultantă identic zero într-un anumit interval de timp, se conservă pe toată durata acelui interval de timp".

Prin proiectarea relaţiei (14.10) pe axele reperului fix la care este raportată mişcarea sistemului mecanic, se obţin *integralele impulsului* pentru sistemul mecanic considerat, reprezentate prin relaţiile

$$\boxed{\mathscr{H}_x = \sum_{i=1}^{n} M_i \dot{x}_{G_i} = \mathscr{H}_x^0 ; \mathscr{H}_y = \sum_{i=1}^{n} M_i \dot{y}_{G_i} = \mathscr{H}_y^0 ; \mathscr{H}_z = \sum_{i=1}^{n} M_i \dot{z}_{G_i} = \mathscr{H}_z^0} \tag{14.11}$$

Se menţionează faptul că în multe situaţii întîlnite în aplicaţiile tehnice, deşi nu este satisfăcută condiţia vectorială (14.7), poate fi găsită totuşi o axă (Δ), de direcţie fixă în spaţiu, pentru care să fie satisfăcută condiţia

$$\mathscr{F}_{ext_{a_\Delta}} + \mathscr{F}_{ext_{p_\Delta}} \equiv 0, \tag{14.12}$$

$\mathscr{F}_{ext_{a_\Delta}}$ şi $\mathscr{F}_{ext_{p_\Delta}}$ fiind proiecţiile pe axa (Δ) ale forţelor rezultante exterioare active şi pasive corespunzătoare întregului sistem mecanic.

În asemenea situaţii, prin proiectarea pe axa (Δ) a egalităţii (14.5), se obţine relaţia

$$\dot{\mathscr{H}}_\Delta \equiv 0,$$

care, prin integrare pe durata cît este satisfăcută condiţia (14.12), conduce la concluzia

$$\boxed{\mathscr{H}_\Delta = \sum_{i=1}^{n} M_i v_{G_{i_\Delta}} = \mathscr{H}_\Delta^0}, \tag{14.13}$$

$\mathscr{H}_\Delta^0$ fiind proiecţia pe axa (Δ) a impulsului iniţial al sistemului mecanic ; relaţia (14.13) este tot o *integrală primă a impulsului*.

De asemenea, în condițiile (14.12), relația (14.6) conduce, prin integrare, la concluzia

$$\boxed{\bar{v}_C = \frac{\overline{\mathcal{H}}^{\circ}}{M} = \bar{v}_C^0}, \tag{14.14}$$

căreia i se dă următoarea interpretare:

„Centrul de masă al unui sistem mecanic supus la solicitări exterioare, active și pasive, cu rezultantă identic zero într-un interval dat de timp, se deplasează rectiliniu și uniform în acel interval de timp, sau își păstrează starea de repaus, după cum în momenul aplicării solicitărilor viteza lui este diferită , sau egală cu zero".

2°. Forme ale teoremei momentului cinetic

a) *Teorema momentului cinetic în raport cu polul fix.* Relația exprimînd teorema momentului cinetic în raport cu polul fix, scrisă pentru un element (S_i) izolat din sistemul mecanic, va avea forma

$$\dot{\overline{\mathcal{K}}}_i = \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_i}} + (\overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}}), \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{14.15}$$

$\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}}$, $\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_i}}$, $\overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_i}}$ și $\overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}}$ fiind momentele rezultante în polul fix considerat, al solicitărilor exterioare și interioare, active și pasive, la care este supus elementul (S_i).

Prin însumarea relațiilor (14.15), scrise pentru toate elementele sistemului mecanic, se obține relația

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\overline{\mathcal{K}}}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}} + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_i}} + \sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}}), \tag{14.16}$$

cu următoarele semnificații pentru diversele grupuri de termeni ce apar în relație

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{\overline{\mathcal{K}}}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{K}}_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}) = \dot{\overline{\mathcal{K}}}; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}} = \overline{\mathfrak{M}}_{ext_a}; \ \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_i}} = \overline{\mathfrak{M}}_{ext_p}; \ \sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}}) \equiv 0, \end{cases} \tag{14.17}$$

ultima, ca urmare a condițiilor (14.130) și (14.138); în relațiile precedente, $\overline{\mathcal{K}}$ reprezintă momentul cinetic al sistemului mecanic în raport cu polul fix considerat, iar $\overline{\mathfrak{M}}_{ext_a}$ și $\overline{\mathfrak{M}}_{ext_p}$ reprezintă momentele rezultante, în raport cu același pol fix, ale tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, aplicate întregului sistem mecanic.

În baza relațiilor (14.16) și (14.17), egalitatea (14.15) va lua forma

$$\boxed{\dot{\overline{\mathcal{K}}} = \overline{\mathfrak{M}}_{ext_a} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_p}} \tag{14.18}$$

și va exprima *teorema momentului cinetic în raport cu polul fix în dinamica sistemelor mecanice*, cu o formulare analogă celei întîlnite în dinamica rigidului:

„Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic față de un pol fix al unui sistem mecanic, este egală cu momentul rezultant, față de același pol fix, al tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supus întregul sistem mecanic."

b) *Teorema momentului cinetic corespunzător mișcării relative a sistemului mecanic în raport cu centrul său de masă.* Prin derivarea în raport cu timpul a expresiei (13.63) a momentului cinetic în raport cu polul fix al unui sistem mecanic, se obține relația

$$\dot{\overline{\mathcal{K}}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\bar{r}_C \times M\bar{v}_C + \overline{\mathcal{K}}_C] = \dot{\bar{r}} \times M\bar{v}_C + \bar{r}_C \times M\dot{\bar{v}} + \dot{\overline{\mathcal{K}}}_C,$$

sau încă, observînd că primul termen din membrul drept al ultimei relații are valoarea zero:

$$\dot{\bar{r}}_C \times M\bar{v}_C = \bar{v}_C \times M\bar{v}_C = 0$$

și ținînd seama și de semnificația celui de-al doilea termen

$$\bar{r}_C \times M\dot{\bar{v}}_C = \bar{r}_C \times M\bar{a}_C,$$

mai rezultă

$$\dot{\overline{\mathcal{K}}} = \bar{r}_C \times M\bar{a}_C + \dot{\overline{\mathcal{K}}}_C \tag{14.19}$$

Scanned with CamScanner

Pe de altă parte, momentele rezultante ale solicitărilor exterioare active și pasive în raport cu polul fix O, $\overline{\mathfrak{M}}_{ext_a}$ și $\overline{\mathfrak{M}}_{ext}$, pot fi exprimate în funcție de momentele rezultante în raport cu centrul de masă al sistemului mecanic, în baza relațiilor

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext_a} = \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_C}} + \bar{r}_C \times \overline{\mathcal{F}}_{ext_a} \tag{14.20}$$

și

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext_p} = \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_C}} + \bar{r}_C \times \overline{\mathcal{F}}_{ext_p}, \tag{14.21}$$

cunoscute din teoria vectorilor alunecători.

Introducînd expresiile (14.19), (14.20) și (14.21) în relația (14.18), rezultă egalitatea

$$\bar{r}_C \times M\bar{a}_C + \dot{\overline{\mathcal{K}}}_C = \bar{r}_C \times (\overline{\mathcal{F}}_{ext_p}) + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_C}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_C}},$$

sau încă, ținînd seama și de relația (14.6), mai rezultă

$$\boxed{\dot{\overline{\mathcal{K}}}_C = \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_C}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_C}}} \tag{14.22}$$

Ultima relație exprimă *teorema momentului cinetic corespunzător mișcării relative a unui sistem mecanic în raport cu centrul său de masă*, ea căpătînd următoarea formulare:

„Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic corespunzător mișcării relative a unui sistem mecanic în raport cu centrul său de masă este egală cu momentul rezultant față de centrul de masă considerat al tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supus întregul sistem mecanic".

Se reamintește faptul că prin mișcare relativă a sistemului mecanic în raport cu centrul său de masă trebuie înțelese mișcările elementelor lui în raport cu reperul $Cx^*y^*z^*$, cu originea luată în centrul de masă C și cu axele paralele la axele reperului fix.

c) *Legile de conservare a momentelor cinetice.* În cazul cînd într-un interval de timp $[t_0, t]$ este satisfăcută condiția

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext_a} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_p} \equiv 0, \tag{14.23}$$

relația (14.18) va lua forma

$$\dot{\overline{\mathcal{K}}} \equiv 0,$$

conducînd, prin integrare în intervalul de timp menționat, la

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{K}}^{\circ}}, \tag{14.24}$$

unde

$$\overline{\mathcal{K}}^{\circ} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}^{0}_{G_i} \times M_i \bar{v}^{0}_{G_i} + \overline{\mathcal{K}}^{0}_{G_i}] \tag{14.25}$$

reprezintă momentul cinetic al sistemului mecanic corespunzător momentului inițial t_0 — de regulă, cu $t_0 = 0$ —, iar $\overline{\mathcal{K}}$ este momentul cinetic al sistemului mecanic corespunzător momentului final t al intervalului de timp considerat; relația (14.24) exprimă *legea de conservare a momentului cinetic în raport cu polul fix în dinamica sistemelor mecanice*, căreia i se dă următoarea formulare:

„Momentul cinetic în raport cu un pol fix al unui sistem mecanic, supus la un sistem de solicitări exterioare, active și pasive, cu momentul rezultant în raport cu polul fix considerat identic zero într-un interval determinat de timp, se conservă în tot acel interval de timp".

Prin proiectarea pe axele reperului fix, la care este raportată mișcarea sistemului mecanic, a relației (14.24) se obțin egalitățile

$$\boxed{\mathcal{K}_x = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_{i_x} = \mathcal{K}^0_x;\ \mathcal{K}_x = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_{i_y} = \mathcal{K}^0_y;\ \mathcal{K}_z = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_{i_z} = \mathcal{K}^0_z} \tag{14.26}$$

purtînd numele de *integralele momentului* cinetic al sistemului mecanic considerat, ele putînd servi, în multe cazuri, la rezolvări parțiale ale unor probleme de dinamica sistemelor mecanice.

Se menționează și aici faptul că în aplicațiile tehnice concrete pot fi întîlnite frecvent situații cînd, fără să fie valabilă condiția vectorială (14.23), se găsește totuși o axă (Δ), de direcție fixă în spațiu

şi trecînd prin polul fix considerat la calculul momentului cinetic al sistemului mecanic, care să satisfacă condiţia ca proiecţia pe această axă a momentului rezultant al tuturor solicitărilor exterioare, active şi pasive, la care este supus sistemul mecanic să fie identic egală cu zero într-un interval determinat de timp :

$$\mathfrak{M}_{ext_{a_\Delta}} + \mathfrak{M}_{ext_{p_\Delta}} \equiv 0. \tag{14.27}$$

În aceste situaţii, prin proiectarea pe axa (Δ) a relaţiei (14.22), rezultă egalitatea

$$\dot{\mathcal{K}}_\Delta \equiv 0,$$

conducînd, prin integrare în intervalul de timp în care este satisfăcută condiţia (14.27), la relaţia

$$\boxed{\mathcal{K}_\Delta = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_{i_\Delta} = \mathcal{K}^0_\Delta} \tag{14.28}$$

unde $\mathcal{K}^0_\Delta$ este proiecţia pe axa (Δ) a momentului cinetic iniţial $\overline{\mathcal{K}^0}$; relaţia (14.28) reprezintă tot o *integrală primă* a momentului cinetic al sistemului mecanic corespunzător polului fix.

Întrucît în foarte multe cazuri momentele rezultante $\overline{\mathfrak{M}}_{ext_a}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{ext_p}$ sînt sume numai de momente ale unor forţe, nu şi ale unor cupluri de forţe, se reamintesc, pentru a uşura găsirea axei (Δ) pentru care poate fi scrisă o integrală primă a momentului cinetic, situaţiile în care momentele axiale ale forţelor devin egale cu zero şi anume :

— cînd suportul forţei este paralel la axa (Δ) ;
— cînd suportul forţei se confundă cu axa (Δ) ;
— cînd suportul forţei intersectează axa (Δ).

Concluzii interesante privind mişcarea sistemului mecanic se deduc şi din relaţia (14.22), exprimînd teorema momentului cinetic în mişcarea relativă a sistemului mecanic faţă de centrul său de masă, în cazul cînd este satisfăcută condiţia

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_C}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_C}} \equiv 0\,, \tag{14.29}$$

pentru care relația (14.22) va lua forma

$$\dot{\overline{\mathcal{K}}}_C \equiv 0,$$

conducînd, prin integrare în intervalul de timp în care este satisfăcută condiția (14.29), la egalitatea

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}}_C = \overline{\mathcal{K}}_C^0}, \tag{14.30}$$

care exprimă *legea de conservare a momentului cinetic al unui sistem mecanic corespunzător mișcării lui relative în raport cu centrul său de masă*, cu următoarea formulare :

„Momentul cinetic al unui sistem mecanic, corespunzător mișcării relative a sistemului în jurul centrului său de masă, se conservă în tot intervalul de timp în care momentul rezultant în raport cu centrul de masă al sistemului mecanic al tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supus sistemul mecanic, este identic egal cu zero".

3°. Forme ale teoremei torsorului impulsurilor unui sistem mecanic

a) *Teorema torsorului impulsurilor în raport cu polul fix.* Convenind, ca și în dinamica rigidului, ca prin derivată în raport cu timpul a torsorului impulsurilor unui sistem mecanic să se înțeleagă un torsor, în același pol, ale cărui componente să fie reprezentate prin derivatele în raport cu timpul ale componentelor torsorului impulsurilor, adică

$$\dot{\overline{\mathcal{T}}}(\overline{\mathcal{H}}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}})] = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{H}}) = \dot{\overline{\mathcal{H}}} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overline{\mathcal{K}}) = \dot{\overline{\mathcal{K}}} \end{array} \right\}, \tag{14.31}$$

relațiile (14.5) și (14.18) vor putea fi înglobate în una singură, sub forma

$$\boxed{\dot{\overline{\mathcal{T}}}(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{F}}_{ext_a}) + \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{F}}_{ext_p})} \tag{14.32}$$

această relaţie exprimînd *teorema torsorului impulsurilor în mişcarea faţă de reperul fix a unui sistem mecanic*, cu următoarea formulare :

„Derivata în raport cu timpul a torsorului într-un pol fix al impulsurilor unui sistem mecanic este egală cu torsorul rezultant, în acelaşi pol fix, al tuturor solicitărilor exterioare, active şi pasive, la care este supus întregul sistem mecanic".

b) *Teorema torsorului impulsurilor în raport cu centrul de masă al sistemului mecanic.* În baza aceleiaşi convenţii de aplicare a operatorului de derivare în raport cu timpul şi relaţiile (14.6) şi(14.22) vor putea fi înglobate în una singură, sub forma

$$\boxed{\dot{\overline{\mathcal{T}}}_C(\overline{\mathcal{K}}) = \overline{\mathcal{T}}_C(\overline{\mathcal{F}}_{ext_a}) + \overline{\mathcal{T}}_C(\overline{\mathcal{F}}_{ext_p})} \qquad (14.33)$$

această relaţie exprimînd acum *teorema torsorului impulsurilor în raport cu centrul de masă a unui sistem mecanic*, cu următoarea formulare :

„Derivata în raport cu timpul a torsorului impulsurilor unui sistem mecanic, considerat în centrul de masă al sistemului, este egală cu torsorul rezultant în acel centru de masă al tuturor solicitărilor exterioare, active şi pasive, la care este supus întregul sistem mecanic".

c) *Legea generală de conservare a mişcării unui sistem mecanic.* În cazul cînd într-un interval de timp $[t_0, t]$ — obişnuit cu $t_0 = 0$ — sînt satisfăcute condiţiile

$$\overline{\mathcal{F}}_{ext_a} + \overline{\mathcal{F}}_{ext_p} \equiv 0\,; \quad \overline{\mathfrak{M}}_{ext_a} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_p} \equiv 0, \qquad (14.34)$$

cele două relaţii care exprimă legile de conservare a mişcării mecanice — relaţia (14.10) exprimînd legea de conservare a impulsului şi relaţia (14.24) exprimînd legea de conservare a momentului cinetic — pot fi înglobate, de asemenea, într-una singură, sub forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}) = \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}^0)} \qquad (14.35)$$

această ultimă relaţie exprimînd *legea generală de conservare a mişcării unui sistem mecanic*, cu următoarea formulare :

„Mişcarea unui sistem mecanic, supus unui sistem de solicitări exterioare, active şi pasive, echivalent cu zero, se efectuează astfel

încît componentele torsorului, într-un pol fix, al impulsurilor sistemului mecanic rămîn constante''.

Întrucît echivalența cu zero a unui sistem de solicitări este, așa cum se știe din teoria vectorilor alunecători, independentă de pol, rezultă imediat, ca o consecință a condițiilor (14.34), și condițiile

$$\overline{\mathscr{F}}_{ext_a} + \overline{\mathscr{F}}_{ext_p} \equiv 0\,;\ \overline{\mathscr{M}}_{ext_{a_O}} + \overline{\mathscr{M}}_{ext_{p_O}} \equiv 0, \tag{14.36}$$

care asigură valabilitatea legilor de conservare a mișcării unui sistem mecanic sub formele (14.14) și (14.30); în consecință, și aceste ultime două relații vor putea fi înglobate în una singură, sub forma

$$\boxed{\overline{\mathscr{T}}_O(\overline{\mathscr{H}}) = \overline{\mathscr{T}}_O(\overline{\mathscr{H}}^0)}\,, \tag{14.37}$$

care permite o nouă formulare a legii de conservare a mișcării unui sistem mecanic:

„Un sistem mecanic, supus unui sistem de solicitări exterioare, active și pasive, echivalent cu zero, se mișcă astfel încît centrul său de masă se deplasează rectiliniu și uniform, sau rămîne în stare de repaos — după cum în momentul aplicării solicitărilor exterioare viteza sa este diferită de zero, sau egală cu zero —, iar momentul cinetic corespunzător mișcării relative a sistemului mecanic în jurul centrului său de masă rămîne constant''.

14.1.2. Teoremele energiei în dinamica sistemelor mecanice

1°. Forme ale teoremei energiei corespunzătoare mișcării absolute a unui sistem

a) *Teorema energiei sub forma generală.* Ca și în cazul celorlalte teoreme, se va pleca și aici de la relația exprimînd teorema energiei sub forma generală, scrisă pentru un element (S_i) considerat complet izolat din sistemul mecanic, această relație avînd forma

$$\dot{\mathscr{E}}_i = \mathscr{P}_{ext_{a_i}} + \mathscr{P}_{ext_{p_i}} + \mathscr{P}_{int_{a_i}} + \mathscr{P}_{int_{p_i}},\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.38}$$

Însumînd aceste relaţii scrise pentru toate elementele unui sistem mecanic, se obţine egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\mathscr{E}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}_{ext_{a_i}} + \sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}_{ext_{p_i}} + \sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}_{int_{a_i}} + \sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}_{int_{p_i}}, \quad (14.39)$$

cu următoarele semnificaţii pentru diversele grupuri de termeni:

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\mathscr{E}}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathscr{E}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_i \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathscr{E}) = \dot{\mathscr{E}} \quad (14.40)$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}_{ext_{a_i}} = \mathscr{P}_{ext_a}; \sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}_{ext_{p_i}} = \mathscr{P}_{ext_p}; \sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}_{int_{a_i}} = \mathscr{P}_{int_a}; \sum_{i=1}^{n} \mathscr{P}_{int_{p_i}} = \mathscr{P}_{int_p}, \quad (14.41)$$

unde $\mathscr{E}$ este energia cinetică a sistemului mecanic corespunzătoare mişcărilor absolute ale elementelor, $\mathscr{P}_{ext_a}$ este puterea mecanică a tuturor solicitărilor exterioare active aplicate întregului sistem mecanic, $\mathscr{P}_{ext_p}$ este puterea mecanică a tuturor solicitărilor exterioare pasive la care este supus sistemul mecanic, $\mathscr{P}_{int_a}$ este puterea mecanică a tuturor solicitărilor interioare active — solicitări care, în general, admit o funcţie de forţă interioară ($\mathscr{P}_{int_a} = \dot{U}_{int}$) —, iar $\mathscr{P}_{int_p}$ este puterea mecanică a tuturor solicitărilor interioare pasive la care este supus întregul sistem mecanic; aşa cum s-a arătat în paragraful precedent, puterile mecanice ale solicitărilor pasive, exterioare şi interioare, sînt diferite de zero, egalitatea lor cu zero implicînd:

— posibilitatea neglijării totale a rezistenţelor mediului;

— realizarea de legături active, exterioare şi interioare, numai prin elemente elastice cu amortizări neglijabile;

— aplicarea de legături pasive, exterioare şi interioare, staţionare şi cu frecare neglijabilă.

Avînd în vedere relaţiile (14.40) şi (14.41), egalitatea (14.39) va lua forma

$$\boxed{\dot{\mathscr{E}} = \mathscr{P}_{ext_a} + \mathscr{P}_{ext_p} + \mathscr{P}_{int_a} + \mathscr{P}_{int_p}} \quad (14.42)$$

Scanned with CamScanner

și va exprima *teorema energiei sub forma generală în dinamica sistemelor mecanice*, cu următoarea formulare:

„Derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unui sistem mecanic corespunzătoare mișcărilor absolute ale elementelor lui este egală cu suma puterilor mecanice ale tuturor solicitărilor exterioare și interioare, active și pasive, la care este supus întregul sistem mecanic".

Uneori, prin introducerea notațiilor

$$\mathscr{P}_{ext_a} + \mathscr{P}_{ext_p} = \mathscr{P}_{ext}\,;\ \mathscr{P}_{int_a} + \mathscr{P}_{int_p} = \mathscr{P}_{int}\,, \tag{14.43}$$

relația (14.42) mai este scrisă sub forma

$$\boxed{\dot{\mathscr{E}} = \mathscr{P}_{ext} + \mathscr{P}_{int}} \tag{14.44}$$

subînțelegîndu-se însă că trebuie considerate toate solicitările active și pasive; alteori, se introduc notațiile

$$\mathscr{P}_{ext_a} + \mathscr{P}_{int_a} = \mathscr{P}_a\,;\ \mathscr{P}_{ext_p} + \mathscr{P}_{int_p} = \mathscr{P}_p \tag{14.45}$$

și relația (14.42) se scrie sub forma

$$\boxed{\dot{\mathscr{E}} = \mathscr{P}_a + \mathscr{E}_p}\,, \tag{14.46}$$

subînțelegîndu-se însă și acum că trebuie luate în considerație atît solicitările exterioare, cît și cele interioare.

b) *Teorema energiei sub forma diferențială.* Prin înmulțirea relației (14.42) cu dt și ținînd seama și de relația de definiție a lucrului mecanic elementar, se obține egalitatea

$$\boxed{\begin{aligned} d\mathscr{E} = d\mathscr{L}_{ext_a} + d\mathscr{L}_{ext_p} + d\mathscr{L}_{int_a} + d\mathscr{L}_{int_p} = d\mathscr{L}_{ext} + d\mathscr{L}_{int} = \\ = d\mathscr{L}_a + d\mathscr{L}_p \end{aligned}}\,, \tag{14.47}$$

care exprimă *teorema energiei sub forma diferențială în dinamica sistemelor mecanice*, cu următoarea formulare:

„Diferențiala energiei cinetice a unui sistem mecanic este egală cu suma lucrurilor mecanice elementare efectuate de toate solicitările exterioare și interioare, active și pasive, la care este supus sistemul mecanic considerat".

c) *Teorema variației finite a energiei cinetice.* Prin integrarea relației (14.47) în intervalul de timp de la un moment inițial t_0 — obișnuit $t_0 = 0$ —, pînă la un moment final t, interval în care energia cinetică a sistemului mecanic variază de la valoarea inițială $\mathscr{E}^\circ$ la valoarea finală $\mathscr{E}$, se obține relația

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}^0 = \mathscr{L}_{ext_a} + \mathscr{L}_{ext_p} + \mathscr{L}_{int_a} + \mathscr{L}_{int_p} = \mathscr{L}_{ext} + \mathscr{L}_{int} = \mathscr{L}_a + \mathscr{L}_p, \tag{14.48}$$

care exprimă *teorema variației finite a energiei cinetice în dinamica sistemelor mecanice*, cu următoarea formulare:

„Variația energiei cinetice a unui sistem mecanic într-un interval oarecare de timp este egală cu suma lucrurilor mecanice efectuate în acel interval de timp de toate solicitările exterioare și interioare, active și pasive, la care este supus sistemul mecanic considerat".

Se face și aici precizarea că această relație va putea fi utilizată în rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor mecanice numai în cazurile cînd pot fi calculate lucrurile mecanice ale solicitărilor pasive aplicate sistemului mecanic fără a se cunoaște, dinainte, ecuațiile finite ale mișcării sistemului mecanic.

2°. Teorema energiei corespunzătoare mișcării relative a sistemului mecanic în raport cu centrul său de masă

Observînd, pe de o parte, că în baza relației (13.81) poate fi scrisă următoarea expresie pentru derivata în raport cu timpul a energiei cinetice a unui sistem mecanic:

$$\dot{\mathscr{E}} = M\bar{v}_C \dot{\bar{v}}_C + \dot{\mathscr{E}}_C = \bar{v}_C(M\bar{v}_C) + \dot{\mathscr{E}}_C \tag{14.49}$$

Scanned with CamScanner

și că, pe de altă parte, pentru puterile mecanice ale solicitărilor exterioare și interioare pot fi scrise, în baza relațiilor (13.55) și (13.49), expresiile

$$\mathscr{P}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{ext_i} \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathscr{M}}_{ext_{G_i}} \bar{\omega}_i] = \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{ext_i} (\bar{v}_C + \bar{v}_{G_{i_r}}) + \overline{\mathscr{M}}_{ext_{G_i}} \bar{\omega}_{i_r}] =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{F}}_{ext_i} \right) \bar{v}_C + \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{ext} \bar{v}_{G_{i_r}} + \overline{\mathscr{M}}_{ext_{G_i}} \bar{\omega}_{i_r}] = \overline{\mathscr{F}}_{ext} \bar{v}_C + \mathscr{P}_{ext_r} \tag{14.50}$$

și

$$\mathscr{P}_{int} = \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{int_i} \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathscr{M}}_{int_{G_i}} \bar{\omega}_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{int_i} (\bar{v}_C + \bar{v}_{G_{i_r}}) + \overline{\mathscr{M}}_{ext_{G_i}} \bar{\omega}_{i_r}] =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{F}}_{ext_i} \right) \bar{v}_C + \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{int_i} \bar{v}_{G_{i_r}} + \overline{\mathscr{M}}_{int_{G_i}} \bar{\omega}_{i_r}] = \mathscr{P}_{int_r} \tag{14.51}$$

unde $\mathscr{P}_{ext_{a_r}} = \mathscr{P}_{ext_{a_r}} + \mathscr{P}_{ext_{p_r}}$ și $\mathscr{P}_{int_r} = \mathscr{P}_{int_{a_r}} + \mathscr{P}_{int_{p_r}}$ reprezintă puterile mecanice ale solicitărilor exterioare și interioare, active și pasive, corespunzătoare mișcărilor relative ale elementelor sistemului mecanic față de reperul $Cx^*y^*z^*$, se va putea scrie următoarea relație, echivalentă egalității (14.42) :

$$\bar{v}_C (M\bar{a}_C) + \dot{\mathscr{E}}_C = \bar{v}_C (\overline{\mathscr{F}}_{ext_a} + \overline{\mathscr{F}}_{ext_p}) + \mathscr{P}_{ext_r} + \mathscr{P}_{int_r},$$

sau încă

$$\bar{v}_C [M\bar{a}_C - \overline{\mathscr{F}}_{ext_a} - \overline{\mathscr{F}}_{ext_p}] + \dot{\mathscr{E}}_C = \mathscr{P}_{int_r} + \mathscr{P}_{int_r}.$$

Este suficient acum să se țină seama de relația (14.6), pentru a se ajunge astfel la relația finală

$$\boxed{\dot{\mathscr{E}}_C = \mathscr{P}_{ext_r} + \mathscr{P}_{int_r}} \tag{14.52}$$

Scanned with CamScanner

care va exprima *teorema energiei corespunzătoare mișcării relative a unui sistem mecanic în raport cu centrul său de masă*; acestei teoreme i se poate da următoarea formulare:

„Derivata în raport cu timpul a energiei cinetice corespunzătoare mișcării relative a unui sistem mecanic față de centrul său de masă este egală cu suma puterilor mecanice, corespunzătoare aceleiași mișcări relative, ale tuturor solicitărilor exterioare și interioare, active și pasive, la care este supus întregul sistem mecanic".

3°. Legea generală de conservare a energiei mecanice în dinamica sistemelor de rigide

În cazul cînd mișcarea unui sistem mecanic se efectuează în următoarele condițiuni:

— rezistențele mediului sînt complet neglijabile, adică

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{R_z} \equiv 0, \tag{14.53}$$

— toate legăturile active, exterioare și interioare, sînt cu amortizare neglijabilă, adică

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_{R_a}} = \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_{R_a}} \equiv 0, \tag{14.54}$$

— toate legăturile pasive, exterioare și interioare, aplicate sistemului mecanic sînt staționare și cu frecare neglijabilă, ceea ce înseamnă că se pot accepta ipotezele

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_R} = \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_R} \equiv 0; \tag{14.55}$$

— toate solicitările active, exterioare și interioare, derivă din funcții de forță, adică se pot scrie relațiile

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathscr{L}_{ext_a} &= \mathrm{d}\,U_{ext}; \\ \mathrm{d}\mathscr{L}_{int_a} &= \mathrm{d}\,U_{int}, \end{aligned} \tag{14.56}$$

atunci rezultă concluziile

$$d\mathcal{L}_p = d\mathcal{L}_{ext_p} + d\mathcal{L}_{int_p} \equiv 0 \tag{14.57}$$

și

$$d\mathcal{L}_a = d\mathcal{L}_{ext_a} + d\mathcal{L}_{int_a} = dU_{ext} + \mathrm{d}U_{int} = d(U_{ext} + U_{int}) = \mathrm{d}U \tag{14.58}$$

unde prin

$$U = U_{ext} + U_{int} \tag{14.59}$$

s-a notat suma celor două funcții de forță, purtînd numele de *funcție generală de forță a sistemului mecanic*; în baza acestor concluzii, relația (14.47), exprimînd teorema energiei sub forma diferențială în dinamica sistemelor mecanice, va lua forma:

$$d\mathcal{E} = \mathrm{d}U\,, \tag{14.60}$$

conducînd, prin integrare, la *integrala energiei*:

$$\boxed{\mathcal{E} = U + h}\,, \tag{14.61}$$

constanta de integrare h, determinată prin relația

$$h = \mathcal{E}^0 - U^0\,, \tag{14.62}$$

unde $\mathcal{E}^\circ$ și U° sînt valorile inițiale ale funcțiilor $\mathcal{E}$ și U, purtînd și aici numele de *constanta energiei*.

Dacă în locul funcției generale de forță se introduce *funcția generală potențială* V, definită prin relația

$$V = -U, \tag{14.63}$$

atunci integrala (14.61) mai poate fi scrisă sub forma

$$\boxed{\mathcal{E} + V = h} \tag{14.64}$$

Scanned with CamScanner

În cazul cînd constanta aditivă totală, pînă la care este determinată funcţia de forţă generală, respectiv funcţia generală potenţială, este aleasă astfel încît pentru poziţia de echilibru static a sistemului mecanic valoarea V_{st} a funcţiei potenţiale generale corespunzătoare acestei poziţii să fie egală cu zero, adică

$$V_{st} = 0, \tag{14.65}$$

atunci funcţia potenţială generală corespunzătoare unei poziţii oarecari a sistemului mecanic în mişcare va reprezenta chiar *energia potenţială* a acestui sistem, adică se va putea scrie

$$V = \mathcal{E}_p. \tag{14.66}$$

În aceste condiţii, relaţia (14.64) va lua forma

$$\boxed{\mathcal{E} + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m = h,}, \tag{14.66}$$

cu $\mathcal{E}_m$ reprezentînd *energia mecanică a sistemului mecanic* considerat, relaţia precedentă exprimînd *legea de conservare a energiei mecanice în dinamica sistemelor de rigide*, cu următoarea formulare:

„Energia mecanică a unui sistem mecanic în mişcare în mediu cu rezistenţă neglijabilă, supus la legături active cu amortizare neglijabilă şi la legături pasive staţionare şi cu frecare neglijabilă, se conservă atunci cînd solicitările active, exterioare şi interioare, aplicate lui, derivă din funcţii de forţă".

Este uşor de înţeles şi aici că, datorită transformărilor inevitabile de energie mecanică în alte forme de energie, această ultimă lege de conservare nu poate fi verificată decît cu o foarte largă aproximare.

14.2. *Forme ale ecuaţiilor dinamicii sistemelor mecanice*

Rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor mecanice se bazează pe următoarele forme principale de ecuaţii de mişcare, folosite curent în aplicaţiile tehnice:

14.2.1. Ecuaţiile dinamicii sistemelor mecanice corespunzătoare teoremelor torsorului impulsurilor

1°. Ecuaţiile dinamicii corespunzătoare teoremelor torsorilor impulsurilor în raport cu centrele de masă ale elementelor unui sistem mecanic

Aceste ecuaţii, folosite în deosebi în cazul sistemelor mecanice constituite dintr-un număr redus de elemente, sînt reprezentate prin cea de-a treia formă a ecuaţiilor dinamicii rigidului, scrise pentru fiecare din elementele sistemului considerat complet izolat din sistem, cu cele două modificări în scriere menţionate la demonstrarea teoremelor fundamentale ale dinamicii sistemelor mecanice, adică:

— ataşarea indicelui de ordine (i) la toate mărimile care se referă la elementul (S_i) din sistem;

— împărţirea solicitărilor la care este supus fiecare element al sistemului mecanic în cele două categorii principale: exterioare şi interioare, fiecare din ele împărţindu-se, la rîndul lor, în active şi pasive.

În consecinţă, ecuaţiile vectoriale ale mişcării elementului (S_i) din sistemul mecanic studiat vor avea formele

$$\left|\begin{array}{l} M_i \bar{a}_{G_i} = \overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}} + \overline{\mathscr{F}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathscr{F}}_{int_{p_i}}; \\ \dfrac{d}{dt}[\overline{\mathscr{K}}_{G_i}]_r + \bar{\omega}_i \times \overline{\mathscr{K}}_{G_i} = \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_{G_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_{G_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_{G_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_{G_i}}} \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right| . \tag{14.67}$$

Prin proiectarea primei dintre ecuaţiile vectoriale (14.67) pe axele reperului fix şi a celei de-a doua ecuaţii vectoriale pe axele reperelor $G_i x'_i y'_i z'_i$, invariabil ataşate elementelor (S_i), se obţine un număr total de *n sisteme de ecuaţii scalare ale dinamicii sistemelor mecanice, scrise pentru elementele izolate din sistem*, de forma

$$\left|\begin{array}{l} M_i \ddot{x}_{G_i} = \mathscr{F}_{ext_{a_{ix}}} + \mathscr{F}_{ext_{p_{ix}}} + \mathscr{F}_{int_{a_{ix}}} + \mathscr{F}_{int_{p_{ix}}}; \\ M_i \ddot{y}_{G_i} = \mathscr{F}_{dxta_{iy}} + \mathscr{F}_{ext_{p_{iy}}} + \mathscr{F}_{inta_{iy}} + \mathscr{F}_{int_{p_{iy}}}; \\ M_i \ddot{z}_G = \mathscr{F}_{ext_{a_{iz}}} + \mathscr{F}_{ext_{p_{iz}}} + \mathscr{F}_{inta_{iz}} + \mathscr{F}_{ixt_{p_{iz}}}; \end{array}\right| \tag{14.68}$$

$$
\begin{aligned}
&J'_{i_x}\dot{\omega}'_{i_x} + (J'_{i_z} - J'_{i_y})\,\omega'_{i_y}\,\omega'_{i_z} = \mathfrak{M}'_{ext\,a_{G\,i_x}} + \mathfrak{M}'_{ext\,p_{G i_x}} + \mathfrak{M}'_{int\,a_{G i_x}} + \mathfrak{M}'_{int\,p_{G i_x}};\\
&J'_{i_y}\dot{\omega}'_{iv} + (J'_{i_x} - J'_{i_z})\,\omega'_{i_z}\,\omega'_{i_x} = \mathfrak{M}'_{ext\,a_{G i_y}} + \mathfrak{M}'_{exi\,p_{G i_y}} + \mathfrak{M}'_{ini\,a_{G i_y}} + \mathfrak{M}'_{ini\,r_{G i_y}};\\
&J'_{i_z}\dot{\omega}'_{iz} + (J'_{i_y} - J'_{i_x})\,\omega'_{i_x}\,\omega'_{i_y} = \mathfrak{M}'_{ext\,a_{G i_z}} + \mathfrak{M}'_{ext\,p_{G i_z}} + \mathfrak{M}'_{int\,a_{G i_z}} + \mathfrak{M}'_{int\,p_{G i_z}}\\
&\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

n fiind numărul total de elemente ale sistemului mecanic; ultimele trei ecuaţii din sistemele (14.69) sînt cunoscutele ecuaţii ale lui Euler, corespunzătoare rotaţiilor relative ale elementelor (S_i) în jurul centrelor lor de masă G_i.

În cazul sistemelor mecanice constituite din elemente care execută rotaţii instantanee numai în jurul axelor centrale de inerţie $G_i z'_i$ de direcţii fixe în spaţiu, $\overline{\mathscr{K}}_{G_i} = J_i\,\bar{\omega}_i$; $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[\overline{\mathscr{K}}_{G_i}]_r = J_i\ddot{\varphi}_i\bar{k}'_i$; $\bar{\omega}_i \times \overline{\mathscr{K}}_{G_i} = 0$), ecuaţiile scalare (14.68) iau formele

$$
\begin{aligned}
&M_i\,\ddot{x}_{G_i} = \mathscr{F}_{ext\,a_{i_x}} + \mathscr{F}_{ext\,p_{i_x}} + \mathscr{F}_{int\,a_{i_x}} + \mathscr{F}_{int\,p_{i_x}};\\
&M_i\,\ddot{y}_{G_i} = \mathscr{F}_{ext\,a_{i_y}} + \mathscr{F}_{ext\,p_{i_y}} + \mathscr{F}_{int\,a_{i_y}} + \mathscr{F}_{int\,p_{i_y}};\\
&M_i\,\ddot{z}_{G_i} = \mathscr{F}_{ext\,p_{i_z}} + \mathscr{F}_{ext\,p_{i_z}} + \mathscr{F}_{int\,a_{i_z}} + \mathscr{F}_{int\,p_{i_z}};\\
&0 = \mathfrak{M}'_{ext\,a_{G_{i_x}}} + \mathfrak{M}'_{ext\,p_{G i_x}} + \mathfrak{M}'_{int\,a_{G i_x}} + \mathfrak{M}'_{int\,p_{G i_x}};\\
&0 = \mathfrak{M}'_{ext\,a_{G i_y}} + \mathfrak{M}'_{ext\,p_{G i_y}} + \mathfrak{M}'_{int\,a_{G i_y}} + \mathfrak{M}'_{int\,p_{G i_y}};\\
&J_i\,\ddot{\varphi}_i = \mathfrak{M}'_{ext\,a_{G i_z}} + \mathfrak{M}'_{ext\,p_{G i_z}} + \mathfrak{M}'_{int\,a_{G i_z}} + \mathfrak{M}'_{int\,p_{G i_z}};\\
&\qquad\qquad (i = 1, ,2, \ldots, n)
\end{aligned}
\qquad (14.69)
$$

Scanned with CamScanner

iar pentru sistemele mecanice plane, cu elementele considerate în mișcare în planul fix Oxy ($\mathcal{F}_{i_z} \equiv 0$; $\mathcal{M}'_{i_x} = \mathcal{M}'_{i_y} \equiv 0$) ecuațiile precedente se reduc la următoarele trei pentru fiecare element:

$$\boxed{\begin{aligned} M_i \ddot{x}_{G_i} &= \mathcal{F}_{ext_{a_{i_x}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{i_x}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{i_x}}} + \mathcal{F}_{int_{p_{i_x}}}; \\ M_i \ddot{y}_{G_i} &= \mathcal{F}_{ext_{a_{i_y}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{i_y}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{i_y}}} + \mathcal{F}_{int_{p_{i_y}}}; \\ J_i \ddot{\varphi} &= \mathcal{M}_{ext_{aG_i}} + \mathcal{M}_{ext_{pG_i}} + \mathcal{M}_{int_{aG_i}} + \mathcal{M}_{int_{pG_i}} \\ & (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}} \qquad (14.70)$$

Dacă unul din elementele sistemului mecanic, de exemplu, elementul (S_k), este asimilat cu un punct material, atunci ecuațiile scalare ale mișcării lui se vor reduce, ca și în dinamica rigidului, numai la cele corespunzătoare teoremei impulsului, adică ele vor avea formele:

$$\begin{aligned} m_k \ddot{x}_k &= \mathcal{F}_{ext_{a_{k_x}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{k_x}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{k_x}}} + \mathcal{F}_{int_{p_{k_x}}}; \\ m_k \ddot{y}_k &= \mathcal{F}_{ext_{a_{k_y}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{k_y}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{k_y}}} + \mathcal{F}_{int_{p_{k_y}}}; \\ m_k \ddot{z}_k &= \mathcal{F}_{ext_{a_{k_z}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{k_z}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{k_z}}} + \mathcal{F}_{int_{p_{k_z}}}, \end{aligned} \qquad (14.17)$$

ultima ecuație dispărînd în cazul sistemelor mecanice plane.

Din prezentarea acestor forme ale ecuațiilor dinamicii sistemelor mecanice rezultă că pentru fiecare element (S_i) al unui sistem mecanic se vor scrie un număr de

$$e_i \leqslant 6 \qquad (14.72)$$

ecuații scalare de mișcare dacă sistemul mecanic este spațial și un număr de

$$e_i \leqslant 3 \qquad (14.73)$$

Scanned with CamScanner

ecuaţii scalare de mişcare dacă sistemul mecanic este plan ; inegalităţile corespund situaţiei cînd elementul (S_i) considerat este asimilat cu un punct material, sau execută o mişcare particulară, sub acţiunea unui sistem particular de solicitări exterioare active.

Pe baza precizărilor făcute mai sus, se poate trage concluzia că numărul total de ecuaţii scalare de mişcare ce pot fi scrice pentru un sistem mecanic dat este egal cu

$$\boxed{e = \sum_{i=1}^{n} e_i \leqslant 6n} \tag{14.74}$$

dacă sistemul mecanic este spaţial şi egal cu

$$\boxed{e = \sum_{i=1}^{n} e_i \leqslant 3n} \tag{14.75}$$

dacă este vorba de un sistem mecanic plan, n reprezentînd, ca de obicei, numărul total de elemente din care este constituit sistemul mecanic considerat.

2°. Ecuaţiile dinamicii sistemelor mecanice corespunzătoare teoremelor torsorului rezultant al impulsurilor

Aceste ecuaţii, folosite, de regulă, în cazul sistemelor mecanice constituite dintr-un număr mare de elemente şi cînd se cere numai o rezolvare parţială a problemei de dinamica sistemelor de rigide, se obţin prin proiectarea pe axele reperului fix, la care este raportată mişcarea sistemului mecanic considerat, a relaţiilor (14.5) şi (14.18), care exprimă cele două teoreme fundamentale vectoriale ale dinamicii sistemelor mecanice, adică

$$\dot{\overline{\mathscr{H}}} = \overline{\mathscr{F}}_{ext_a} + \overline{\mathscr{F}}_{ext_p} ; \dot{\overline{\mathscr{K}}} = \overline{\mathfrak{M}}_{ext_a} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_p}, \tag{14.76}$$

cu

$$\overline{\mathscr{H}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{H}}_i = \sum_{i=1}^{n} M_i \bar{v}_{G_i} \qquad \overline{\mathscr{K}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathscr{K}}_i = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_{G_i} \times M_i \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathscr{K}}_{G_i}]$$

Scanned with CamScanner

Aceste ecuații vor avea deci formele

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}_{i_x}\right] = \mathcal{F}_{ext_{a_x}} + \mathcal{F}_{ext_{p_x}};\\
&\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}_{i_y}\right] = \mathcal{F}_{ext_{a_y}} + \mathcal{F}_{ext_{p_y}};\\
&\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathcal{H}_{i_z}\right] = \mathcal{F}_{ext_{a_z}} + \mathcal{F}_{ext_{p_z}};\\
&\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_{i_x}\right] = \mathfrak{M}_{ext_{a_x}} + \mathfrak{M}_{ext_{p_x}};\\
&\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_{i_y}\right] = \mathfrak{M}_{ext_{a_y}} + \mathfrak{M}_{ext_{p_y}};\\
&\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathcal{K}_{i_z}\right] = \mathfrak{M}_{ext_{a_z}} + \mathfrak{M}_{ext_{p_z}},
\end{aligned} \tag{14.77}$$

în cazul sistemelor mecanice spațiale și formele

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} M_i\, \dot{x}_{G_i}\right] = \mathcal{F}_{ext_{a_x}} + \mathcal{F}_{ext_{p_x}};\\
&\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} M_i\, \dot{y}_{G_i}\right] = \mathcal{F}_{ext_{a_y}} + \mathcal{F}_{ext_{p_y}};\\
&\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n} [M_i(x_{G_i}\, \dot{y}_{G_i} - y_{G_i}\, \dot{z}_{G_i}) + J_i\, \dot{\varphi}_i]\right\} = \mathfrak{M}_{ext_a} + \mathfrak{M}_{ext_p}
\end{aligned} \tag{14.78}$$

în cazul sistemelor mecanice plane ($\overline{\mathcal{K}}_i = \bar{r}_{G_i} \times M_i\, \bar{v}_{G_i} \Leftrightarrow J_i\, \bar{\omega} = [M_i\,(x_{G_i}\, \dot{y}_{G_i} - y_{G_i}\, \dot{x}_{G_i}) + J_i\, \dot{\varphi}_i]\, \bar{k}$).

Scanned with CamScanner

Se înțelege că în cazul cînd unul din elementele sistemului mecanic, de ex., elementul (S_k), va fi asimilat cu un punct material, expresia momentului său cinetic în raport cu polul fix se va reduce și aici, ca și în dinamica rigidului, numai la termenul corespunzător momentului cinetic al centrului său de masă, scris cu notațiile corespunzătoare acestei aproximări, adică

$$\overline{\mathcal{K}}_k = \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = m_k(y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k)\,\bar{i} +$$

$$+ m_k(z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k)\,\bar{j} + m_k(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k)\,\bar{k}$$

în cazul sistemelor mecanice spațiale și

$$\overline{\mathcal{K}}_k = \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = m_k(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k)\,\bar{k}$$

în cazul sistemelor mecanice plane.

Din prezentarea acestor forme ale ecuațiilor scalare ale dinamicii sistemelor mecanice rezultă că numărul total al acestor ecuații ce pot fi scrise pentru un sistem mecanic dat este de

$$e' = 6 \tag{14.79}$$

dacă sistemul mecanic este spațial și de

$$e' = 3 \tag{14.80}$$

dacă sistemul mecanic este plan; acest număr redus de ecuații scalare de mișcare justifică și afirmația făcută la început, privind utilizarea acestor ecuații numai în cazurile cînd se cere o rezolvare parțială a problemelor de dinamică.

14.2.2. Ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert

1°. Ecuațiile de echilibru dinamic corespunzătoare elementelor izolate din sistem

Dacă se observă că membrii din stînga ai ecuațiilor (14.67) reprezintă componentele, luate cu sensurile schimbate, ale torsorilor

Scanned with CamScanner

rezultanți în centrele de masă G_i ai forțelor de inerție ale elementelor (S_i), adică

$$\overline{\mathscr{K}}_i = -\overline{\mathscr{F}}_i^i; \quad \overline{\mathscr{K}}_{G_i} = -\overline{\mathfrak{M}}_{a_i}^i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.81}$$

atunci sistemele de ecuații (14.67) vor putea fi scrise sub forma

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}} + \overline{\mathscr{F}}_i^i + \overline{\mathscr{F}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathscr{F}}_{int_{p_i}} = 0; \\ &\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_{G_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_{G_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_{G_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_{G_i}}} = 0 \\ &(i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}} \tag{14.82}$$

respectiv sub forma concentrată

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{\mathscr{T}}_{G_i}(\overline{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}}) + \overline{\mathscr{T}}_{G_i}(\overline{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}}) + \overline{\mathscr{T}}_{G_i}(\overline{\mathscr{F}}_i^i) + \overline{\mathscr{T}}_{G_i}(\overline{\mathscr{T}}_{int_{a_i}}) + (\overline{\mathscr{T}}_{int_{p_i}}) = 0 \\ &(i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}} \tag{14.83}$$

ele prezentîndu-se deci, formal, ca sisteme de ecuații de echilibru, dar deosebindu-se de ecuațiile obișnuite ale staticii, pe de o parte, prin aceea că elementele pentru care sînt scrise nu se află în stare de repaos în raport cu reperul fix și, pe de altă parte, prin faptul că solicitările de inerție nu sînt aplicate, în realitate, elementelor pentru care se scriu ecuațiile, așa cum se întîmplă cu celelalte categorii de solicitări, întîlnite și în problemele de statică.

Ecuațiile de mișcare scrise sub forma (14.82) sînt cunoscute în literatura de specialitate sub denumirea de *ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert scrise pentru elemente izolate din sistem*, iar forma (14.83) a acestor ecuații permite să li se dea următoarea interpretare :

Scanned with CamScanner

„În timpul mişcării unui sistem mecanic, torsorii în centrele de masă ai solicitărilor de inerţie ale elementelor sistemului echilibrează dinamic, în orice moment, torsorii în aceleaşi centre de masă ai solicitărilor exterioare şi interioare, active şi pasive, la care sînt supuse elementele respective".

În cazul cînd unul dintre elementele sistemului mecanic, de ex., elementul (S_k), este asimilat cu un punct material, atunci ecuaţiile de echilibru dinamic corespunzătoare lui se reduc, evident, numai la ecuaţia de echilibru dinamic al forţelor, adică

$$\boxed{\mathcal{F}_{ext_{a_k}} + \overline{\mathcal{F}}_{ext_{p_k}} + \overline{\mathcal{F}}^{i}_{k} + \overline{\mathcal{F}}_{int_{a_k}} + \overline{\mathcal{F}}_{int_{p_k}} = 0} \qquad (14.84)$$

Prin proiectarea primei ecuaţii din sistemele (14.82) pe axele reperului fix la care este raportată mişcarea sistemului mecanic şi a celei de-a doua ecuaţii pe axele reperelor invariabil ataşate elementelor respective, se obţin următoarele *sisteme de ecuaţii scalare de echilibru dinamic corespunzătoare elementelor izolate din sistem*:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{ext_{a_{i_x}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{i_x}}} + \mathcal{F}^{i}_{i_x} + \mathcal{F}_{int_{a_{i_x}}} + \mathcal{F}_{int_{p_{i_x}}} = 0;\\
&\mathcal{F}_{ext_{a_{i_y}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{i_y}}} + \mathcal{F}^{i}_{i_y} + \mathcal{F}_{int_{a_{i_y}}} + \mathcal{F}_{int_{p_{i_y}}} = 0;\\
&\mathcal{F}_{ext_{a_{i_z}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{i_z}}} + \mathcal{F}^{i}_{i_z} + \mathcal{F}_{int_{a_{i_z}}} + \mathcal{F}_{int_{p_{i_z}}} = 0;\\
&\mathcal{M}'_{ext_{aG_{i_x}}} + \mathcal{M}'_{ext_{pG_{i_x}}} + \mathcal{M}^{i'}_{G_{i_x}} + \mathcal{M}'_{int_{aG_{i_x}}} + \mathcal{M}'_{int_{pG_{i_x}}} = 0;\\
&\mathcal{M}'_{ext_{aG_{i_y}}} + \mathcal{M}'_{ext_{pG_{i_y}}} + \mathcal{M}^{i'}_{G_{i_y}} + \mathcal{M}'_{int_{aG_{i_y}}} + \mathcal{M}'_{int_{pG_{i_y}}} = 0;\\
&\mathcal{M}'_{ext_{aG_{i_z}}} + \mathcal{M}'_{ext_{pG_{i_z}}} + \mathcal{M}'^{i}_{G_{i_z}} + \mathcal{M}'_{int_{aG_{i_z}}} + \mathcal{M}'_{int_{pG_{i_z}}} = 0;\\
&(i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \qquad (14.85)$$

dacă sistemul mecanic este spațial și

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{ext a_{i_x}} + \mathcal{F}_{ext p_{i_x}} + \mathcal{F}^{i}_{i_x} + \mathcal{F}_{int a_{i_x}} + \mathcal{F}_{int p_{i_x}} = 0\,;\\
&\mathcal{F}_{ext a_{i_y}} + \mathcal{F}_{ext p_{i_y}} + \mathcal{F}^{i}_{i_y} + \mathcal{F}_{int a_{i_y}} + \mathcal{F}_{int p_{i_y}} = 0\,;\\
&\mathfrak{M}_{ext a_{G_i}} + \mathfrak{M}_{ext p_{G_i}} + \mathfrak{M}^{i}_{G_i} + \mathfrak{M}_{int a_{G_i}} + \mathfrak{M}_{int p_{G_i}} = 0\\
&(i = 1,2,\ldots n)
\end{aligned} \tag{14.86}$$

dacă sistemul mecanic este plan.

Se înțelege și aici că în cazul cînd elementul (S_i) va fi asimilat cu un punct material, în sistemele de ecuații de mai sus nu vor mai figura ecuațiile de momente axiale.

Pentru fiecare element (S_i) al sistemului mecanic se vor scrie deci un număr de

$$e_i \leqslant 6 \tag{14.87}$$

ecuații scalare de echilibru dinamic în cazul sistemelor spațiale și un număr de

$$e_1 \leqslant 3 \tag{14.88}$$

ecuații scalare de echilibru dinamic în cazul sistemelor mecanice plane, inegalitățile corespunzînd situației cînd unele din elementele sistemului sînt asimilate cu puncte materiale sau execută mișcări particulare, sub acțiunea unor sisteme particulare de solicitări exterioare active.

În consecință, numărul total de ecuații scalare de echilibru dinamic ce pot fi scrise pentru un sistem mecanic constituit din n elemente va fi de

$$\boxed{e = \sum_{i=2}^{n} e_i \leqslant 6n} \tag{14.89}$$

în cazul sistemelor mecanice spațiale și de

$$\boxed{e = \sum_{i=1}^{n} e_i \leqslant 3n} \tag{14.90}$$

în cazul sistemelor mecanice plane.

2°. Ecuațiile de echilibru dinamic corespunzătoare întregului sistem mecanic

Ecuațiile de echilibru dinamic (14.82) exprimă de fapt că ansamblul solicitărilor exterioare, interioare și de inerție corespunzătoare fiecărui element al unui sistem mecanic poate fi considerat, convențional, ca formînd un sistem de vectori echivalent cu zero. În baza teoremei, demonstrată în teoria vectorilor alunecători, privind independența de pol a echivalenței cu zero a unui sistem de vectori alunecători, rezultă că ansamblul solicitărilor exterioare, interioare și de inerție la care este supus fiecare element al sistemului mecanic va continua să rămînă echivalent cu zero în orice alt pol, deci și în polul fix O, comun tuturor elementelor sistemului mecanic, putindu-se scrie, în consecință, ecuațiile de echilibru dinamic și în raport cu acest pol fix, reprezentat prin originea reperului fix la care este raportată mișcarea sistemului mecanic, adică valabilitatea ecuațiilor (14.82) are drept consecință și valabilitatea ecuațiilor

$$\overline{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathcal{F}}_{ext_{p_i}} + \overline{\mathcal{F}}_i^i + \overline{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} = 0;$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_i^i + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}} = 0.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.91}$$

Însumînd, pe de o parte, ecuațiile de echilibru dinamic al forțelor, scrise pentru toate elementele sistemului mecanic și, pe de altă parte, ecuațiile de echilibru dinamic al momentelor, suma fiind extinsă și acum asupra tuturor elementelor sistemului mecanic și ținînd seama și de faptul că solicitările interioare corespunzătoare întregului sistem mecanic formează, indiferent de tipul de solicitare, un sistem de vectori echivalent cu zero, rezultă relațiile

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathcal{F}}_{ext_{p_i}} + \overline{\mathcal{F}}_i^i] = 0; \\ &\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_i^i] = 0, \end{aligned}} \tag{14.92}$$

Scanned with CamScanner

reprezentînd *ecuaţiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert corespunzătoare întregului sistem mecanic;* retranscrise sub forma concentrată

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}\,(\overline{\mathcal{F}}_{ext_a}) + \overline{\mathcal{T}}\,(\overline{\mathcal{F}}_{ext_p}) + \overline{\mathcal{T}}\,(\overline{\mathcal{F}}^i) = 0} \tag{14.93}$$

acestor ecuaţii li se poate da următoarea interpretare:

„În timpul mişcării unui sistem mecanic, torsorul rezultant, într-un pol fix, al tuturor solicitărilor de inerţie ale elementelor sistemului echilibrează dinamic torsorii rezultanţi, în acelaşi pol fix, ai tuturor solicitărilor exterioare, active şi pasive, la care sînt supuse elementele întregului sistem mecanic".

Ecuaţiilor vectoriale (14.92) le corespund următoarele *ecuaţii scalare de echilibru dinamic scrise pentru întregul sistem mecanic,* rezultînd prin proiectarea lor pe axele reperului fix:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} [\mathcal{F}_{ext_{a_{i_x}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{i_x}}} + \mathcal{F}^i_{i_x}] = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} [\mathcal{F}_{ext_{a_{i_y}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{i_y}}} + \mathcal{F}^i_{i_y}] = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} [\mathcal{F}_{ext_{a_{i_z}}} + \mathcal{F}_{ext_{p_{i_z}}} + \mathcal{F}^i_{i_z}] = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} [\mathcal{M}_{ext_{a_{i_x}}} + \mathcal{M}_{ext_{p_{i_x}}} + \mathcal{M}^i_{i_x}] = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} [\mathcal{M}_{ext_{a_{i_y}}} + \mathcal{M}_{ext_{p_{i_y}}} + \mathcal{M}^i_{i_y} = 0;\\
&\sum_{i=1}^{n} [\mathcal{M}_{ext_{a_{i_z}}} + \mathcal{M}_{ext_{p_{i_z}}} + \mathcal{M}^i_{i_z}] = 0,
\end{aligned}} \tag{14.94}$$

Scanned with CamScanner

dacă este vorba de sisteme mecanice spațiale, respectiv

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} [\mathscr{F}_{ext_{a_{i_x}}} + \mathscr{F}_{ext_{p_{i_x}}} + \mathscr{F}^{i}_{i_x}] = 0\,; \\
&\sum_{i=1}^{n} [\mathscr{F}_{ext_{a_{i_y}}} + \mathscr{F}_{ext_{p_{i_y}}} + \mathscr{F}^{i}_{i_y}] = 0\,; \\
&\sum_{i=1}^{n} [\mathscr{M}_{ext_{a_i}} + \mathscr{M}_{ext_{p_i}} + \mathscr{M}^{i}_{i}] = 0,
\end{aligned}} \tag{14.95}$$

dacă este vorba de sisteme mecanice plane ($\overline{\mathscr{M}}^{i}_{i} = \mathscr{M}^{i}_{i}\bar{k}$).

În cazul cînd se utilizează aceste din urmă forme de ecuații de echilibru dinamic rezultă un număr total de

$$\boxed{e' = 6} \tag{14.96}$$

ecuații scalare de mișcare pentru sistemele mecanice spațiale și un număr de

$$\boxed{e' = 3} \tag{14.97}$$

ecuații scalare de echilibru dinamic pentru sistemele mecanice plane.

Ecuațiile de echilibru dinamic ale alui d'Alembert au condus la o metodă foarte comodă — și, din acest motiv, foarte mult folosită în diversele ramuri de mecanică aplicată —, cunoscută sub numele de *metoda cineto-statică*, de rezolvare a unor grupuri de probleme ale dinamicii sistemelor mecanice folosind procedeele simple ale staticii, adică cu ajutorul unor ecuații de proiecții ale forțelor și momentelor, asemănătoare acelora din statică.

Scanned with CamScanner

14.2.3. Ecuaţiile mecanicii analitice

Primele două forme, stabilite în cadrul subpunctelor 2.1 şi 2.2. ale acestui paragraf, ale ecuaţiilor dinamicii sistemelor mecanice conţin ca necunoscute, pe lîngă o serie dintre parametrii de poziţie variabili în timp ai sistemului mecanic pentru care se scriu aceste ecuaţii, precum şi în afară de unele mărimi scalare ce caracterizează torsorii solicitărilor active — exterioare şi interioare — aplicate elementelor sistemului, şi toate elementele scalare necunoscute din torsorii reacţiunilor legăturilor pasive aplicate sistemului şi anume, atît ale legăturilor pasive exterioare, cît şi ale celor interioare, dacă ecuaţiile se scriu pentru elemente izolate din sistem, sau numai cele ale legăturilor pasive exterioare, dacă ecuaţiile se scriu pentru întregul sistem mecanic.

După cum se va vedea la subpunctul următor, una din cele mai dificile etape în rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor mecanice este aceea a eliminării, din ecuaţiile scalare ale mişcării unui sistem mecanic, a reacţiunilor necunoscute ale legăturilor pasive exterioare şi interioare, în vederea obţinerii sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării acelui sistem mecanic, ecuaţii care, ca şi în dinamica rigidului, vor trebui să conţină ca necunoscute numai parametrii de poziţie independenţi ai sistemului mecanic considerat.

Marele matematician Joseph-Louis Lagrange a avut meritul de a fi elaborat o metodă generală de stabilire — directă şi sub o formă deosebit de elegantă — a sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării unui sistem mecanic, metodă purtînd denumirea de *mecanică analitică* după titlul lucrării în care a fost prezentată, publicată de Lagrange în anul 1788, şi care, datorită eficienţei ei este astăzi utilizată, cu succes, nu numai în fizica şi mecanica teoretică, ci şi în cele mai variate domenii ale mecanicii tehnice.

Trebuie de făcut precizarea că unica condiţie restrictivă impusă la fundamentarea acestei metode — şi anume, aceea de a se considera solicitările de frecare, exterioare şi interioare, fie cunoscute, fie neglijabile —, nu poate constitui un impediment esenţial pentru utilizarea ei în aplicaţiile tehnice, deoarece — aşa cum s-a văzut, de altfel, şi în dinamica rigidului — în cele mai multe situaţii rezolvarea problemelor nu este posibilă nici prin celelalte metode fără acceptarea acestei ipoteze simplificatoare.

Scanned with CamScanner

Diversele forme ale ecuațiilor mecanicii analitice se stabilesc pe baza unor relații exprimînd anumite proprietăți generale ale mișcării sistemului mecanic, relații care pot fi deduse plecîndu-se de la primele două forme ale ecuațiilor dinamicii sistemelor mecanice, stabilite în cadrul subpunctelor precedente; acceptarea acestor relații ca axiome nedemonstrabile poate conduce, folosind o cale inversă de demonstrație, la obținerea uneia sau a alteia din primele două forme ale ecuațiilor dinamicii sistemelor mecanice și deci, indirect, la concluzia valabilității principiilor newtoniene ale mecanicii clasice, care au stat la baza procedeului de stabilire a ecuațiilor dinamicii rigidului.

Din acest motiv, relațiile pe baza cărora se stabilesc diversele forme ale ecuațiilor mecanicii analitice și care vor fi deduse în continuare plecîndu-se de la formele 2.1 și 2.2. ale ecuațiilor dinamicii sistemelor de rigide, au primit numele de *principiile mecanicii analitice.*

1°. Principiile variaționale ale mecanicii analitice

Procedeul obișnuit de a stabili proprietățile generale ale mișcării unui sistem mecanic constă în compararea mișcării reale a sistemului cu o mișcare imaginară cinematic posibilă — adică, permisă de legăturile pasive, exterioare și interioare, aplicate elementelor sistemului — , foarte apropiată de mișcarea reală și care va fi numită, în continuare, *mișcare variată* a sistemului mecanic considerat.

În funcție de modul de concepere a mișcării variate, pot fi puse în evidență, prin o asemenea comparare, diverse proprietăți ale mișcării reale a unui sistem mecanic exprimate prin relații variaționale, adică prin relații care exprimă condiții de staționaritate (existența unor extreme, sau a unor variații fără schimbare de semn) ale unor mărimi mecanice ce caracterizează mișcarea sistemului mecanic studiat; din acest motiv, relațiile respective au primit denumirea de *principiile variaționale ale mecanicii analitice.*

O asemenea mișcare variată poate fi obținută prin modificarea convenabilă a funcțiilor de timp prin care sînt exprimați parametrii lagrangeieni de poziție ai unui sistem mecanic — considerat, ca de obicei în această lucrare, olonom —, adică a funcțiilor

$$q_j = q_j(t) \; ; \qquad (j = 1, 2, \ldots, p), \tag{14.98}$$

imaginîndu-se un sistem de creșteri foarte mici ale acestora, permise de legăturile pasive aplcate elementelor sistemului mecanic și purtînd numele de *variații ale parametrilor lagrangeieni de poziție.*

Aceste variații pot fi concepute în următoarele două moduri distincte:

— Variații definite la un moment oarecare al mișcării, în care caz se pun în evidență proprietăți ale mișcării reale a sistemului mecanic corespunzătoare numai unor momente sau numai unor intervale foarte mici de timp; datorită faptului că relațiile care exprimă aceste proprietăți se prezintă sub forma de condiții de staționaritate — sau posibile de interpretat ca atare — a unor funcții simple definite pe un domeniu determinat de variație a parametrilor de poziție lagrangeieni sau a unor mărimi mecanice cu un sens fizic bine precizat, aceste relații au primit denumirea de *principiile variaționale diferențiale ale mecanicii analitice.*

— Variații definite pe un interval finit de timp, $[t_0, t_1]$, pentru care se evidențiază și proprietățile mișcării reale a sistemului mecanic; deoarece în această ultimă situație relațiile care exprimă proprietățile mișcării reale reprezintă condiții de staționaritate a unor funcții de forma

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{A}(q\,;\,\dot{q}\,;\,t)\,dt, \tag{14.99}$$

numite *funționale* și care depind de întreaga variație în intervalul de timp $[t_0, t_1]$, a funcției $\mathscr{A}(q\,;\,\dot{q}\,;\,t)$, ele au primit numele de *principiile variaționale integrale ale mecanicii analitice.*

În continuare, vor fi stabilite diversele forme de prezentare a celor două clase de principii variaționale ale mecanicii analitice.

a) *Principiile variaționale diferențiale ale mecanicii analitice.*

Variații izocrone (sincrone) ale parametrilor lagrangeieni de poziție. Considerînd mișcarea sistemului mecanic definită la un moment oarecare t prin ecuațiile (14.98), fiecărei din aceste ecuații îi va corespunde, prin reprezentare grafică în intervalul de timp $[t_0, t_1]$ în care se studiază mișcarea sistemului mecanic, o curbă (Γ_{q_j}), valorii t a argumentului corespunzîndu-i pe curbă un punct $Q_{j(t)}$ (fig. 14.1).

În afara acestei mișcări reale a sistemului mecanic se poate concepe și o mișcare variată a lui, efectuată în următoarele două

condiţii :

— este compatibilă cu legăturile pasive aplicate sistemului mecanic, ultimele considerate staţionare în mişcarea variată ;

— este provocată de variaţii instantanee, în fiecare moment $t \in [t_0, t_1]$, ale parametrilor de poziţie şi ale parametrilor cinematici ai elementelor sistemului mecanic.

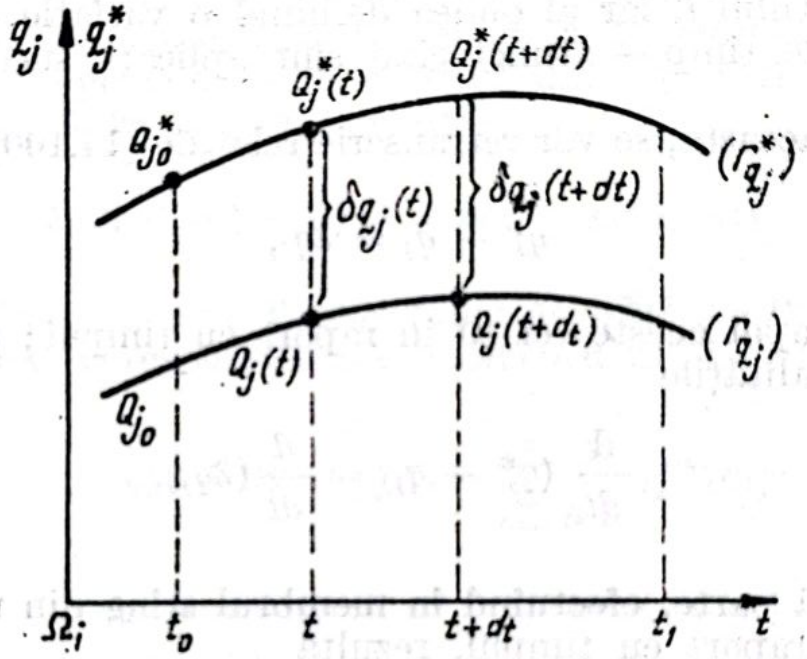


Fig. 14.1

O asemenea mişcare variată va fi definită prin ecuaţiile

$$q_j^*(t) = q_j(t) + \delta q_j(t), \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{14.100}$$

cu variaţiile δq_j avînd modulii foarte mici şi considerate funcţii continue de timp şi cel puţin odată derivabile în raport cu timpul în intervalul de timp considerat, pentru ca mişcarea variată să aibă loc în fiecare moment al intervalului ; acestei mişcări variate îi va corespunde, în graficul din fig. 14.1, curba $(\Gamma_{q_j}^*)$, iar momentului t îi va corespunde pe această din urmă curbă un punct $Q_{j(t)}^*$.

Variaţiile definite mai sus ale parametrilor de poziţie lagrangeieni, caracterizate prin faptul că variabila independentă t este aceeaşi şi în funcţiile $\delta q_j(t)$ şi în funcţiile $q_j(t)$, ceea ce se reflectă în graficul din fig. 14.1 prin situarea punctelor $Q_{j(t)}$ şi $Q_{j(t)}^*$, corespunzătoare unui moment t, pe aceeaşi paralelă la axa ordonatelor, au

primit denumirea de *variaţii izocrone*, sau *sincrone*, denumire justificată de observaţia că aceste variaţii trebuie considerate ca producîndu-se instantaneu la momentul t, deci independent de variaţia timpului.

Se va demonstra, în continuare, că în cazul acestor variaţii izocrone este valabilă proprietatea de comutativitate a operatorilor d şi δ — primul definind o variaţie elementară provocată de variaţia dt a argumentului t, iar al doilea definind o variaţie elementară independentă de timp — atunci cînd sînt aplicaţi succesiv funcţiilor $q_j(t)$.

Pentru aceasta, se vor retranscrie relaţiile (14.100) sub forma

$$q_j^* - q_j = \delta q_j, \tag{14.101}$$

derivîndu-se apoi aceste relaţii în raport cu timpul; pe de o parte, vor rezulta egalităţile

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}(q_j^* - q_j) = \frac{d}{dt}(\delta q_j), \tag{14.102}$$

iar pe de altă parte, efectuînd în membrul stîng din ultimele relaţii derivările în raport cu timpul, rezultă

$$\frac{d}{dt}(q_j^* - q_j) = \dot{q}_j^* - \dot{q}_j = \delta\dot{q}_j \tag{14.103}$$

$\delta\dot{q}_j$ reprezentînd variaţiile izocrone ale vitezelor generalizate.

Compararea relaţiilor (14.102) şi (14.103) conduce la concluziile

$$\frac{d}{dt}(\delta q_j) = \delta\dot{q}_j, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{14.104}$$

şi deci la relaţiile

$$d(\delta q_j) = \delta(dq_j), \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{14.105}$$

care confirmă afirmaţia făcută privind comutativitatea operatorilor d şi δ.

Este uşor de înţeles că această comutativitate se va păstra şi la derivatele de ordin superior în raport cu timpul ale parametrilor lagrangeieni de poziţie, adică vor fi valabile şi relaţiile

$$\frac{d^h}{dt^h}(\delta q_j) = \delta\left(\frac{d^h q_j}{dt^h}\right) = \delta q_j^{(h)} \quad (j = 1, 2, \ldots, p) \qquad (14.106)$$

$q_j^{(h)}$ reprezentînd derivata de ordinul h a funcţiei $q_j(t)$.

Considerînd acum variaţia izocronă la momentul $(t + dt)$ a funcţiei $q_j(t)$, reprezentată în graficul din fig. 14.1 prin segmentul $Q_{j(t+dt)}\ Q^*_{j(t+dt)}$, ea va fi dată de relaţia

$$\delta q_j(t + dt) = q_j^*(t + dt) - q_j(t + dt). \qquad (14.107)$$

Dezvoltînd în serii Taylor funcţiile $q_j^*(t + dt)$ şi $q_j(t + dt)$ în jurul valorilor corespunzătoare momentului t, adică

$$q_j^*(t + dt) = q_j^*(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h!} q_j^{*(h)}(dt)^h$$

şi

$$q(t + dt) = q_j(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h!} q_j^{(h)}(dt)^h$$

vor rezulta următoarele expresii pentru variaţiile izocrone ale parametrilor lagrangeieni de poziţie la momentul $(t + dt)$:

$$\delta q_j(t + dt) = [q_j^*(t) - q_j(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{h!} [q_j^{(h)} - q_j^{(h)}](dt)^h$$

$$(j = 1,2, \ldots, p),$$

sau încă, ţinînd seama de semnificaţiile diferenţelor din parantezele din membrul drept al ultimei relaţii, adică

$$q_j^*(t) - q_j(t) = \delta q_j(t) = \delta q_j;$$

$$q_j^{*(h)}(t) - q_j^{(h)}(t) = \delta q_j^{(h)}(t) = \delta q_j^{(h)},$$

$$(j = 1,2, \ldots, p)$$

mai rezultă relațiile

$$\delta q_j(t + dt) = \delta q_j + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \delta_j^{(h)} (dt)^h. \tag{14.108}$$

Variațiilor izocrone ale parametrilor lagrangeieni de poziție le vor corespunde variații izocrone ale parametrilor de poziție obișnuiți, variabili în timp, ai elementelor sistemului mecanic. Considerînd, în continuare, pentru simplificarea calculelor, numai cazul cel mai des întîlnit în aplicațiile tehnice, al sistemelor mecanice cu elementele executînd rotații în jurul axelor centrale de inerție $G_i z_i$ de direcții fixe în spațiu ($\psi_i = \theta_i \equiv 0$; $\bar{K}_{Gi} = J_i \dot{\omega}_i = J_i \dot{\varphi}_i \bar{k}_i'$), aceste variații vor avea expresiile

$$\begin{aligned}
&\delta x_{G_i}(t) = \delta x_{G_i} = x_{G_i}(q^*, t) - x_{G_i}(q, t);\\
&\delta y_{G_i}(t) = \delta y_{G_i} = y_{G_i}(q^*, t) - y_{G_i}(q, t);\\
&\delta z_{G_i}(t) = \delta z_{G_i} = z_{G_i}(q^*, t) - z_{G_i}(q, t);\\
&\delta \varphi_i(t) = \delta \varphi_i = \varphi_i(q^*, t) - \varphi_i(q, t),\\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{14.109}$$

la momentul t și expresiile

$$\begin{aligned}
&\delta x_{G_i}(t + dt) = x_{G_i}(q^*; t + dt) - x_{G_i}(q; t + dt);\\
&\delta y_{G_i}(t + dt) = y_{G_i}(q^*; t + dt) - y_{G_i}(q; t + dt);\\
&\delta z_{G_i}(t + dt) = z_{G_i}(q^*; t + dt) - z_{G_i}(q; t + dt);\\
&\delta \varphi_i(t + dt) = \varphi_i(q^*; t + dt) - \varphi_i(q; t + dt),
\end{aligned} \tag{14.110}$$

la momentul $(t + dt)$.

Dezvoltînd termenii din membrul drept al ultimelor relații în serii Taylor în jurul valorilor corespunzătoare momentului t, rezultă

relaţiile

$$\delta x_{G_i}(t+dt) = [x_{G_i}(q^*;t) - x_{G_i}(q;t)] + \\ + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} [\overset{(h)}{x}_{G_i}(q^*;t) - \overset{(h)}{x}_{G_i}(q;t)] (dt)^h;$$

$$\delta y_{G_i}(t+dt) = [y_{G_i}(q^*;t) - y_{G_i}(q;t) + \\ + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} [\overset{(h)}{y}_{G_i}(q^*;t) - \overset{(h)}{y}_{G_i}(q;t)] (dt)^h; \qquad (14.111)$$

$$\delta z_{G_i}(t+dt) = [z_{G_i}(q^*;t) - z_{G_i}(q;t)] + \\ + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} [\overset{(h)}{z}_{G_i}(q^*;t) - \overset{(h)}{z}_{G_i}(q;t)] (dt)^h;$$

$$\delta \varphi_i(t+dt) = [\varphi_i(q^*;t) - \varphi_i(q;t)] + \\ + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} [\overset{(h)}{\varphi}_i(q^*;t) - \overset{(h)}{z}_i(q;t)] (dt)^h;$$

$\overset{(h)}{x}_{G_i}$, $\overset{(h)}{y}_{G_i}$, $\overset{(h)}{z}_{G_i}$ şi $\overset{(h)}{\varphi}_{G_i}$ reprezentînd şi acum derivatele de ordinul h în raport cu timpul ale parametrilor de poziţie variabili în timp ai elementelor sistemului mecanic.

Ţinînd seama de relaţiile (14.109) şi observînd că parantezele din sumele din membrul drept al relaţiilor (14.111) reprezintă variaţiile izocrone ale derivatelor de ordinul h ale parametrilor de poziţie x_{G_i}, y_{G_i}, z_{G_i} şi φ_i, adică

$$\overset{(h)}{x}_{G_i}(q^*;t) - \overset{(h)}{x}_{G_i}(q;t) = \overset{(h)}{\delta x}_{G_i};$$

$$\overset{(h)}{y}_{G_i}(q^*;t) - \overset{(h)}{y}_{G_i}(q;t) = \overset{(h)}{\delta y}_{G_i}; \qquad (14.112)$$

$$\overset{(h)}{z}_{G_i}(q^*;t) - \overset{(h)}{z}_{G_i}(q;t) = \overset{(h)}{\delta z}_{G_i};$$

$$\overset{(h)}{\varphi}_i(q^*;t) - \overset{(h)}{\varphi}_i(q;t) = \overset{(h)}{\delta \varphi}_i, \\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

se mai pot scrie următoarele forme finale pentru variațiile izocrone (14.111) ale parametrilor de poziție ai elementelor sistemului mecanic

$$\delta x_{G_i}(t+dt) = \delta x_{G_i} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \overset{(h)}{\delta x_{G_i}} (dt)^h ;$$

$$\delta y_{G_i}(t+dt) = \delta y_{G_i} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \overset{(h)}{\delta y_{G_i}} (dt)^h ;$$

$$\delta z_{G_i}(t+dt) = \delta z_{G_i} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \overset{(h)}{\delta z_{G_i}} (dt)^h ;$$

$$\delta \varphi_i(t+dt) = d\varphi_i + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} \overset{(h)}{\delta \varphi_{G_i}} (dt)^h .$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14.113)$$

Aceste variații vor permite definirea unui sistem de deplasări virtuale izocrone, determinate la momentul $(t + dt)$ prin relațiile

$$\delta \bar{r}_{G_i}(t+dt) = \delta x_{G_i}(t+dt)\,\bar{i} + \delta y_{G_i}(t+dt)\,\bar{j} + \delta z_{G_i}(t+dt)\bar{k} ;$$

$$\delta \bar{\Theta}(t+dt) = \delta \varphi_i(t+dt)\,\bar{k}_i' = \delta \varphi_i(t+dt)\bar{k}_i^0 \quad (\bar{k}_i^0 = \text{const})$$

sau încă, ținînd seama și de expresiile (14.113), prin relațiile

$$\delta \bar{r}_{G_i}(t+dt) = [\delta x_{G_i}\,\bar{i} + \delta y_{G_i}\,\bar{j} + \delta z_{G_i}\,\bar{k}] + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} [\overset{(h)}{\delta x_{G_i}}\,\bar{i} + \overset{(h)}{\delta y_{G_i}}\,\bar{j} + \overset{(h)}{\delta z_{G_i}}\,\bar{k}] (dt)^h ; \qquad (14.114)$$

$$\delta\,\bar{\Theta}_i(t+dt) = [\delta \varphi_i\,\bar{k}_i'] + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h!} [\overset{(h)}{\delta \varphi_i}\,\bar{k}_i'] (dt)^h ,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

cu următoarele semnificații pentru diversele grupuri de termeni:

— termenii

$$\delta x_{G_i}\,\bar{i} + \delta y_{G_i}\,\bar{j} + \delta z_{G_i}\,\bar{k} = \delta \bar{r}_{G_i} ; \quad \delta \varphi_i\,\bar{k}_i' = \delta \bar{\Theta}_i \qquad (14.115)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

vor reprezenta deplasările virtuale izocrone la momentul t;

— termenii corespunzători valorii $h = 1$ din suma din membrul drept al relațiilor (14.114), scriși sub forma

$$(\delta x_{G_i}^{(1)}\,\bar{\imath} + \delta y_{G_i}^{(1)}\,\bar{\jmath} + \delta z_{G_i}^{(1)}\,\bar{k})\,dt = (\delta \dot{x}_{G_i}\,\bar{\imath} + \delta \dot{y}_{G_i}\,\bar{\jmath} + \delta \dot{z}_{G_i}\,\bar{k})\,dt =$$

$$= \delta(\dot{x}_{G_i}\,\bar{\imath} + \dot{y}_{G_i}\,\bar{\jmath} + \dot{z}_{G_i}\,\bar{k})\,dt = \delta \bar{v}_{G_i}\,dt\ ; \tag{14.116}$$

$$(\delta \varphi_i^{(1)}\,\bar{k}_i')\,dt = (\delta \dot{\varphi}_i\,\bar{k}_i')\,dt = \delta(\dot{\varphi}_i\,\bar{k}_i')\,dt = \delta\,\bar{\omega}_i\,dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

vor reprezenta variațiile izocrone la momentul t ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic;

— termenii corespunzători valorii $h = 2$ din suma din membrul drept al relațiilor (14.114), adică

$$\frac{1}{2}\,[\delta x_{G_i}^{(2)}\,\bar{\imath} + \delta y_{G_i}^{(2)}\,\bar{\jmath} + \delta z_{G_i}^{(2)}\,\bar{k}]\,(dt)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,[\delta \ddot{x}_{G_i}\,\bar{\imath} + \delta \ddot{y}_{G_i}\,\bar{\jmath} + \delta \ddot{z}_{G_i}\,\bar{k}]\,(dt)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta[\ddot{x}_{G_i}\,\bar{\imath} + \ddot{y}_{G_i}\,\bar{\jmath} + \ddot{z}_{G_i}\,\bar{k}]\,(dt)^2 = \frac{1}{2}\,\delta\,\bar{a}_{G_i}\,(dt)^2\,; \tag{14.117}$$

$$\frac{1}{2}\,[\delta \varphi_i^{(2)}\,\bar{k}_i']\,(dt)^2 = \frac{1}{2}\,[\delta \ddot{\varphi}_i\,\bar{k}_i']\,(dt)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\,\delta[\ddot{\varphi}_i\,\bar{k}_i']\,(dt)^2 = \frac{1}{2}\,\delta\,\bar{\varepsilon}_i\,(dt)^2$$

$$(i = \mathrm{q}1, 2, \ldots, n)$$

reprezintă variațiile izocrone ale parametrilor cinematici de ordinul doi ai elementelor sistemului mecanic;

— termenii de ordin superior valorii $h = 2$ din suma din mem-

Scanned with CamScanner

brul drept al relaţiilor (14.114), scrişi sub formele

$$\frac{1}{h!}\left[\delta x_{G_i}^{(h)}\,\bar{i}+\delta y_{G_i}^{(h)}\,\bar{j}+\delta z_{G_i}^{(h)}\,\bar{k}\right](dt)^h =$$

$$=\frac{1}{h!}\,\delta\left[x_{G_i}^{(h)}\,\bar{i}+y_{G_i}^{(h)}\,\bar{j}+z_{G_i}^{(h)}\,\bar{k}\right](dt)^h=\frac{1}{h!}\,\delta\bar{a}_{G_i}^{(h-1)}\,(dt)^h;$$

$$\frac{1}{h!}\left[\delta\varphi_i^{(h)}\,\bar{k}_i'\right](dt)^h=\frac{1}{h!}\,\delta\left[\varphi_i^{(h)}\,\bar{k}_i'\right](dt)^h=\frac{1}{h!}\,d\bar{\varepsilon}_i^{(h-1)}\,(dt)^h$$

$$(i=1,2,\ldots,n) \tag{14.118}$$

vor reprezenta variaţiile izocrone la momentul t ale mărimilor

$$\bar{a}_{G_i}^{(h-1)}=x_{G_i}^{(h-1)}\,\bar{i}+y_{G_i}^{(h-1)}\,\bar{j}+z_{G_i}^{(h-1)}\,\bar{k}=\frac{d^{h-1}}{dt^{h-1}}\left(x_{G_i}\,\bar{i}+y_{G_i}\,\bar{j}+z_{G_i}\,\bar{k}\right);$$

$$\bar{\varepsilon}_i^{(h-1)}=\varphi_i^{(h-1}\,\bar{k}_i'=\frac{d^{(h-1)}}{dt^{h-1}}\left(\varphi_i\,\bar{k}_i'\right) \tag{14.119}$$

numite, în literatura de specialitate, *parametri cinematici de ordin superior* ai elementelor sistemului mecanic şi anume, *acceleraţii de translaţii de ordinul* $(h-1)$, respectiv *acceleraţii unghiulare de ordinul* $(h-1)$.

Avînd în vedere semnificaţiile (14.115), (14.116), (14.117), (14.118) şi (14.119) ale diverselor grupuri de termeni din membrul drept al relaţiilor (14.114), acestea din urmă vor putea fi scrise sub formele

$$\delta\bar{r}_{G_i}(t+dt)=\delta\bar{r}_{G_i}+\delta\bar{v}_{G_i}\,dt+\frac{1}{2!}\,\delta\bar{a}_{G_i}\,(dt)^2+$$

$$+\sum_{h=3}^{\infty}\frac{1}{h!}\,\delta\bar{a}_{G_i}^{(h-1)}\,(dt)^h;$$

$$\delta\bar{\Theta}_i(t+dt)=\delta\bar{\Theta}_i+\delta\bar{\omega}_i\,dt+\frac{1}{2!}\,\delta\bar{\varepsilon}_i\,(dt)^2+\sum_{h=3}^{\infty}\frac{1}{h!}\,\delta\bar{\varepsilon}_i^{(h-1)}\,(dt)^h.$$

$$(i=1,2,\ldots,n) \tag{14.120}$$

Relațiile precedente permit să se tragă concluzia că mișcarea variată izocronă la momentul $(t + dt)$ poate fi imaginată că rezultînd prin variații izocrone atît ale parametrilor de poziție ai elementelor sistemului mecanic, cît și prin variații izocrone ale parametrilor lor cinematici de diferite ordine; această constatare nu exclude însă și posibilitatea de a concepe mișcarea variată izocronă ca rezultînd numai prin variații izocrone ale uneia singure dintre mărimile fizice care figurează în membrul drept al relațiilor (14.120), adică de a se considera mișcarea variată izocronă ca fiind provocată fie numai de variații izocrone ale parametrilor de poziție, fie numai prin variații izocrone ale parametrilor cinematici de ordinul întîi, fie numai prin variații izocrone ale parametrilor cinematici de ordinul doi, fie, în fine, numai prin variații izocrone ale accelerațiilor de translație și ale accelerațiilor unghiulare de un ordin oarecare k.

Aceasta revine însă la a considera că operatorul δ al variației izocrone se aplică numai mărimilor alese pentru a explica apariția mișcării variate izocrone, variațiile celorlalte mărimi fiind considerate egale cu zero.

În modul acesta au putut fi definite diverse tipuri de mișcări variate izocrone, cu tipuri corespunzătoare de operator δ al variației izocrone și anume:

— *Mișcare variată izocronă de tip Lagrange*, concepută ca rezultînd numai prin variații izocrone ale parametrilor de poziție, operatorul δ corespunzător acestui tip de mișcare variată, notat cu simbolul δ_L satisfăcînd condițiile

$$\delta_L \bar{v}_{G_i} = 0; \qquad \delta_L \bar{a}_{G_i}^{(h)} = 0;$$

$$\delta_L \bar{\omega}_i = 0; \qquad \delta_L \bar{\varepsilon}_i^{(h)} = 0, \quad (h = 1, 2, \dots)$$

pentru care relațiile (14.120) iau formele

$$\delta_L \bar{r}_{G_i}(t + dt) = \delta_L \bar{r}_{G_i}(t) = \delta_L \bar{r}_{G_i}; \qquad (14.121)$$

$$\delta_L \bar{\Theta}_i(t + dt) = \delta_L \bar{\Theta}_i(t) = \delta_L \bar{\Theta}_i. \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

— *Mișcare variată izocronă de tip Jourdin*, imaginată ca rezultînd numai prin variații izocrone ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic, operatorul acestui tip de

variaţie, notat cu simbolul δ_J, satisfăcînd condiţiile

$$\begin{aligned} &\delta_J \bar{r}_{G_i} = 0\,; \qquad \delta_J \bar{\Theta}_i = 0\,; \\ &\delta_J \bar{a}_{G_i}^{(h)} = 0\,; \qquad \delta_J \bar{\varepsilon}_i^{(h)} = 0 \end{aligned} \qquad \begin{matrix} (h = 1, 2, \ldots,) \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{matrix} \qquad (14.122)$$

pentru care relaţiile (14.20) iau formele

$$\begin{aligned} &\delta_J \bar{r}_{G_i}(t+dt) = \delta_J \bar{v}_{G_i}\, dt\,; \\ &\delta_J \bar{\Theta}_i(t+dt) = \delta_J \bar{\omega}_i\, dt\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \qquad (14.123)$$

— *Mişcare variată izocronă de tip Gauss*, concepută ca fiind provocată numai prin variaţii izocrone ale parametrilor cinematici de ordinul doi ai elementelor sistemului mecanic, operatorul acestui tip de variaţii, notat cu simbolul δ_G, satisfăcînd deci condiţiile

$$\begin{aligned} &\delta_G \bar{r}_{G_i} = 0\,; \quad \delta_G \bar{\Theta}_i = 0\,; \\ &\delta_G \bar{v}_{G_i} = 0\,; \quad \delta_G \bar{\omega}_i = 0\,; \\ &\delta_G \bar{a}_{G_i}^{(h)} = 0\,; \quad \delta_{G_i} \bar{\varepsilon}_i^{(h)} = 0, \end{aligned} \qquad \begin{matrix} \\ \\ (h = 2, 3, \ldots,) \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{matrix} \qquad (14.124)$$

în baza cărora relaţiile (14.120) vor lua formele

$$\begin{aligned} &\delta_G \bar{r}_{G_i}(t+dt) = \frac{1}{2}\, \delta_G \bar{a}_{G_i}\, (dt)^2\,; \\ &\delta_G \bar{\Theta}_i(t+dt) = \frac{1}{2}\, \delta_G \bar{\varepsilon}_i\, (dt)^2\,; \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \qquad (14.125)$$

— *Mişcare variată izocronă de tip Mangeron*, imaginată ca fiind provocată numai prin variaţiile izocrone ale acceleraţiilor de trans-

laţie şi ale acceleraţiilor unghiulare de un anumit ordin superior lui 1, ($k > 1$), operatorul acestui tip de variaţie izocronă, notat cu simbolul δ_M, satisfăcînd condiţiile

$$\begin{aligned} &\delta_M \bar{r}_{G_i} = 0; \qquad \delta_M \bar{\Theta}_i = 0; \\ &\delta_M \bar{v}_{G_i} = 0; \qquad \delta_M \bar{\omega}_i = 0; \\ &\delta_M \bar{a}^{(h)}_{G_i} = 0; \qquad \delta_M \bar{\varepsilon}^{(h)} = 0, \end{aligned} \quad \begin{aligned} &(h=1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots) \\ &(i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{14.126}$$

în baza cărora relaţiile (14.120) vor lua formele:

$$\delta_M \bar{r}_{G_i}(t+dt) = \frac{1}{(k+1)!} \delta_M \bar{a}^{(k)}_{G_i} (dt)^{k+1}; \tag{14.127}$$

$$\delta_M \bar{\Theta}_i (t+dt) = \frac{1}{(k+1)!} \delta_M \bar{\varepsilon}^{(k)}_i (dt)^{k+1}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Diverselor tipuri, menţionate mai sus, de mişcări variate izocrone le vor corespunde, aşa cum se va vedea în continuare, forme specifice ale principiilor variaţionale diferenţiale ale mecanicii analitice.

Relaţia variaţională diferenţială generală a mecanicii analitice. Notînd cu $\overline{\mathcal{F}}_{a_i}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{aG_i}$ componentele torsorului rezultant în centrul de masă G_i al tuturor solicitărilor active, exterioare şi interioare, care acţionează asupra elementului (S_i) al unui sistem mecanic în mişcare — în categoria acestor solicitări considerîndu-se acum şi componentele perturbatoare ale solicitărilor de amortizare exterioare, care, aşa cum s-a mai spus şi cu un alt prilej, joacă rolul de solicitări active de excitaţie —, cu $\overline{\mathcal{F}}_{d_i}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{d_i}$ componentele torsorului rezultant în centrul de masă G_i al tuturor solicitărilor disipative, exterioare şi interioare, la care este supus elementul (S_i) — în categoria lor intrînd deci solicitările datorate rezistenţelor mediului, componentele disipative ale rezistenţelor de amortizare exterioară, cele datorate rezistenţelor de amortizare

interioară, precum şi cele datorate frecărilor, considerate însă cunoscute, din legăturile pasive, exterioare şi interioare, aplicate elementului (S_i) — şi cu

$$\bar{R}_{i_{d_i}} = \bar{R}_{ext_{i_{i_d}}} + \bar{R}_{int_{i_{i_d}}}; \; \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{i_{d_i}}) = \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{ext_{i_{i_d}}}) + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{int_{i_{i_d}}}),$$

componentele torsorului rezultant în polul G_i al tuturor componentelor ideale ale solicitărilor de reacţiune ale legăturilor pasive, exterioare şi interioare, aplicate elementului (S_i), ecuaţiile (14.82) de echilibru dinamic ale lui d'Alembert, scrise pentru elementul (S_i) al sistemului mecanic vor putea fi prezentate acum sub forma

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{F}}_{a_i} + \overline{\mathcal{F}}_{d_i} + \overline{\mathcal{F}}_i^i + \bar{R}_{i_{d_i}} = 0; \\ &\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i + \overline{\mathfrak{M}}_G(\bar{R}_{i_{d_i}}) = 0. \end{aligned} \tag{14.128}$$

Scriind ecuaţiile precedente pentru toate elementele sistemului mecanic, $(i = 1,2,\ldots,n)$ şi considerînd o mişcare variată izocronă a sistemului mecanic concepută în sensul cel mai larg, cu variaţiile izocrone ale parametrilor de poziţie definite, în intervalul de timp dt, prin relaţiile (14.120), se vor înmulţi primele dintre ecuaţiile (14.128), scalar, cu deplasările virtuale izocrone la translaţie $\delta\bar{r}_{G_i}(t + dt)$, iar cea de-a doua serie de ecuaţii (14.128) cu deplasările virtuale izocrone la rotaţie $\delta\bar{\Theta}_i(t + dt)$, însumînd toate aceste relaţii astfel înmulţite şi grupînd convenabil termenii, care vor reprezenta acum lucruri mecanice virtuale, se obţine relaţia

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{F}}_{a_i} \delta\bar{r}_{G_i}(t+dt) + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \delta\bar{\Theta}_i(t+dt)] + \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{F}}_{d_i} \delta\bar{r}_{G_i}(t+dt) + \\ &+ \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \delta\bar{\Theta}_i(t+dt)] + \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{F}}_i^i \delta\bar{r}_{G_i}(t+dt) + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \delta\bar{\Theta}_i(t+dt)] + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{i_{d_i}} \delta\bar{r}_{G_i}(t+dt) + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{i_{d_i}}) \delta\bar{\Theta}_i(t+dt)] = 0. \end{aligned} \tag{14.129}$$

Avînd în vedere condițiile în care au fost definite variațiile izocrone $\delta\bar{r}_{G_i}(t+dt)$ și $\delta\bar{\omega}_i(t+dt)$ — ele sînt compatibile cu legăturile pasive aplicate elementelor sistemului mecanic și aceste legături sînt considerate staționare —, rezultă, ca și în cazul sistemelor de deplasări virtuale compatibile cu legăturile definite în mod obișnuit, valabilitatea condiției

$$\sum_{i=1}^{n} [\bar{R}_{i_{d_i}} \delta\bar{r}_{G_i}(t+dt) + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{R}_{i_{d_i}}) \delta\bar{\Theta}_i(t+dt) = 0, \qquad (14.130)$$

în baza căreia relația (14.129) va lua forma

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{F}}_{a_i} \delta\bar{r}_{G_i}(t+dt) + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \delta\bar{\Theta}_i(t+dt)] + \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{F}}_{d_i} \delta\bar{r}_{G_i}(t+dt) + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \delta\bar{\Theta}_i(t+dt)] + \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{F}}_i^i \delta\bar{r}_{G_i}(t+dt) + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \delta\bar{\Theta}_i(t+dt)] = 0 \qquad (14.131)$$

reprezentînd *relația variațională diferențială generală a mecanicii analitice.*

Încadrarea ultimei relații în categoria relațiilor variaționale ale fizicii poate fi justificată prin aceea că ea poate fi interpretată ca exprimînd condiția că la trecerea de la mișcarea reală la o mișcare variată izocronă generală lucrul mecanic al solicitărilor active, disipative și de inerție corespunzătoare întregului sistem mecanic nu-și schimbă semnul, deci ca exprimînd o condiție de staționaritate.

În cazul sistemelor mecanice constituite numai din elemente asimilabile cu puncte materiale, ($\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} = \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} = \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \equiv 0$), relația (14.131) va lua forma

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{F}}_{a_i} + \overline{\mathcal{F}}_{d_i} + \overline{\mathcal{F}}_i^i] \delta\bar{r}_i(t+dt) = 0 \qquad (14.132)$$

şi este cunoscută în literatura de specialitate sun denumirea de *ecuaţia generală*, sau *ecuaţia simbolică a dinamicii sistemelor mecanice*.

Ecuaţia (14,131) va sta la baza stabilirii diverselor forme ale principiilor variaţionale diferenţiale ale mecanicii analitice, aşa cum se va vedea mai jos.

Forme ale principiilor variaţionale diferenţiale ale mecanicii analitice. În aplicaţiile curente ale mecanicii sînt întîlnite următoarele forme ale principiilor variaţionale diferenţiale ale mecanicii analitice :

— *Principiul d'Alembert-Lagrange.* Acest principiu corespunde unei mişcări variate izocrone de tip Lagrange, pentru care deplasările virtuale $\delta\bar{r}_{G_i}(t + dt)$ şi $\delta\bar{\Theta}_i(t + dt)$ capătă formele (14.122) şi deci ecuaţia (14.131) capătă forma particulară

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{a_i} \delta_L \bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \delta_L \bar{\Theta}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{d_i} \delta_L \bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \delta_L \bar{\Theta}_i] +$$

$$+ [\overline{\mathscr{F}}_i^i \delta_L \bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \delta_L \bar{\Theta}_i] = 0. \qquad (14.133)$$

Observînd că primul grup de termeni din membrul stîng al ultimei relaţii reprezintă lucrul mecanic virtual al solicitărilor active aplicate întregului sistem mecanic

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{a_i} \delta_L \bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \delta_L \bar{\Theta}] = \delta \mathscr{L}_a, \qquad (14.134)$$

că cel de-al doilea grup de tremeni din aceeaşi relaţie reprezintă lucrul mecanic virtual al solicitărilor disipative la care este supus întregul sistem mecanic

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{d_i} \delta_L \bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \delta_L \bar{\Theta}_i] = \delta \mathscr{L}_d, \qquad (14.135)$$

şi că ultimul grup de termeni din mebrul stîng al relaţiei (14.133) reprezintă lucrul mecanic virtual al solicitărilor de inerţie corespunzătoare întregului sistem mecanic

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_i^i \delta_L \bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \delta_L \bar{\Theta}_i] = \delta \mathscr{L}^i, \qquad (14.136)$$

Scanned with CamScanner

se va mai putea scrie relația (14.133) sub forma

$$\boxed{\delta \mathscr{L}_a + \delta \mathscr{L}_d + \delta \mathscr{L}^i = 0,} \tag{14.137}$$

care va exprima *principiul d'Alembert-Lagrange*, cunoscut în literatura de specialitate și sub denumirile de *principiul deplasărilor virtuale* sau *principiul lucrului mecanic virtual.*

Relația (14.137) exprimă următoarea proprietate generală a mișcării unui sistem mecanic :

„În mișcarea variată izocronă de tip Lagrange a unui sistem mecanic, suma lucrurilor mecanice virtuale ale solicitărilor active, ale solicitărilor disipative — considerate cunoscute — și ale solicitărilor de inerție corespunzătoare întregului sistem mecanic, este în permanență egală cu zero".

Întrucît această proprietate este valabilă pentru fiecare moment al intervalului finit de timp în care se studiază mișcarea unui sistem mecanic, ea poate fi interpretată ca exprimînd condiția ca la trecerea de la mișcarea reală la o mișcare variată sincronă de tip Lagrange suma lucrurilor mecanice corespunzătoare solicitărilor active, disipative și de inerție să nu-și schimbe semnul, deci, în ultimă instanță, ca o condiție de staționaritate.

Interpretarea precedentă permite încadrarea și a principiului d'Alembert-Lagrange în categoria principiilor variaționale diferențiale ale mecanicii, deși trebuie menționat faptul că mulți autori de tratate de mecanică, care se bucură de mare prestigiu științific, contestă apartenența acestui principiu la principiile variaționale.

— *Principiul lui Jourdin.* Corespunzînd unei mișcări variate izocrone de tip Jourdin, pentru care variațiile izocrone $\delta \bar{r}_{G_i}(t + dt)$ și $\delta \bar{\Theta}_i (t + dt)$ au formele (14.123), acest principiu va fi exprimat prin o relație care va rezulta din relația generală (14.131) în urma înlocuirilor menționate mai sus, obținîndu-se astfel, după simplificarea prin dt, următoarea relație particulară, corespunzătoare acestui tip de mișcare variată ;

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{a_i} \delta_J \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \delta_J \bar{\omega}_i] + \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{d_i} \delta_J \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \delta_J \bar{\omega}_i] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_i^i \delta_J \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i \delta_J \bar{\omega}_i] = 0. \tag{14.138}$$

Scanned with CamScanner

Relaţia precedentă este susceptibilă de o interpretare fizică concretă în cazul sistemelor mecanice care satisfac următoarele condiţiuni :

— solicitările active aplicate elementelor sistemului mecanic nu depind decît de parametrii de poziţie ai sistemului mecanic şi eventual şi de timp (de ex., cazul unui sistem mecanic căruia îi sînt aplicate numai solicitări conservative şi de excitaţie) ;

— solicitările disipative la care sînt supuse elementele sistemului mecanic nu depind de parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului (de ex., cazul sistemelor mecanice la care solicitările disipative se reduc numai la solicitările de frecare, considerate constante, din cuplele cinematice).

Se înţelege că în aceste condiţii variaţiile de tip Jourdin ale solicitărilor active şi disipative vor fi egale cu zero, adică vor avea loc egalităţile

$$\delta_J \overline{\mathscr{F}}_{a_i} = \delta_J \overline{\mathscr{F}}_{d_i} = 0 ; \quad \delta_J \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} = \delta_J \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} = \delta_L \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} = 0, \qquad (14.139)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

în baza cărora primele două grupuri de termeni din membrul stîng al relaţiei (14.138) vor putea fi scrise sub formele :

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{a_i} \delta_J \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \delta_J \bar{\omega}_i] = \delta_J \left\{ \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{a_i} \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \bar{\omega}_i] \right\} = \delta_J \mathscr{P}_a , \qquad (14.140)$$

respectiv

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{d_i} \delta_J \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \delta_J \bar{\omega}_i] =$$

$$= \delta_J \left\{ \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{d_i} \bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \bar{\omega}_i] \right\} = \delta_J \mathscr{P}_d , \qquad (14.141)$$

unde $\mathscr{P}_a$ şi $\mathscr{P}_d$ vor reprezenta puterile mecanice ale solicitărilor active, respectiv disipative, care acţionează asupra întregului sistem mecanic.

De asemenea, avînd în vedere condițiile (14.122) și ținînd seama și de ipotezele de lucru adoptate ($\overline{\mathscr{K}}_{G_i} = J_i\,\bar{\omega}_i$), rezultă și concluziile

$$\delta_J\,\overline{\mathscr{F}}_i^i = \delta_J\,[-M_i\,\bar{a}_{G_i}] = -M_i\,\delta_J\,\bar{a}_{G_i} = 0\,;$$

$$\delta_J\,\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i = \delta_J\,(-J_i\,\bar{\varepsilon}_i) = -J_i\,\delta_J\,\bar{\varepsilon}_i = 0\,;$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

care permit să se găsească următoarea semnificație fizică și pentru cel de-al treilea grup de termeni din membrul stîng al relației (14.138)

$$\sum_{i=1}^{n}\,[\overline{\mathscr{F}}_i^i\,\delta_L\,\bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i\,\delta_J\,\bar{\omega}_i] =$$

$$= \delta_J\left\{\sum_{i=1}^{n}\,[\overline{\mathscr{F}}_i^i\,\bar{v}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i\,\bar{\omega}_i]\right\} = \delta_J\,\mathscr{P}^i, \tag{14.142}$$

$\mathscr{P}^i$ fiind puterea mecanică a solicitărilor de inerție corespunzătoare sistemului mecanic considerat.

În baza relațiilor (14.140), (41.141) și (14.142) egalitatea (14.138) va lua forma

$$\boxed{\delta_J(\mathscr{P}_a + \mathscr{P}_d + \mathscr{P}^i) = 0} \tag{14.143}$$

și va exprima *principiul variațional al lui Jourdin*; observînd că relația (14.143) exprimă condiția de staționaritate a funcției $\mathscr{P} = \mathscr{P}_a + \mathscr{P}_d + \mathscr{P}^i$, principiul lui Jourdin va putea căpăta următoarea formulare:

„În mișcarea variată de tip Jourdin a unui sistem mecanic, supus la solicitări active și disipative care nu depind de parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului, suma puterilor mecanice ale solicitărilor active, disipative și de inerție corespunzătoare întregului sistem mecanic este staționară".

— *Principiul Gauss-Hertz.* Acest principiu variațional diferențial, numit încă și *principiul celei mai mici constrîngeri* și căruia

se poate da și o interpretare geometrică, datorată lui Hertz și cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de *principiul curburii minime*, corespunde unei mișcări variate izocrone de tip Gauss, pentru care deplasările virtuale $\delta\bar{r}_{G_i}(t+\mathrm{d}t)$ și $\mathrm{d}\bar{\Theta}_i(t+\mathrm{d}t)$ au expresiile (14.125); în consecință, înlocuind aceste expresii în relația generală (14.131), simplificînd prin $\frac{1}{2}(\mathrm{d}t)^2$ și grupînd termenii astfel încît să se poată scoate în factori variațiile $\delta_G\bar{a}_{G_i}$ și $\delta_G\bar{\varepsilon}_i$, această relație va mai putea fi scrisă sub forma

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(\overline{\mathscr{F}}_{a_i}+\overline{\mathscr{F}}_{d_i}+\overline{\mathscr{F}}_i^i)\delta_G\bar{a}_{G_i}+(\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}+\overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}}+\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i)\,\delta_G\bar{\varepsilon}_i\right]=0, \tag{1.144}$$

sau încă, observînd că în condițiile de lucru adoptate ($\overline{\mathscr{K}}_{G_i}=J_i\bar{\omega}_i$; $i=1,2,\ldots,n$) pot fi făcute, pe de o parte, înlocuirile

$$\overline{\mathscr{F}}_{a_i}+\overline{\mathscr{F}}_{d_i}+\overline{\mathscr{F}}_i^i=\overline{\mathscr{F}}_{a_i}+\overline{\mathscr{F}}_{d_i}-M_i\,\bar{a}_{G_i}=-M_i\left[\bar{a}_{G_i}-\frac{\overline{\mathscr{F}}_{a_i}}{M_i}-\frac{\overline{\mathscr{F}}_{d_i}}{M_i}\right]$$

și

$$\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}}+\overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}}+\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i=\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}}+\overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}}-J_i\,\bar{\varepsilon}_i=$$

$$=-J_i\left[\bar{\varepsilon}_i-\frac{\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}}}{J_i}-\frac{\overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}}}{J_i}\right]$$

și că, pe de altă parte, întrucît solicitările active și disipative nu depind de parametrii cinematici de ordinul doi ai elementelor sistemului mecanic, sînt valabile condițiile

$$\delta_G\,\overline{\mathscr{F}}_{a_i}=\delta_G\,\overline{\mathscr{F}}_{d_i}=0\quad\delta_G\,\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}}=\delta_G\,\overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}}=0\,;\ (i=1,2,\ldots,n)$$

Scanned with CamScanner

care permit să se facă înlocuirile

$$\delta_G \bar{a}_{Gi} = \delta_G \left[\bar{a}_{Gi} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{a_i}}{M_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{d_i}}{M_i} \right] ; \delta_G \bar{\varepsilon}_i = \delta_G \left[\bar{\varepsilon}_i - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{a_{Gi}}}{J_i} - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{d_{Gi}}}{J_i} \right],$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

mai rezultă următoarea formă pentru relația (14.144)

$$\sum_{i=1}^{n} \left[M_i \left(\bar{a}_{Gi} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{a_i}}{M_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{d_i}}{M_i} \right) \delta_G \left(\bar{a}_{Gi} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{a_i}}{M_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{d_i}}{M_i} \right) + \right.$$

$$\left. + J_i \left(\bar{\varepsilon}_i - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{a_{Gi}}}{J_i} - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{d_{Gi}}}{J_i} \right) \delta_G \left(\bar{\varepsilon}_i - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{a_{Gi}}}{J_i} - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{d_{Gi}}}{J'} \right) \right] = 0$$

adică

$$\delta_G \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[M_i \left(\bar{a}_{Gi} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{a_i}}{M_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{d_i}}{M_i} \right)^2 + J_i \left(\bar{\varepsilon}_i - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{a_{Gi}}}{J_i} - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{d_{Gi}}}{J_i} \right)^2 \right] \right\} = 0. \tag{14.145}$$

Introducînd notația

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[M_i \left(\bar{a}_{Gi} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{a_i}}{M_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{d_i}}{M_i} \right)^2 + J_i \left(\bar{\varepsilon}_i - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{a_{Gi}}}{J_i} - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{d_{Gi}}}{J_i} \right)^2 \right] \tag{14.146}$$

mărimea Z fiind numită de către Gauss *constrîngerea sistemului mecanic*, relația (14.145) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{\delta_G Z = 0;} \tag{14.147}$$

exprimînd deci condiția de staționaritate a funcției Z la trecerea de la mișcarea reală la o mișcare variată izocronă de tip Gauss.

Scanned with CamScanner

Se va demonstra, în continuare, că relaţia (14.147) exprimă chiar o condiţie de minimum pentru funcţia Z.

Într-adevăr, constrîngerea sistemului mecanic corespunzătoare mişcării variate izocrone de tip Gauss caracterizată prin parametrii cinematici de ordinul doi

$$\bar{a}^*_{G_i} = \bar{a}_{G_i} + \delta_G \bar{a}_{G_i}; \quad \bar{\varepsilon}^*_i = \bar{\varepsilon}_i + \delta_G \bar{\varepsilon}_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

va fi determinată prin relaţia

$$Z^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left\{ M_i \left[\left(\bar{a}_{G_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{a_i}}{M_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{d_i}}{M_i} \right) + \delta_G \bar{a}_{G_i} \right]^2 + \right.$$

$$\left. + J_i \left[\left(\bar{\varepsilon}_i - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{a_{Gi}}}{J_i} - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{d_{Gi}}}{J_i} \right) + \delta_G \bar{\varepsilon}_i \right]^2 \right\},$$

adică

$$Z^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[M_i \left(\bar{a}_{G_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{a_i}}{M_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{d_i}}{M_i} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + J_i \left(\bar{\varepsilon}_i - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{a_{Gi}}}{J_i} - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{d_{Gi}}}{J_i} \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^{n} \left[M_i \left(\bar{a}_{G_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{a_i}}{M_i} - \frac{\overline{\mathscr{F}}_{d_i}}{M_i} \right) \delta_G \bar{a}_{G_i} + \right.$$

$$\left. + J_i \left(\bar{\varepsilon}_i - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{a_{Gi}}}{J_i} - \frac{\overline{\mathfrak{M}}_{d_{Gi}}}{J_i} \right) \delta_G \bar{\varepsilon}_i \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [M_i (\delta_G \bar{a}_{G_i})^2 + J_i (\delta_G \bar{\varepsilon}_i)^2],$$

sau încă, observînd că primul grup de termeni reprezintă constrîngerea corespunzătoare mişcării reale, Z şi că cel de-al doilea grup de

termeni are, în baza relației (14.144), valoarea zero, se mai poate scrie

$$Z^* = Z + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [M_i\ (\delta_G\ \bar{a}_i)^2 + J_i\ (\delta_G\ \bar{\varepsilon}_i)^2]. \qquad (14.148)$$

De aici rezultă condiția

$$\delta Z = Z^* - Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [M_i\ (\delta_G\ \bar{a}_{G_i})^2 + J_i\ (\delta_G\ \bar{\varepsilon}_i)^2] > 0, \qquad (14.149)$$

care justifică caracterul de minimum al lui Z pentru mișcarea reală a sistemului mecanic.

Se poate da deci următoarea interpretare principiului Gauss-Hertz :

„Constrîngerea unui sistem mecanic corespunzătoare mișcării lui reale are valoare minimă față de constrîngerile corespunzătoare oricărei mișcări variate izocrone de tip Gauss".

Principiului lui Gauss i se poate da, așa cum s-a mai spus, și o interpretare geometrică, aparținînd lui Hertz, interpretare care va fi dată mai jos pentru un sistem mecanic îndeplinind următoarele condiții :

— sistemul este alcătuit dintr-un singur element, care execută o mișcare spațială cu axa de rotație Gz' de direcție fixă în spațiu și coincizînd cu una din axele centrale de inerție, ipoteză care permite să se scrie relația

$$\overline{\mathcal{K}}_G = J\bar{\omega}\ ; \qquad (14.150)$$

— solicitările active aplicate rigidului formează un sistem echivalent cu zero, adică sînt valabile condițiile

$$\overline{\mathcal{F}}_a \equiv 0\ ; \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{a_G} \equiv 0\ ; \qquad (14.151)$$

— solicitările disipative la care poate fi supus rigidul sînt toate neglijabile, adică rezultă condițiile

$$\overline{\mathcal{F}}_d \equiv 0\ ; \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{d_G} \equiv 0 \qquad (14.152)$$

Scanned with CamScanner

— momentul rezultant, în centrul de masă G al elementului, al componentelor ideale ale reacţiunilor pasive aplicate rigidului este egal cu zero, adică poate fi scrisă egalitatea

$$\overline{\mathfrak{M}}_G(\bar{R}_{id}) \equiv 0. \tag{14.153}$$

Într-adevăr, în condiţiile menţionate mai sus este valabilă atît legea de conservare a momentului cinetic corespunzător rotaţiei instantanee a rigidului în jurul centrului său de masă

$$\overline{\mathcal{K}}_G = J\bar{\omega} = \overline{\mathcal{K}}_G^{\circ}, \tag{14.154}$$

de unde rezultă concluzia

$$\bar{\omega} = \frac{\overline{\mathcal{K}}_G^{\circ}}{J} = \bar{\omega}^{\circ} = \overrightarrow{\text{const}}, \tag{14.155}$$

cu consecinţa

$$\bar{\varepsilon} \equiv 0, \tag{14.156}$$

cît şi legea de conservare a energiei mecanice a rigidului, exprimată în acest caz prin relaţia

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} M \bar{v}_G^2 + \frac{1}{2} J \bar{\omega}^2 = h = \mathcal{E}^{\circ}, \tag{14.57}$$

care arată că în condiţiile (14.155) şi viteza centrului de masă al rigidului rămîne constantă, adică este valabilă relaţia

$$\bar{v}_G = \bar{v}_G^{\circ}, \tag{14.158}$$

cu consecinţa

$$\dot{v}_G \equiv 0. \tag{14.159}$$

În această situaţie, expresia (14.146) a constrîngerii mişcării reale va lua forma

$$Z = \frac{1}{2} M \bar{a}_G^2. \tag{14.160}$$

Scanned with CamScanner

Exprimînd pătratul acceleraţiei centrului de masă cu ajutorul componentelor ei pe axele intrinseci, rezultă, ţinînd seama şi de condiţia (14.158), următoarea valoare pentru mărimea $\bar{a}_G^2$

$$\bar{a}_G^2 = \dot{v}_G^2 + \frac{v_G^4}{\rho_{cG}^2} = \frac{v_G^{0\,4}}{\rho_{cG}^2} = k_{cG}^2 v_G^{0\,4} \tag{14.161}$$

ρ_{cG} fiind raza de curbură a traiectoriei centrului de masă G al rigidului, iar k_{cG} curbura acestei traiectorii în punctul corespunzător momentului considerat la scrierea expresiei constrîngerii.

Înlocuind valoarea (14.161) a lui $\bar{a}_G^2$ în relaţia (14.160), va rezulta următoarea expresie finală pentru constrîngerea sistemului mecanic considerat :

$$Z = \frac{1}{2} M k_{cG}^2 v_G^{0\,4} \tag{14.162}$$

expresie care scoate în evidenţă că minimumului lui Z pentru mişcarea reală îi va corespunde şi minimumul lui k_{cG}; de aici rezultă şi denumirea de *principiul curburii minime*, sau de *principiul celei mai drepte traiectorii* care i se mai dă formei stabilită de Hertz pentru acest principiu variaţional diferenţial.

— *Principiul Mangeron-Deleanu.* Acest ultim principiu variaţional diferenţial menţionat în prezenta lucrare corespunde unei mişcări variate izocrone de tip Mangeron pentru care deplasările virtuale $\delta\bar{r}_{G_i}(t + \mathrm{d}t)$ şi $\delta\Theta_i(t + \mathrm{d}t)$ au expresiile (14.127); în consecinţă, înlocuirea acestor expresii în relaţia variaţională generală (14.131) va conduce, după simplificarea prin factorul comun $\left(\frac{1}{(k+1)!}\right)$ $(\mathrm{d}t)^{k+1}$), la egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} [(\overline{\mathscr{F}}_{a_i} + \overline{\mathscr{F}}_{d_i} + \overline{\mathscr{F}}_i^i)\, \delta_M \bar{a}_{G_i}^{(k)} + (\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i)\, \delta_M \bar{\varepsilon}^{(k)}] = 0. \tag{14.163}$$

Scanned with CamScanner

Observînd apoi că atît solicitările active, cît și cele disipative nu depind, pentru problemele obișnuite ale tehnicii, de parametrii cinematici de ordin superior lui doi, vor putea fi scrise condițiile

$$\delta_M (\overline{\mathscr{F}}_{a_i} + \overline{\mathscr{F}}_{d_i} + \overline{\mathscr{F}}^{i}_{i}) = 0\,; \qquad \delta_M (\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}^{i}_{G_i}) = 0, \tag{14.164}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

în baza cărora relația (14.163) va lua forma

$$\delta_M \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(\overline{\mathscr{F}}_{a_i} + \overline{\mathscr{F}}_{d_i} + \overline{\mathscr{F}}^{i}_{i}) \bar{a}^{(k)}_{G_i} + (\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}^{i}_{G_i}) \bar{\varepsilon}^{(k)}_{i}] \right\} = 0 \tag{14.165}$$

Introducînd notația

$$\mathscr{P}^{(k)} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} [(\overline{\mathscr{F}}_{a_i} + \overline{\mathscr{F}}_{d_i} + \overline{\mathscr{F}}^{i}_{i}) \bar{a}^{(k)}_{G_i} + (\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}^{i}_{G_i}) \bar{\varepsilon}^{(k)}_{i}] \right\} \tag{14.166}$$

funcția $\mathscr{P}^{(k)}$ fiind numită, în continuare, *putere mecanică a accelerațiilor de ordinul k*, relația (14.165) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{\delta_M \mathscr{P}^{(k)} = 0} \tag{14.167}$$

ultima relație exprimînd condiția de staționaritate a funcției $\mathscr{P}^{(k)}$ la trecerea de la mișcarea reală a sistemului mecanic la o mișcare variată de tip Mangeron.

Se poate da deci următoarea interpretare relației (14.167) care exprimă principiul Mangeron-Deleanu :

„La trecerea unui sistem mecanic de la mișcarea reală la o mișcare variată izocronă de tip Mangeron de un ordin k, puterea mecanică a accelerațiilor de ordinul k este staționară".

Scanned with CamScanner

b) *Principiile variaționale integrale ale mecanicii analitice.*

Variații neizocrone (asincrone) ale parametrilor lagrangeieni de poziție. Se va considera din nou mișcarea reală a unui sistem mecanic olonom, definită într-un interval de timp $[t_0, t_1]$ prin ecuațiile (14.98), fiecărei dintre aceste ecuații corespunzîndu-i și acum o curbă (Γ_{q_j}) în reprezentarea grafică $q_j = q_j(t)$, iar momentului $t \in [t_0, t_1]$ corespunzîndu-i pe această curbă punctul $Q_{j(t)}$, (fig. 14.2).

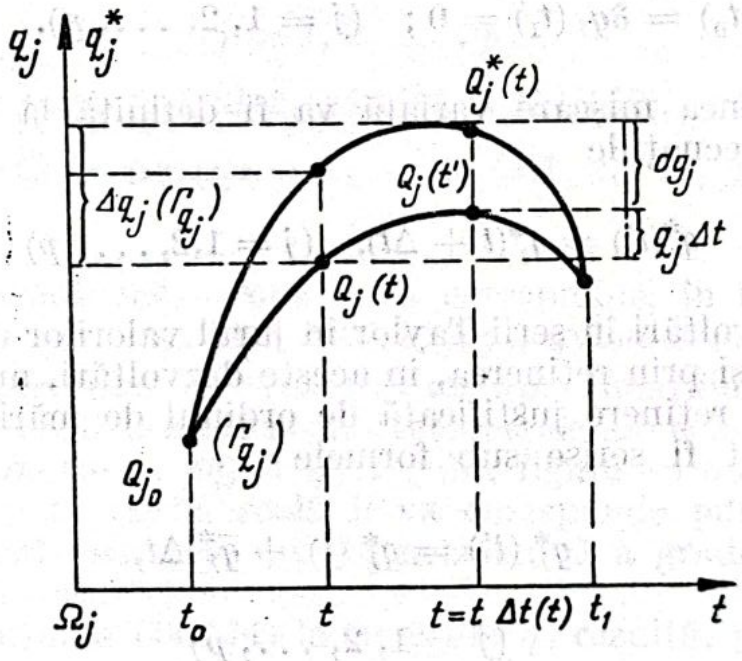


Fig. 14.2

În afara mișcării variate izocrone definită în cadrul subpunctului 3.1.1.1., se mai poate concepe și o *mișcare variată neizocronă* (*asincronă*), care s-ar efectua în următoarele condiții

— este, de asemenea, compatibilă cu legăturile pasive, exterioare și interioare, aplicate elementelor sistemului mecanic;

— se realizează atît prin variații izocrone ale parametrilor lagrangeieni de poziție și prin derivatele lor în raport cu timpul, cît și prin asocierea unei legi temporale pentru variația timpului, în sensul că momentului t din mișcarea reală îi va corespunde, în mișcarea variată neizocronă, un moment t', dat de relația

$$t' = t + \Delta t(t) \qquad (14\,168)$$

unde Δt este o funcţie continuă de timp şi cel puţin odată derivabilă în raport cu timpul, satisfăcînd în plus condiţiile

$$\Delta t\,(t_0) = \Delta t(t_1) = 0\,; \tag{14.169}$$

— variaţiile izocrone ale parametrilor lagrangieni corespunzătoare momentelor extreme ale intervalului finit $[t_0, t_1]$ de timp în care se studiază mişcarea sistemului mecanic considerat satisfac condiţiile

$$\delta q_j(t_0) = \delta q_j\,(t_1) = 0\,; \quad (j = 1, 2, \ldots, p). \tag{14.170}$$

O asemenea mişcare variată va fi definită la momentul $t' = t + \Delta t$ prin ecuaţiile

$$q_j^*(t') = q_j^*(t + \Delta t), \quad (j = 1,2, \ldots, p)$$

care, prin dezvoltări în serii Taylor în jurul valorilor corespunzătoare momentului t şi prin reţinerea, în aceste dezvoltări, numai a primilor doi termeni — reţinere justificată de ordinul de mărime al variaţiei Δt —, mai pot fi scrise sub formele

$$q_j^*\,(t') = q_j^*\,(t) + \bar{q}_j^*\,\Delta t, \tag{14.171}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

cu

$$q_j^*\,(t) = q_j(t) + \delta q_j, \tag{14.172}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

unde δq_j sînt variaţiile izocrone ale parametrilor lagrangeieni la momentul t şi cu

$$\dot{q}_j^* = \dot{q}_j + \delta\dot{q}_j \tag{14.173}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

unde $\delta\dot{q}_j$ sînt variaţiile izocrone ale vitezelor generalizate.

Variațiile neizocrone ale parametrilor lagrangeieni de poziție vor fi definite prin relațiile

$$\Delta q_j = q_j^*(t') - q_i(t), \quad (j = 1,2, \ldots, p),$$

expresiile lor finale, obținute prin considerarea și a relațiilor (14.172) și (14.173) având deci, în cadrul aproximațiilor permise de ordinul de mărime al variațiilor Δt și $\delta\dot{q}_j$, formele:

$$\Delta q_j = \delta q_j + \dot{q}_j \Delta t + \delta\dot{q}_j \Delta t \approx \delta q_j + \dot{q}_j \Delta t \qquad (14.174)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

și satisfăcînd, în baza relațiilor (14.170) și (14.169), condițiile

$$\Delta q_j(t_0) = \Delta q_j(t_1) = 0; \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \qquad (14.175)$$

Mișcării variate neizocrone îi va corespunde, în reprezentarea grafică $q_j^* = q_j^*(t')$ din fig. 14.2, curba $(\Gamma_{q_j}^*)$, avînd comune punctele Q_{j0} și Q_{j1}, figura scoțînd în evidență, cu aproximațiile obișnuite în analiza matematică, și semnificațiile geometrice ale celor doi termeni ai variațiilor neizocrone: δq_j și $\dot{q}_j \Delta t$; din figură se mai observă că punctului $Q_{j(t)}$ de pe curba reală îi va corespunde punctul $Q_{j(t')}^*$ pe curba reprezentînd mișcarea variată neizocronă a gradului de libertate j.

Aplicînd formula (14.174) la funcțiile $\dot{q}_j$ rezultă, pe de o parte, relațiile

$$\Delta\dot{q}_j = \delta\dot{q}_j + \ddot{q}_j \Delta t, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \qquad (14.176)$$

Pe de altă parte, prin derivarea în raport cu timpul a relațiilor (14.174), se obțin egalitățile

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \delta q_j + \ddot{q}_j \Delta t + \dot{q}_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta t, \quad (j = 1,2, \ldots, p),$$

sau încă, ținînd seama și de relațiile (14.176), mai rezultă

$$\frac{d}{dt} \Delta q_j = \left[\frac{d}{dt} \delta q_j - \delta\dot{q}_j\right] + \Delta\dot{q}_j + \dot{q}_j \frac{d}{dt} \Delta t, \quad (j = 1, 2, \ldots, p) \qquad (14.177)$$

Este suficient acum să se observe că în baza relației (14.104) termenul din paranteza patrată din membrul drept al egalităților (14.177) are valoarea zero, pentru ca să se obțină astfel următoarea relație ilustrînd modul de aplicare succesivă a operatorilor d și Δ :

$$\frac{d}{dt}\Delta q_j = \Delta \dot{q}_j + \dot{q}_j \frac{d}{dt}\Delta t, \quad (j = 1, 2, \ldots, p). \tag{14.178}$$

După cum se observă, operatorii d și Δ nu mai prezintă proprietatea de comutativitate la aplicarea succesivă a lor la funcțiile $q_j(t)$.

Pentru $\Delta t \equiv 0$, variațiile neizocrone devin, așa cum rezultă și din relațiile (14.174), variații izocrone ($\Delta \equiv \delta$) și egalitățile (14.178) se reduc și ele la formulele (14.104).

Considerînd și acuma, pentru simplificarea prezentării problemelor, numai cazul sistemelor mecanice cu elementele executînd rotații în jurul axelor $G_i z_i'$ de direcții fixe în spațiu și coincizînd cu axe centrale de inerție ale elementelor — caz care așa cum s-a mai spus și cu alt prilej, prezintă, de altfel, și cel mai mare interes pentru aplicațiile tehnice — se va observa că variațiilor neizocrone ale parametrilor lagrangeieni le vor corespunde variații neizocrone ale parametrilor de poziție ai elementelor sistemului — cu unghiurile lui Euler reduse, în ipoteza de lucru adoptată, numai la unghiul de rotație proprie — variații avînd expresiile

$$\begin{aligned}
\Delta x_{G_i} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial x_{G_i}}{\partial q_k}\Delta q_k + \frac{\partial x_{G_i}}{\partial t}\Delta t;\\
\Delta y_{G_i} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial y_{G_i}}{\partial q_k}\Delta q_k + \frac{\partial y_{G_i}}{\partial t}\Delta t;\\
\Delta z_{G_i} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial z_{G_i}}{\partial q_k}\Delta q_k + \frac{\partial z_{G_i}}{\partial t}\Delta t;\\
\Delta \varphi_i &= \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\Delta q_k + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\Delta t,
\end{aligned} \tag{14.179}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

și deci la un *sistem de deplasări elementare neizocrone la translație și rotație*, definite prin relațiile

$$\Delta\bar{r}_{G_i} = \Delta x_{G_i}\,\bar{i} + \Delta y_{G_i}\,\bar{j} + \Delta z_{G_i}\,\bar{k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\,\Delta q_k + \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial t}\,\Delta t\,;$$

$$\Delta\bar{\Theta}_i = \Delta\varphi_i\,\bar{k}_i' = \sum_{k=1}^{p} \frac{\delta\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\,\Delta q_k + \frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\,\Delta t\,; \tag{14.180}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

cu semnificațiile cunoscute pentru mărimile $\frac{\delta\bar{\Theta}_i}{\delta q_k}$ și $\frac{\delta\bar{\Theta}_i}{\partial t}$.

În baza relațiilor (14.169) și (14.175), aceste deplasări elementare neizocrone satisfac și ele condițiile

$$\Delta\bar{r}_{G_i}(t_0) = \Delta\bar{r}_{G_i}(t_1) = 0\,; \quad \Delta\bar{\Theta}_i(t_0) = \Delta\bar{\Theta}_i(t_1) = 0. \tag{14.181}$$

Înlocuind, în relațiile (14.180), variațiile neizocrone ale parametrilor lagrangeieni cu expresiile (14.174), se obțin egalitățile

$$\Delta\bar{r}_{G_i} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_f}\,\partial q_k + \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\,\dot{q}_k + \frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial t}\right]\Delta t\,;$$

$$\Delta\bar{\Theta}_i = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\,\partial q_k + \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q}\,\dot{q}_k + \frac{\partial\bar{\Theta}_i}{ht}\right]\Delta t,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

sau încă, observînd că primul grup de termeni din membrul drept al fiecăruia din ultimele două relații reprezintă deplasările elementare izocrone și că parantezele pătrate din relațiile menționate reprezintă

parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic considerat, pot fi scrise următoarele relaţii între deplasările elementare neizocrone şi cele izocrone :

$$\Delta\bar{r}_{G_i} = \delta\bar{r}_{G_i} + \bar{v}_{G_i}\,\Delta t\,; \quad \Delta\bar{\Theta}_i = \delta\bar{\Theta}_i + \bar{\omega}_i\,\Delta t \qquad (14.182)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pentru $\Delta t \equiv 0$, variaţiile elementare neizocrone vor deveni, evident, deplasări izocrone ($\Delta \equiv \delta$).

Din modul de definire a celor două sisteme de deplasări elementare, izocrone şi neizocrone, se poate trage concluzia că primele corespund sistemelor de deplasări virtuale compatibile cu legăturile, iar ultimele sistemelor de deplasări posibile compatibile cu legăturile.

Prin derivarea în raport cu timpul a relaţiilor (14.180) şi considerarea şi a relaţiilor (14.178), se obţin egalităţile

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{r}_{G_i} = \left[\sum_{k=1}^{p}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\right)\Delta q_k + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\Delta\dot{q}_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial t}\right)\Delta t\right] +$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial t}\right]\frac{d}{dt}\Delta t\,;$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\bar{\Theta}_i = \left[\sum_{k=1}^{p}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right)\Delta q_k + \sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\Delta\dot{q}_k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\right)\Delta t\right] +$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{p}\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial t}\right]\frac{d}{dt}\Delta t.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14.183)$$

Dacă se ţine seama, pe de o parte, de cele două serii de relaţii Lagrange, (12.45) şi (12.46) şi se observă, pe de altă parte, că pot fi

scrise egalitățile

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial t}\right) = \frac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial t}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t},$$

$$(i = 1, 2, \text{i} \ldots, n) \tag{14.184}$$

care pot fi verificate cu ușurință prin compararea dezvoltărilor efectuate în ambii membri ai egalităților, atunci relațiile (14.183) mai pot fi scrise sub următoarele forme

$$\frac{d}{dt}\Delta \bar{r}_{G_i} = \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial q_k}\Delta q_k + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial \dot{q}_k}\Delta \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial t}\Delta t\right] +$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial t}\right]\frac{d}{dt}\Delta t;$$

$$\frac{d}{dt}\Delta \bar{\Theta}_i = \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial q_k}\Delta q_k + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k}\Delta \dot{q}_k + \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t}\Delta t\right] +$$

$$+ \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial t}\right]\frac{d}{dt}\Delta t.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.185}$$

Este suficient să se observe acum că primele paranteze drepte din membrul drept al relațiilor precedente reprezintă variațiile neizocrone $\Delta \bar{v}_{G_i}$, respectiv $\Delta \bar{\omega}_i$, ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic și că parantezele următoare ale acelorași relații reprezintă chiar parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor sistemului, $\bar{v}_{G_i} = \bar{v}_{G_i}(q; \dot{q}; t)$ și $\bar{\omega}_i = \bar{\omega}_i(q; \dot{q}; t)$, pentru a se obține astfel următoarele expresii finale pentru mărimile $\frac{d}{dt}\Delta \bar{r}_{G_i}$ și $\frac{d}{dt}\Delta \bar{\Theta}_i$:

$$\frac{d}{dt}\Delta \bar{r}_{G_i} = \Delta \bar{v}_{G_i} + \bar{v}_{G_i}\frac{d}{dt}\Delta t; \quad \frac{d}{dt}\Delta \bar{\Theta}_i = \Delta \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_i \frac{d}{dt}\Delta t.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.186}$$

Scanned with CamScanner

Pentru $\Delta t \equiv 0$, $(\Delta \equiv \delta)$, relațiile precedente iau formele

$$\frac{d}{dt}\delta\bar{r}_{G_i} = \delta\bar{v}_{G_i}; \qquad \frac{d}{dt}\delta\bar{\Theta}_i = \delta\bar{\omega}_i,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.187}$$

corespunzătoare mișcărilor variate izocrone, evidențiind valabilitatea în acest caz a proprietății de comutativitate a operatorilor d și δ la aplicarea lor succeivă la parametrii de poziție ai elementelor sistemului mecanic.

În încheierea prezentării variațiilor neizocrone, definite prin operatorul Δ, ale parametrilor lagrangeieni de poziție, se va mai arăta că operatorii d și Δ sînt permutabili între ei atunci cînd sînt aplicați timpului.

Într-adevăr, la o variație dt a timpului t din mișcarea reală, va corespunde, în mișcarea variată neizocronă, un moment t'^*, care va putea fi obținut în două moduri:

— prin aplicarea operatorului d în mișcarea variată neizocronă corespunzătoare momentului $t' = t + \Delta t$, adică

$$t'^* = t + \mathrm{d}t' = t + \Delta t + \mathrm{d}(t + \Delta t) = t + \Delta t + \mathrm{d}t + \mathrm{d}(\Delta t);$$

— prin aplicarea operatorului Δ momentului $t + \mathrm{d}t$ din mișcarea reală, adică

$$t'^* = t + \mathrm{d}t + \Delta(t + \mathrm{d}t) = t + \mathrm{d}t + \Delta t + \Delta(\mathrm{d}t).$$

Compararea acestor două expresii ale timpului t'^* conduce la concluzia

$$d(\Delta t) = \Delta(dt), \tag{14.188}$$

care confirmă afirmația făcută privind permutabilitatea operatorilor d și Δ, atunci cînd sînt aplicați timpului t.

Relația variațională integrală generală a mecanicii analitice. Revenind la ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert scrise sub forma (14.128), înmulțind, sca-

Scanned with CamScanner

iar, prima dintre aceste ecuații cu deplasarea elementară neizocronă la translație $\Delta\bar{r}_{G_i}$ și pe cea de-a doua ecuație cu deplasarea elementară neizocronă la rotație $\Delta\bar{\Theta}_i$, însumînd apoi toate aceste relații astfel înmulțite — ai căror termeni vor reprezenta acum lucruri mecanice elementare — scrise pentru toate elementele sistemului mecanic și integrînd, în fine, relația astfel obținută, multiplicată în prealabil cu dt, în intervalul de timp $[t_0, t_1]$, se obține egalitatea:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(\bar{\mathscr{F}}_{a_i}+\bar{\mathscr{F}}_{d_i})\,\Delta\bar{r}_{G_i}+(\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}}+\overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}})\,\Delta\bar{\Theta}_i\right]\right\}dt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{F}}_i^i\,\Delta\bar{r}_{G_i}+\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i\Delta\bar{\Theta}_i\right]\right\}dt+ \qquad (14.189)$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{R}_{id_i}\Delta\bar{r}_{G_i}+\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}}(\bar{R}_{id_i})\,\Delta\bar{\Theta}_i\right]\right\}dt=0$$

Ținînd seama de expresiile componentelor torsorilor în centrele de masă G_i ai solicitărilor de inerție ale elementelor sistemului mecanic considerat ($\bar{\mathscr{F}}_i^i=-\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i$; $\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i=-\dot{\bar{\mathscr{K}}}_{G_i}$), expresia de sub semnul celei de-a doua integrale din membrul stîng al relației (14.189) va putea fi scrisă sub forma

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{F}}_i^i\,\Delta\bar{r}_{G_i}+\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i\Delta\bar{\Theta}_i\right]=-\sum_{i=1}^{n}\left[\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i\,\Delta\bar{r}_{G_i}+\dot{\bar{\mathscr{K}}}_{G_i}\Delta\bar{\Theta}_i\right]=$$

$$=-\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{H}}_i\Delta\bar{r}_{G_i}+\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\Delta\bar{\Theta}_i\right]\right\}+\sum_{i=2}^{n}\left[\bar{\mathscr{H}}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\bar{r}_{G_i}+\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta\bar{\Theta}_i\right],$$

sau încă, folosind relațiile (14.186), mai rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{F}}_i^i\Delta\bar{r}_{G_i}+\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i\Delta\bar{\Theta}_i\right]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{H}}_i\Delta\bar{r}_{G_i}+\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\Delta\bar{\Theta}_i\right]\right\}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{H}}_i\Delta\bar{r}_{G_i}+\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\Delta\bar{\omega}_i\right]+\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{H}}_i\bar{v}_{G_i}+\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\bar{\omega}_i\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t. \qquad (14.190)$$

Scanned with CamScanner

Observînd, pe de o parte, că în baza relației (13.77) ultimul grup de termeni din relația (14.189) are semnificația

$$\sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{H}}_i \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathscr{K}}_{G_i} \bar{\omega}] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta t = 2\mathscr{E} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta t \qquad (14.191)$$

și că, în condițiile precizate pentru rotațiile elementelor ($\bar{\mathscr{K}}_{G_i} = J_i \bar{\omega}_i$), cel de-al doilea grup de termeni din membrul drept al relației (14.190) reprezintă variația neizocronă a energiei cinetice

$$\sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{H}}_i \Delta \bar{v}_{G_i} + \bar{\mathscr{K}}_{G_i} \Delta \bar{\omega}_i] = \sum_{i=1}^{n} [M_i \bar{v}_{G_i} \Delta \bar{v}_{G_i} + J_i \bar{\omega}_i \Delta \bar{\omega}_i] =$$

$$= \Delta \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [M_i \bar{v}_{G_i}^2 + J_i \bar{\omega}_i^2] \right\} = \Delta \mathscr{E}, \qquad (14.192)$$

cu operatorul Δ avînd semnificația matematică de diferențială totală, cea de-a doua integrală din membrul sting al relației (14.189) va putea fi scrisă sub forma

$$\int_{t_0}^{t_2} \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\bar{\mathscr{F}}_i^e \Delta \bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{M}}_{G_i}^e \Delta \bar{\Theta}_i] \right\} dt = -$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} d \left\{ \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{H}}_i \Delta \bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{K}}_{G_i} \Delta \bar{\Theta}_i] \right\} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Delta \mathscr{E} \, dt + \int_{t_0}^{t_1} 2\mathscr{E} \frac{d}{dt} \Delta t \, dt,$$

sau încă, observînd că în baza condițiilor (14.181) rezultă consecința

$$\int_{t_0}^{t_1} d \left\{ \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{H}}_i \Delta \bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{K}}_{G_i} \Delta \bar{\Theta}_i] \right\} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathscr{H}}_i \Delta \bar{r}_{G_i} + \bar{\mathscr{K}}_{G_i} \Delta \bar{\Theta}_i] \Bigg|_{\substack{\Delta \bar{r}_{G_i}(t_0) = 0 \\ \Delta \bar{\Theta}_i(t_0) = 0}}^{\substack{\Delta \bar{r}_{G}(t_1) = 0 \\ \Delta \bar{\Theta}_i(t_1) = 0}} = 0$$

Scanned with CamScanner

se mai poate scrie

$$\int_{t_0}^{1}\left\{\sum_{i=0}^{n}\left[\overline{\mathscr{F}}_i^i\,\Delta\bar{r}_{G_i}+\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i\,\Delta\,\overline{\Theta}_i\right]\right\}dt=\int_{t_0}^{t_1}\Delta\mathscr{E}\,dt+2\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{E}\,\frac{d}{dt}\,\Delta t\,dt \tag{14.193}$$

În legătură cu cel de-al treilea termen din membrul stîng al relației (14.189), se poate face precizarea că, în afara cazului banal, al unei mișcări variate izocrone ($\Delta t\equiv 0$) a unui sistem mecanic scleronom, cînd are valoarea zero, el mai poate lua valoarea zero și în următoarele două situații :

— în cazul sistemelor mecanice olonome reonome, dar numai pentru mișcări variate izocrone ($\Delta t\equiv 0$; $\Delta\equiv\delta$), cînd deplasările elementare neizocrone devin deplasări izocrone, deci deplasări virtuale compatibile cu legăturile — pentru care, așa cum s-a arătat în § 13, lucrul mecanic virtual al componentelor ideale ale reacțiunilor legăturilor pasive aplicate elementelor sistemului mecanic are valoarea zero ;

— în cazul sistemelor olonome scleronome și pentru mișcări variate neizocrone ($\Delta t\equiv 0$), egalitatea cu zero a lucrului mecanic al componentelor ideale ale reacțiunilor legăturilor pasive aplicate sistemului mecanic fiind justificată acum de compatibilitatea cu aceste legături a deplasărilor elementare neizocrone, compatibilitate admisă chiar la definirea lor.

În consecință, luînd în considerație, în continuare, numai aceste din urmă două situații, se va putea accepta ca fiind satisfăcută condiția

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{R}_{i_{d_i}}\,\Delta\bar{r}_{G_i}+\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}\left(R_{i_{d_i}}\right)\Delta\overline{\Theta}_i\right]\right\}dt\equiv 0 \tag{14.194}$$

În baza relațiilor (14.193) și (14.194) egalitatea (14.189) va lua forma

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta\mathscr{E}+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\overline{\mathscr{F}}_{a_i}+\overline{\mathscr{F}}_{d_i}\right)\Delta\bar{r}_{G_i}+\left(\overline{\mathfrak{M}}_{aG_i}+\overline{\mathfrak{M}}_{dG_i}\right)\Delta\,\overline{\Theta}_i\right]\right\}dt+$$

$$+\,2\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{E}\,\frac{d}{dt}\left(\Delta t\right)dt=0 \tag{14.195}$$

şi va reprezenta *relaţia variaţională integrală generală a mecanicii analitice*, denumire justificată de faptul că din ea se vor deduce, aşa cum se va arăta în continuare, diversele forme ale principiilor variaţionale integrale ale mecanicii analitice.

Celei de-a doua integrale din relaţia (14.195) i se poate da şi o altă formă, observîndu-se că în baza relaţiei evidente

$$\frac{d}{dt}(\mathscr{E}\Delta t) = \dot{\mathscr{E}}\,\Delta t + \mathscr{E}\frac{d}{dt}\Delta t,$$

se poate face înlocuirea

$$\int_{t_1}^{t_1} \mathscr{E}\frac{d}{dt}(\Delta t)\,dt = \int_{t_1}^{t_1}\frac{d}{dt}(\mathscr{E}\Delta t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\dot{\mathscr{E}}\,\Delta t\,dt,$$

cu primul termen avînd, în baza condiţiilor (14.169), valoarea zero

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}(\mathscr{E}\Delta t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} d\,(\mathscr{E}\,\Delta t) = \mathscr{E}\,\Delta t\Big|_{\Delta t(t_0)=0}^{\Delta t(t_1)=0} = 0,$$

rezultînd astfel egalitatea

$$\int_{t_0}^{t_1}\mathscr{E}\frac{d}{dt}(\Delta t)\,dt = -\int_{t_0}^{t_1}\dot{\mathscr{E}}\,\Delta t\,dt\,, \qquad (14.196)$$

în baza căreia relaţia (14.195) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta\mathscr{E} + \sum_{i=1}^{n}\left[(\overline{\mathscr{F}}_{a_i} + \overline{\mathscr{F}}_{d_i})\,\Delta\bar{r}_{G_i} + (\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}})\,\Delta\overline{\Theta}_i\right]\right\}dt - 2\int_{t_0}^{t_1}\dot{\mathscr{E}}\Delta t\,dt = 0. \qquad (14.197)$$

În cazul sistemelor mecanice constituite numai din elemente asimilabile cu puncte materiale, ($\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} = \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \equiv 0$), pentru care forțele disipative pot fi complet neglijate ($\overline{\mathcal{F}}_{d_i} \equiv 0$), relația (14.195) ia forma simplificată

$$\boxed{\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \Delta \mathcal{E} + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{F}}_{a_i} \Delta \bar{r}_i \right\} dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{E} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\Delta t)\, dt = 0} \qquad (14.198)$$

fiind cunoscută în literatura de specialitate sub numele de *relația variațională integrală a lui Hölder.*

Forme ale principiilor variaționale integrale ale mecanicii analitice. Din categoria principiilor variaționale integrale ale mecanicii analitice vor fi prezentate următoarele două principii :

— *Principiul Hamilton-Ostrogradski.* Acest principiu se referă la sisteme mecanice olonome reonome, ale căror mișcări reale sînt comparate cu mișcări variate izocrone, fiind deci valabile condițiile

$$\Delta t \equiv 0\,; \quad \Delta \bar{r}_{G_i} = \delta \bar{r}_{G_i}\,; \quad \Delta \overline{\Theta}_i = \delta \overline{\Theta}_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14.199)$$

pentru care relația generală (14.195) ia forma particulară

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \mathcal{E} + \sum_{i=1}^{n} \left[(\overline{\mathcal{F}}_{a_i} + \overline{\mathcal{F}}_{d_i}) \delta \bar{r}_{G_i} + (\overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}}) \delta \overline{\Theta}_i \right] \right\} dt = 0 \qquad (14.200)$$

În cazul sistemelor mecanice conservative, adică, atunci cînd toate solicitările disipative sînt neglijabile, fiind deci valabile condițiile

$$\overline{\mathcal{F}}_{d_i} \equiv 0\,; \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \equiv 0\,; \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (134.201)$$

iar solicitările active derivă dintr-o funcție generală de forțe, ceea ce înseamnă că se poate scrie egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} [\bar{\mathcal{F}}_{a_i} \delta \bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \delta \bar{\Theta}_i] = \delta U = -\delta V, \tag{14.202}$$

relația (14.200) ia forma

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta(\mathcal{E} - V)\, dt = 0, \tag{14.203}$$

sau încă, introducînd funcția

$$\mathfrak{L} = \mathcal{E} - V = \mathcal{E} + U = \mathcal{E}(q; \dot{q}; t) - V(q; t) = \mathfrak{L}(q; \dot{q}; t) \tag{14.204}$$

purtînd numele de *funcția lui Lagrange*, sau încă cel de *potențial cinetic*, se mai poate scrie

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \mathfrak{L}\, dt = 0. \tag{14.205}$$

Cum variațiile definite prin operatorul δ sînt izocrone și deci acest operator nu se aplică timpului, relația (14.205) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt = 0,}, \tag{14.206}$$

care reprezintă condiția de staționaritate, în interval finit de timp $[t_0, t_1]$, a funcționalei

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt, \tag{14.207}$$

ultima purtînd numele de *acțiunea hamiltoniană* a sistemului mecanic considerat.

Relaţia (14.206) exprimă *principiul Hamilton-Ostrogradski*, căruia i se poate da următoarea formulare :

„Mişcarea reală a unui sistem mecanic olonom reonom se caracterizează prin aceea că face staţionară acţiunea hamiltoniană a sistemului la trecerea la o mişcare variată izocronă".

— *Principiul Euler-Lagrange.* Acest principiu, formulat pentru prima oară — dar într-o formă neclară — de către Maupertuis —, dar care a fost fundamentat riguros de către Euler şi formulat sub forma folosită în prezent de către Lagrange, se referă la sisteme mecanice olonome scleronome, pentru care se pot neglija toate solicitările disipative, adică se pot accepta condiţiile

$$\overline{\mathscr{F}}_{d_i} \equiv 0\,; \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}} \equiv 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.208}$$

şi pentru care solicitările active derivă din funcţii de forţe, adică poate fi scrisă relaţia

$$\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{a_i} \Delta \bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \Delta \bar{\Theta}_i] = \Delta U = -\Delta V, \tag{14.209}$$

comparîndu-se mişcarea reală a unui asemenea sistem, efectuată cu satisfacerea, în condiţiile precizate mai sus, a integralei energiei

$$\mathscr{E} + V = h, \tag{14.210}$$

cu o mişcare variată neizocronă *izoenergetică*, adică pentru care constanta energiei din integrala energiei — ultima fiind valabilă şi în cazul mişcării variate menţionate — are aceeaşi valoare ca şi în mişcarea reală.

Prin aplicarea operatorului Δ relaţiei (14.210) rezultă condiţia

$$\Delta \mathscr{E} = -\Delta V = \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathscr{F}}_{a_i} \Delta \bar{r}_{G_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \Delta \bar{\Theta}_i], \tag{14.211}$$

în baza căreia relaţia generală (14.195) va lua, ţinînd seama şi de condiţiile (14.208), forma particulară

$$2 \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta \mathscr{E} + \mathscr{E} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Delta t \right] \mathrm{d}t = 0, \tag{14.212}$$

Scanned with CamScanner

sau încă, utilizînd și relația (14.188), se mai poate scrie

$$2\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta\mathscr{E}+\mathscr{E}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t\right]\mathrm{d}t=2\int_{t_0}^{t_1}[\Delta\mathscr{E}\mathrm{d}t+\mathscr{E}\mathrm{d}(\Delta t)]=2\int_{t_0}^{t_1}[\Delta\mathscr{E}\mathrm{d}t+\mathscr{E}\Delta(\mathrm{d}t)]=0,$$

adică

$$\int_{t_0}^{t_1}\Delta(2\mathscr{E}\,\mathrm{d}t)=0. \tag{14.213}$$

În calculul variațional se demonstrează că în condițiile limitelor t_0 și t_1 constante, operatorul Δ este permutabil cu integrala, adică relația (14.213) mai poate fi scrisă sub forma

$$\boxed{\Delta\int_{t_0}^{t_1}2\mathscr{E}\,\mathrm{d}t=\Delta\mathscr{A}=0}, \tag{14.214}$$

exprimînd condiția de staționaritate a funcționalei

$$\mathscr{A}=\int_{t_0}^{t_1}2\mathscr{E}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n}[\bar{\mathscr{H}}_i\bar{v}_{G_i}+\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\bar{\omega}_i]\right\}\mathrm{d}t=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}[\bar{\mathscr{H}}_i\mathrm{d}\bar{r}_{G_i}+\bar{\mathscr{K}}_{G_i}\mathrm{d}\bar{\Theta}_i], \tag{14.215}$$

ultima purtînd numele de *acțiunea lagrangiană* a sistemului mecanic scleronom considerat.

Relația (14.214) exprimă *principiul lui Euler — Lagrange*, căruia i se poate da următoarea formulare:

„Mișcarea reală a unui sistem mecanic olonom scleronom se caracterizează prin aceea că face staționară acțiunea lagrangeiană a sistemului la trecerea la o mișcare variată neizocronă izoenergetică".

2°. Forme ale ecuațiilor mecanicii analitice

În aplicațiile tehnice sînt folosite, obișnuit, următoarele forme principale ale ecuațiilor mecanicii analitice a sistemelor olonome:

a) *Ecuațiile lui Lagrange de specia a doua.* Aceste ecuații pot fi obținute plecîndu-se de la oricare din formele principiilor variațio-

nale ale mecanicii analitice, prezentate în cadrul subpunctului 2.3.1 al acestui paragraf.

Din motive de economie în expunere se preferă obișnuit stabilirea lor plecîndu-se de la principiul variațional diferențial d'Alembert-Lagrange, adică de la relația

$$\delta\mathscr{L}_a + \delta\mathscr{L}_d + \delta\mathscr{L}^i = 0, \tag{14.216}$$

în care cele trei lucruri mecanice virtuale vor fi date de relațiile

$$\delta\mathscr{L}_a = \sum_{k=1}^{p} Q_{a_k}\delta q_k; \qquad \delta\mathscr{L}_d = \sum_{k=1}^{p} Q_{d_k}\delta q_k \qquad \delta\mathscr{L}^i = \sum_{k=1}^{p} Q_k^i\delta q_k; \tag{14.217}$$

unde

$$Q_{a_k} = \sum_{i=1}^{p}\left[\bar{\mathscr{F}}_{a_i}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}}\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right], \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{14.218}$$

sînt forțele generalizate active,

$$Q_{d_k} = \sum_{i=1}^{p}\left[\bar{\mathscr{F}}_{d_i}\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{d_{G_i}}\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right], \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{14.219}$$

sînt forțele generalizate disipative, iar

$$Q_k^i = \sum_{i=1}^{p}\left[\bar{\mathscr{F}}_i^i\frac{\partial\bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^i\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] = -\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_k}\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{14.220}$$

sînt forțele generalizate de inerție corespunzătoare gradului de libertate k.

Ținînd seama de relațiile (14.217) și (14.220), ecuația generală (14.216) a dinamicii sistemelor mecanice va mai putea fi scrisă acum sub forma

$$\sum_{k=1}^{p}\left\{Q_{a_k} + Q_{d_k} - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_k}\right]\right\}\partial q_k = 0. \tag{14.221}$$

Scanned with CamScanner

Cum coordonatele generalizate — și deci și deplasările virtuale generalizate — sînt, în cazul sistemelor mecanice olonome, independente între ele, fiecare putînd lua valori arbitrare, relația precedentă va fi satisfăcută numai în condițiile anulării tuturor coeficienților deplasărilor virtuale generalizate, rezultînd de aici următorul sistem de ecuații :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} = Q_{a_k} + Q_{d_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, p)}, \tag{14.222}$$

cunoscute în literatura de specialitate sub denumirea de *ecuațiile lui Lagrange de specia a doua.*

În situațiile cînd toate solicitările disipative vor putea fi neglijate ($\overline{\mathcal{F}}_{d_i} \equiv 0$; $\overline{\mathcal{M}}_{d_{G_i}} \equiv 0$; $\delta \mathcal{L}_d \equiv 0$; $Q_{d_k} \equiv 0$; $i = 1,2,\ldots,n$, $k = 1,2,\ldots,p$) aceste ecuații vor lua formele

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} = Q_{a_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)}, \tag{14.223}$$

ele purtînd acum numele de *ecuațiile lui Lagrange de specia a doua pentru sisteme mecanice ideale.*

Se va remarca că aceste ecuații nu mai conțin niciuna din reacțiunile necunoscute ale legăturilor pasive, exterioare și interioare, aplicate elementelor sistemului mecanic, din care motiv ele vor reprezenta chiar *sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării sistemului mecanic considerat.*

În cazul unui sistem mecanic cu un singur grad de libertate ($p = 1$; $q_1 = q$; $Q_{a_1} = Q_a$; $Q_{d_1} = Q_d$), ecuațiile (14.222) se vor reduce la una singură, avînd forma

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = Q_a + Q_d.} \tag{14.224}$$

Aceasta este, de exemplu, situaţia în cazul unei *maşini*, definită ca un sistem mecanic scleronom cu un singur grad de libertate, dispunînd de o sursă proprie de energie cinetică şi efectuînd un anumit proces tehnologic; cum într-o astfel de maşină elementul motor — obişnuit un rotor — este considerat ca elementul (S_1) în sistem şi parametrul său de poziţie — de regulă, unghiul de rotaţie $\varphi_1 = \varphi$ — este luat ca parametru lagrangeian de poziţie al maşinii ($q = \varphi$; $\dot{q} = \dot{\varphi} = \omega$), ecuaţia (14.224) va fi scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \varphi} = Q_a + Q_d. \tag{14.225}$$

Pe de altă parte, sistemul mecanic reprezentînd maşina fiind scleronom şi avînd un singur grad de libertate, parametrii cinematici de ordinul întîi ai elementelor lui vor avea expresiile simplificate (12.44) în funcţie de parametrul lagrangeian φ şi de viteza generalizată ω, adică se vor scrie relaţiile

$$\bar{v}_{G_i} = \bar{V}_i(\varphi)\dot{\varphi} = \bar{V}_i(\varphi)\omega;$$

$$\bar{\omega}_i = \bar{\Omega}_i(\varphi)\dot{\varphi} = [\Omega'_{ix}(\varphi)\,\bar{i}'_i + \Omega'_{iy}(\varphi)\,\bar{j}'_i + \Omega'_{iz}(\varphi)\bar{k}'_i]\omega,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.226}$$

$\Omega'_{ix}(\varphi)$, $\Omega'_{iy}(\varphi)$ şi $\Omega'_{iz}(\varphi)$ fiind proiecţiile pe axele reperelor invariabil legate de elementele sistemului mecanic ale vectorilor $\bar{\Omega}_i$. (În cazul cînd axele de rotaţie ale elementelor sînt axele $G_i z_i$ şi au direcţii fixe în spaţiu, vectorii $\bar{\Omega}_i$ au expresiile simplificate $\bar{\Omega}_i = \Omega_i(\varphi)\,\bar{k}'_i$.)

În această situaţie, energia cinetică a maşinii va fi dată de relaţia

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[M_i\,\bar{v}^2_{G_i} + (J'_{i_x}\,\omega'^2_{i_x} + J'_{i_y}\,\omega'^2_{i_y} + J'_{i_z}\,\omega'^2_{i_z})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[M_i\,\bar{V}^2_i + (J'_{i_x}\,\Omega'^2_{i_x} + J'_{i_y}\,\Omega'^2_{i_y} + J'_{i_z}\,\Omega'^2_{i_z})\right]\right\}\omega^2,$$

sau încă, observînd că mărimea

$$J_r(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} [M_i \bar{V}_i^2 + J'_{i_x} \Omega'^2_{i_x} + J'_{i_y} \Omega'^2_{i_y} + J'_{i_z} \Omega'^2_{i_z})] \quad (14.227)$$

reprezintă *momentul de inerţie al maşinii redus la axa elementului motor*, se mai poate scrie

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} J_r(\varphi)\, \omega^2 = \frac{1}{2} J_r(\varphi)\, \dot{\varphi}^2 \quad (14.228)$$

şi deci ecuaţia (14.225) va lua, după efectuarea derivărilor şi a înlocuirii evidente

$$\frac{\partial J_r(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\mathrm{d}J_r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi},$$

justificată de faptul că momentul de inerţie redus nu depinde decît de unghiul de rotaţie φ, forma finală

$$\boxed{J_r(\varphi)\, \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}J_r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \dot{\varphi}^2 = Q_a + Q_d,} \quad (14.229)$$

cunoscută în literatura de specialitate sub numele de *ecuaţia diferenţială a maşinii reale.*

În cazul cînd toate solicitările disipative pot fi neglijate ($Q_d \equiv 0$), ecuaţia precedentă va lua forma

$$\boxed{J_r(\varphi)\, \ddot{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}J_r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \dot{\varphi}^2 = Q_a} \quad (14.230)$$

fiind numită acum *ecuaţia diferenţială a maşinii ideale.*

Se va remarca că ecuaţia (14.229) — respectiv ecuaţia (14.230) — este o *ecuaţie diferenţială de ordinul doi în funcţia φ şi neliniară*, ca urmare a prezenţei termenului $\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}J_r(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} \dot{\varphi}^2$.

De asemenea trebuie menţionat faptul că mărimile Q_a şi Q_d mai poartă, în această situaţie, şi denumirile de *momente reduse în axa elementului motor ale solicitărilor active*, respectiv *disipative* aplicate maşinii.

b) *Ecuaţiile lui Lagrange pentru sisteme mecanice conservative.* Se numesc *sisteme mecanice conservative* sisteme de rigide care îndeplinesc următoarele condiţiuni:

— se deplasează în mediu cu rezistenţă neglijabilă;

— sînt supuse la legături active, exterioare şi interioare, cu amortizare neglijabilă;

— sînt supuse la legături pasive, exterioare şi interioare, staţionare şi cu frecare neglijabilă;

— sînt acţionate numai de solicitări active, exterioare şi interioare, derivînd din funcţii de forţe.

Denumirea de „sisteme conservative este justificată de faptul că, în condiţiile precizate mai sus, pentru aceste sisteme mecanice este valabilă, după cum se ştie, legea de conservare a energiei mecanice.

Primele trei dintre condiţiile menţionate mai sus au drept consecinţă egalitatea cu zero a forţelor generalizate disipative, adică valabilitatea condiţiilor

$$Q_{d_k} \equiv 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{14.231}$$

Din ultima condiţie rezultă apoi că se poate scrie următoarea expresie pentru forţa generalizată activă corespunzătoare gradului de libertate k:

$$Q_{a_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{14.232}$$

unde U este funcţia generală de forţe generalizate, definită prin relaţia (14.59) şi exprimată în funcţie de parametrii lagrangeieni ai sistemului mecanic.

În baza condiţiilor (14.231) şi a expresiilor (14.232) ale forţelor generalizate active, ecuaţiile lui Lagrange de specia a doua corespunzătoare sistemelor mecanice conservative vor avea formele

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k} \tag{14.233}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p).$$

Dacă se foloseşte şi aici funcţia lui Lagrange (potenţialul cinetic) definită prin relaţia (14.204), observîndu-se că întrucît funcţia de forţă U nu depinde de vitezele generalizate, vor putea fi făcute şi înlocuirile

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\mathcal{E}) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\mathcal{E} + U) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

atunci sistemul de ecuaţii (14.233) va putea fi scris sub următoarea formă finală

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)} \tag{14.234}$$

ele fiind numite în literatura de specialitate, *ecuaţiile lui Lagrange pent u sisteme mecanice conservative.*

c) *Ecuaţiile canonice ale lui Hamilton.* Dacă se ţine seama de expresia (13.92) a energie cinetice, nu este greu de constatat că ecuaţiile lui Lagrange de specia a doua — ecuaţiile (14.222) — formează un sistem de p ecuaţii diferenţiale ordinare, de ordinul doi în p funcţii necunoscute de timp, acestea fiind reprezentate prin cele p coordonate generalizate, $q_1, q_2, \ldots, q_p$, ale sistemului mecanic.

Conform unei cunoscute teoreme demonstrate în teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, acest sistem de p ecuaţii diferenţiale de ordinul doi în cele p funcţii necunoscute de timp menţionate, va putea fi înlocuit cu un sistem de $2p$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, în $2p$ funcţii de timp care vor trebui determinate prin integrarea sistemului, aceste noi funcţii purtînd numele de *variabile canonice*, în timp ce noului sistem de $2p$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi în aceste variabile canonice i s-a dat denumirea de *ecuaţiile canonice ale lui Hamilton.*

Prima serie de variabile canonice este formată chiar din cele p coordonate generalizate ale sistemului mecanic, q_k, $(k = 1,2,\ldots,p)$.

Cea de-a doua serie de variabile canonice este formată din mărimile

$$h_k = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{14.235}$$

numite *impulsuri generalizate*, deşi dimensiunile lor fizice pot fi fie cele ale unui impuls, fie cele ale unui moment cinetic, după cum coordonata generalizată corespunzătoare indicelui de ordine este o coordonată carteziană — sau o mărime cu dimensiune fizică de lungime —, sau este un unghi al lui Euler.

Calculînd derivatele parţiale ale energiei cinetice, dată de relaţia (13.92), în raport cu vitezele generalizate $\dot{q}_k$ ale sistemului mecanic, se găsesc expresiile

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{p} g_{i0}\dot{q}_i + \frac{1}{2}g_{00}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} g_{ij}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} g_{ij}\dot{q}_i\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{i=1}^{p} g_{i0}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k},$$

sau încă, avînd în vedere faptul că vitezele generalizate fiind independente, între ele, vor rezulta pentru derivatele parţiale $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k}$ şi $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}$ valorile zero în cazul

$$i, j \neq k$$

şi valorile 1 pentru

$$i, j = k,$$

ceea ce înseamnă că în suma după indicele i din primul şi ultimul grup de termeni din membrul drept al relaţiei precedente rămîne numai termenul pentru care indicele i ia valoarea k şi că în suma după indicele j în cel de-al doilea grup de termeni din membrul drept al aceleiaşi relaţii rămîne numai termenul pentru care indicele j ia va-

Scanned with CamScanner

loarea k, se mai poate scrie

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} g_{kj}\dot{q}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} g_{ik}\dot{q}_i + g_{k0}. \qquad (14.236)$$

Dacă se mai observă acum că cel de-al doilea grup de termeni din membrul drept al relaţiei (14.236) este identic cu primul $\left(\sum_{j=1}^{p} g_{kj}\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{p} g_{ki}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{p} \dot{q}_{ik}\dot{q}_i\right)$, se pot scrie următoarele expresii finale ale derivatelor parţiale $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}$:

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{p} g_{ki}\dot{q}_i + g_{k0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \qquad (14.237)$$

Cu aceasta, se poate trece la stabilirea celor două serii de ecuaţii canonice.

Primul sistem de p ecuaţii canonice se obţine plecîndu-se de la relaţiile (14.237), care, în baza relaţiilor (14.235) de definiţie a impulsurilor generalizate, vor lua formele

$$h_k = \sum_{i=1}^{p} g_{ki}\dot{q}_i + g_{k0}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \qquad (14.238)$$

ansamblul tuturor acestor relaţii formînd un sistem de p ecuaţii algebrice liniare neomogene în cele p viteze generalizate $\dot{q}_i$, $(i = 1,2,\ldots,p)$.

În baza unei cunoscute teoreme din teoria formelor pătratice pozitiv definite — în rîndul cărora se încadrează şi forma pătratică din expresia energiei cinetice a sistemului mecanic —, rezultă că determinantul format din coeficienţii g_{ki} ai acestei din urmă forme patratice este diferit de zero, adică este satisfăcută condiţia

$$|g_{ki}| \neq 0. \qquad (14.239)$$

Aceasta înseamnă însă că sistemul (14.238) de p ecuaţii liniare algebrice neomogene în cele p viteze generalizate va putea fi rezolvat în raport cu aceste viteze, ele putînd fi exprimate astfel ca funcţii

de coordonatele generalizate, de impulsurile generalizate şi de timp, adică

$$\boxed{\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_1, \ldots, q_p\,;\, h_1, \ldots, h_p\,;\, t) = \dot{q}_k\,(q\,;\, h\,;\, t) \quad (k = 1, 2, \ldots, p)} \tag{14.240}$$

Aceste p relaţii vor constitui *prima serie de ecuaţii canonice.* *Cea de-a doua serie de ecuaţii canonice* este reprezentată chiar prin sistemul (14.222) de ecuaţii Lagrange, care, în baza relaţiilor (14.235) ce definesc impulsurile generalizate, va mai putea fi scris sub forma

$$\boxed{\dot{h}_k = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} + Q_{a_k} + Q_{d_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)}\,. \tag{14.241}$$

Celor două serii, stabilite mai sus, de ecuaţii canonice li se poate da o formă mult mai uşor de reţinut, prin introducerea unei funcţii de cele două serii de variabile canonice, numită *funcţia caracteristică a lui Hamilton*, definită prin relaţia

$$H = \sum_{i=1}^{p} h_i\, \dot{q}_i - \mathcal{E}, \tag{14.242}$$

cu vitezele generalizate considerate exprimate, prin intermediul relaţiilor (14.240), ca funcţii de cele două serii de variabile canonice, ceea ce înseamnă că şi funcţia caracteristică H va trebui considerată şi ea funcţie de cele două serii de variabile canonice şi de timp, adică

$$H = \sum_{i=1}^{p} h_i\, \dot{q}_i(q\,;\, h\,;\, t) - \mathcal{E}(q\,;\, \dot{q}(q\,;\, h\,;\, t)) = H(q\,;\, h\,;\, t). \tag{14.243}$$

Observînd că funcţia H depinde de coordonatele generalizate şi direct — în expresia energiei cinetice —, dar şi prin intermediul vitezelor generalizate, care figurează atît în primul grup de termeni ai funcţiei, cît şi în expresia energiei cinetice, se pot scrie următoarele expresii pentru derivatele parţiale în raport cu coordonatele genera-

Scanned with CamScanner

lizate ale acestei funcţii :

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k} - \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k},$$

adică

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{14.244}$$

Calculînd şi derivatele parţiale ale funcţiei caracteristice a lui Hamilton în raport cu cea de-a doua serie de variabile canonice, variabile care intervin în funcţia H atît direct — în primul grup de termeni —, cît şi prin intermediul vitezelor generalizate, rezultă şi expresiile

$$\frac{\partial H}{\partial h_k} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial h_i}{\partial h_k} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h_k} - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial h_i}{\partial h_k} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h_k} - \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial h_k},$$

sau încă, reducînd termenii asemenea şi observînd că, variabilele h_i fiind independente între ele, derivatele parţiale $\frac{\partial h_i}{\partial h_k}$ vor fi egale cu zero pentru $i \neq k$ şi egale cu 1 pentru $i = k$, ceea ce înseamnă că în suma după indicele i, care figurează în primul grup de termeni ai relaţiei precedente, rămîne numai termenul pentru care indicele i ia valoarea k, mai rezultă

$$\frac{\partial H}{\partial h_k} = \dot{q}_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{14.245}$$

Scanned with CamScanner

În baza relațiilor (14.244) și (14.245), ecuațiile (14.240) și (14.241) vor lua formele

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial h_k}; \quad \dot{h}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_{a_k} + Q_{d_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, p)}, \tag{14.246}$$

cunoscute în literatura de specialitate sub denumirea de *ecuațiile canonice ale lui Hamilton pentru sisteme mecanice neconservative.*

În cazul sistemelor mecanice conservative, adică în condițiile

$$Q_{d_k} \equiv 0; \qquad Q_{a_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{14.247}$$

ecuațiile canonice ale lui Hamiton pot fi scrise sub o formă și mai concentrată, introducînd *funcția hamiltoniană pentru sisteme mecanice conservative*, definită prin relația

$$H^* = H - U = \sum_{i=1}^{p} h_i \dot{q}_i - (\mathscr{E} + U) = \sum_{i=1}^{p} h_i \dot{q}_i - \mathfrak{L} \tag{14.248}$$

și observînd că pot fi scrise egalitățile

$$\frac{\partial H^*}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q}(H - U) = \frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} = -\left(-\frac{\partial H}{\partial q_k} + Q_{a_k}\right) \tag{14.249}$$

și

$$\frac{\partial H^*}{\partial h_k} = \frac{\partial}{\partial h_k}(H - U) = \frac{\partial H}{\partial h_k}, \tag{14.250}$$

ultima justificată de faptul că funcția de forță generalizată nu depinde de cea de-a doua serie de variabile canonice; în baza relațiilor

(14.249) şi (14.250), ecuaţiile (14.246) capătă formele

$$\boxed{\dot{q}_k = \frac{\partial H^*}{\partial h_k}; \quad \dot{h}_k = -\frac{\partial H^*}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, p)}, \tag{14.251}$$

fiind numite acum *ecuaţiile canonice ale lui Hamilton pentru sisteme mecanice conservative.*

14.3. *Problemele dinamicii sistemelor de rigide*

14.3.1. Formularea generală a problemelor dinamicii sistemelor mecanice

Problemele de dinamica sistemelor de rigide conţin, în general, un număr total de s elemente sclare necunoscute, în care pot intra :

— cei p parametri de poziţie independenţi ai sistemului mecanic, w_k, $(k = 1,2,\ldots,p)$, respectiv cele p coordonate generalizate ale sistemului, q_k, $(k = 1,2,\ldots,p)$;

— un număr de f_{ext} elemente scalare necunoscute, caracterizînd torsorii solicitărilor exterioare active, reprezentate obişnuit prin moduli sau braţe ale forţelor exterioare active aplicate elementelor sistemului mecanic ;

— un număr de r_{ext} elemente scalare necunoscute, caracterizînd torsorii solicitărilor exterioare pasive, reprezentate, cel mai adesea, prin moduli ai reacţiunilor rezultante ideale ale legăturilor pasive exterioare aplicate elementelor sistemului mecanic ;

— un număr de f_{int} elemente scalare necunoscute determinînd torsorii solicitărilor interioare active, reprezentate, de regulă, prin constante fizice ale elementelor de legătură elastică interioară ;

— un număr de r_{int} elemente scalare necunoscute, caracterizînd torsorii solicitărilor interioare pasive, ele fiind reprezentate, obişnuit, prin moduli ai componentelor ideale ale torsorilor reacţiunilor legăturilor pasive interioare aplicate elementelor sistemului mecanic.

Rezultă de aici că numărul total de elemente scalare necunoscute pe care le poate conţine o problemă de dinamica sistemelor

Scanned with CamScanner

mecanice va fi dat de relaţia

$$s = p + f_{ext} + r_{ext} + f_{int} + r_{int} = p + f + r \qquad (14.252)$$

cu

$$f = f_{ext} + f_{int}; \quad r = r_{ext} + r_{int}. \qquad (14.253)$$

Ca şi în dinamica rigidului, şi în dinamica sistemelor de rigide se poate face o clasificare a problemelor în două categorii principale :

— *Probleme de tip direct*, în care se prestabilesc, pe bază de consideraţii tehnologice, ecuaţiile finite ale mişcărilor elementelor sistemului mecanic, cu fixarea şi a legăturilor pasive, exterioare şi interioare, aplicate sistemului şi se cere să se determine reacţiunile necunoscute ale legăturilor şi solicitările active ce trebuiesc aplicate elementelor sistemului mecanic, pentru ca să aibă loc mişcarea prestabilită considerată.

Întrucît prestabilirea mişcărilor elementelor (S_i) ale sistemului mecanic implică cunoaşterea funcţiilor

$$\begin{aligned} &f_{i1}(x_{G_i}; t) = 0; \qquad f_{i4}(\psi_i; t) = 0; \\ &f_{i2}(y_{G_i}; t) = 0; \qquad f_{i5}(\varphi_i; t) = 0; \\ &f_{i3}(z_{G_i}; t) = 0; \qquad f_{i6}(\theta_i; t) = 0, \end{aligned} \qquad (14.254)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

care pot fi considerate ca forme particulare ale unor ecuaţii de legătură interioară, în număr egal însă cu numărul parametrilor de poziţie variabili în timp ai sistemului mecanic ($N = l_{int}$), rezultă că acest tip de probleme se va caracteriza prin condiţiile

$$p = 0; \quad s = r + f. \qquad (14.255)$$

Trebuie de făcut însă menţiunea că şi în dinamica sistemelor de rigide, problemele de tip direct, a căror rezolvare se reduce, ca şi în dinamica rigidului, doar la rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice, interesează în mică măsură aplicaţiile tehnice, datorită fap-

Scanned with CamScanner

tului că sînt foarte greu de realizat legile de variaţie, găsite din ecuaţiile de mişcare, pentru solicitările active ce ar trebui aplicate elementelor sistemului, pentru ca să aibă loc mişcarea prestabilită considerată a sistemului mecanic.

— *Probleme de tip invers* (*fundamentale*), în care se cunosc toate solicitările active, exterioare şi interioare, aplicate sistemului mecanic, precum şi legăturile pasive, exterioare şi interioare, la care sînt supuse elementele lui şi se cere să se determine ecuaţiile finite ale mişcărilor elementelor sistemului mecanic considerat adică, în fond, funcţiile

$$q_k = q_k(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

care vor permite apoi să se exprime, prin intermediul ecuaţiilor de legătură interioară, şi parametrii de poziţie ai elementelor sistemului mecanic ca funcţii determinate de timp —, precum şi elementele scalare necunoscute din torsorii solicitărilor de reacţiune ale legăturilor pasive aplicate sistemului mecanic.

Rezultă deci că acest de-al doilea tip principal de probleme de dinamica sistemelor mecanice, care interesează în cea mai mare măsură aplicaţiile tehnice, se caracterizează prin condiţiile

$$f = 0; \qquad s = p + r = p + r_{ext} + r_{int}. \tag{14.256}$$

14.3.2. Rezolvarea problemelor de tip fundamental ale dinamicii sistemelor mecanice

O primă observaţie care trebuie făcută în legătură cu rezolvarea problemelor de tip fundamental ale dinamicii sistemelor mecanice este aceea că nu totdeauna este necesară o rezolvare integrală a problemei, adică nu totdeauna se cere să se determine toate elementele necunoscute ale problemei, numărul s' de elemente scalare cerute a fi determinate într-o problemă concretă de dinamica sistemelor de rigide satisfăcînd deci condiţia

$$s' \leqslant s. \tag{14.257}$$

Trebuie de făcut însă precizarea că în numărul s' vor intra totdeauna şi cei p parametrii de poziţie independenţi — respectiv cele p coordonate generalizate — ale sistemului mecanic.

Scanned with CamScanner

O a doua observaţie care va mai trebui făcută în legătură cu rezolvarea problemelor de tip fundamental este aceea că dintre diversele forme ale ecuaţiilor scalare ale dinamicii sistemelor mecanice, prezentate în cadrul subpunctului precedent (subpunctul 2.3. al acestui paragraf), vor trebui alese, de fiecare dată, acelea care vor furniza numărul necesar

$$e^* = s' \tag{14.258}$$

de ecuaţii scalare conţinînd necunoscutele cerute a fi determinate în problema concretă dată.

Observaţiile precedente permit să se tragă concluzia că în rezolvarea problemelor de tip fundamental ale dinamicii sistemelor mecanice va trebui să se ţină seama de următoarele trei situaţii distincte :

Cazul I : *Se cere rezolvarea integrală a problemei*, adică

$$s' = s = p + r_{ext} + r_{int}. \tag{14.259}$$

Cum între necunoscutele problemei ce trebuie determinate, în această situaţie, figurează şi reacţiunile legăturilor pasive interioare, iar acestea din urmă apar numai în ecuaţiile scrise pentru elemente izolate din sistem, se înţelege că metoda ce va trebui folosită pentru rezolvarea unei asemenea probleme va fi aceea de a scrie ecuaţiile scalare de mişcare pentru fiecare element al sistemului mecanic, considerat — prin desfiinţarea tuturor legăturilor interioare şi introducerea solicitărilor interioare, active şi pasive, corespunzătoare—complet separat din sistemul mecanic ; în consecinţă, aceste ecuaţii vor avea fie formele corespunzătoare teoremelor torsorilor impulsurilor, fie formele corespunzătoare ecuaţiilor de echilibru dinamic ale lui d'Alembert, scrise pentru elementele izolate din sistem, ele fiind reprezentate prin ecuaţiile (14.68) — sau, după caz, (14.69) —, respectiv (14.85), pentru sistemele mecanice spaţiale şi prin ecuaţiile (14.70), respectiv (14.86), pentru sistemele mecanice plane.

Pentru rezolvarea problemei este obligatorie satisfacerea condiţiei necesare

$$e^* = e = s = p + r_{ext} + r_{int} \tag{14.260}$$

cu $e \leqslant 6n$ în cazul sistemelor mecanice spaţiale şi $e \leqslant 3n$ în cazul sistemelor mecanice plane.

Scanned with CamScanner

În ceea ce priveşte succesiunea operaţiilor ce vor trebui efectuate pentru rezolvarea problemei, ea va fi următoarea:

— Eliminarea, cu ajutorul unui număr de

$$r = e - p \tag{14.261}$$

dintre cele e ecuaţii scalare de mişcare ale sistemului mecanic studiat, a celor

$$r = r_{ext} + r_{int}$$

elemente scalare necunoscute din torsorii solicitărilor de reacţiune ale legăturilor pasive, exterioare şi interioare, aplicate elementelor sistemului mecanic, obţinîndu-se astfel un sistem de p ecuaţii diferenţiale, dar conţinînd un număr total de

$$N = p + l_{int} \tag{14.262}$$

funcţii necunoscute de timp, reprezentate prin cei N parametri de poziţie variabili în timp ai sistemului mecanic.

— Exprimarea, în baza sistemului format din cele l_{int} ecuaţii de legătură interioară, a tuturor celor l_{int} parametri de poziţie dependenţi ai elementelor sistemului mecanic în funcţie de cei

$$p = N - l_{int} \tag{14.263}$$

parametri de poziţie aleşi ca parametri de poziţie independenţi ai sistemului mecanic, w_j, $(j = 1,2,\ldots,p)$; prin înlocuirea, apoi, a acestor expresii în sistemul de ecuaţii diferenţiale obţinut în etapa precedentă de lucru, se obţine în cele din urmă *sistemul de ecuaţii diferenţiale ale mişcării sistemului mecanic* considerat, reprezentat printr-un număr de p ecuaţii diferenţiale de ordinul doi în cele p funcţii necunoscute de timp $w_j = w_j(t)$, $(j = 1,2,\ldots,p)$.

— Integrarea sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării sistemului mecanic considerat şi determinarea, cu ajutorul condiţiilor iniţiale, a celor $2p$ constante de integrare.

— Exprimarea, pe baza ecuaţiilor de legătură interioară şi a modului de alegere a parametrilor de poziţie independenţi, a tuturor parametrilor de poziţie variabili în timp ai sistemului mecanic, ca funcţii cunoscute de timp.

Scanned with CamScanner

— Determinarea, cu ajutorul celor r ecuaţii care au fost folosite la eliminarea reacţiunilor necunoscute ale legăturilor pasive aplicate elementelor sistemului mecanic şi a acestor ultime necunoscute ale problemei.

Se face menţiunea că pentru a se evita operaţia de eliminarea reacţiunilor necunoscute ale legăturilor pasive, operaţie care poate fi, în multe cazuri, foarte migăloasă, se poate stabili direct sistemul de ecuaţii diferenţiale ale mişcării sub forma ecuaţiilor lui Lagrange de specia a doua, cu coordonatele generalizate coincizînd cu parametrii de poziţie independenţi ai sistemului mecanic şi apoi, după integrarea acestui sistem şi după determinarea şi a parametrilor de poziţie variabili în timp ai sistemului mecanic ca funcţii cunoscute de timp, să se scrie ecuaţiile de mişcare pentru elementele izolate ale sistemului, din care vor fi determinate reacţiunile necunoscute ale legăturilor pasive aplicate elementelor sistemului mecanic.

Cazul II: *Se cere determinarea numai a ecuaţiilor finite ale mişcării sistemului mecanic şi a reacţiunilor legăturilor pasive exterioare aplicate elementelor sistemului mecanic*, adică

$$s' = p + r_{ext} < s. \tag{14.264}$$

Întrucît între necunoscutele scalare ale problemei, ce urmează a fi determinate, nu mai figurează şi reacţiunile legăturilor pasive interioare, care apar numai în ecuaţiile de mişcare scrise pentru elemente izolate, rezultă că pentru rezolvarea problemei în această situaţie vor trebui folosite ecuaţiile de mişcare scrise pentru întregul sistem mecanic, fie sub forma corespunzătoare teoremei torsorului impulsurilor sistemului mecanic, fie sub forma corespunzătoare ecuaţiilor de echilibru dinamic ale lui d'Alembert scrise pentru întregul sistem mecanic, adică ecuaţiile (14.77), respectiv (14.94), în cazul sistemelor mecanice spaţiale şi ecuaţiile (14.78), respectiv (14.95), pentru sistemele mecanice plane.

În cazul cînd este satisfăcută condiţia

$$e' = s' = p + r_{ext} \tag{14.265}$$

cu $e' = 6$ pentru sisteme mecanice spaţiale şi $e' = 3$ pentru sisteme mecanice plane, rezolvarea problemei va conţine următoarele ope-

Scanned with CamScanner

rații :

— Eliminarea, cu ajutorul unui număr de

$$r_{ext} = e' - p \tag{14.266}$$

dintre ecuațiile scalare ale mișcării a reacțiunilor necunoscute ale legăturilor pasive exterioare aplicate elementelor sistemului mecanic, obținîndu-se și acum un sistem de p ecuații diferențiale de ordinul doi în cei N parametri de poziție variabili în timp al sistemului mecanic.

— Înlocuirea, în sistemul precedent de ecuații diferențiale, a celor l_{int} parametri de poziție dependenți ai sistemului mecanic cu expresiile lor în funcție de cei p parametri de poziție independenți, obținute din sistemul celor l_{int} ecuații de legătură interioară, rezultînd astfel și acum sistemul de p ecuații diferențiale ale mișcării sistemului mecanic în cele p funcții necunoscute de timp, reprezentate prin parametrii de poziție independenți w_j, $(j = 1,2,\ldots,p)$.

— Integrarea sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării sistemului mecanic și determinarea, cu ajutorul condițiilor inițiale, a celor $2p$ constante de integrare.

— Determinarea reacțiunilor necunoscute ale legăturilor pasive exterioare aplicate elementelor sistemului mecanic, cu ajutorul celor r_{ext} ecuații scalare de mișcare, care au fost folosite inițial la eliminarea reacțiunilor.

Se înțelege că și aici va putea fi evitată operația de eliminare a reacțiunilor exterioare necunoscute, scriindu-se direct sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării sub forma ecuațiilor lui Lagrange de speci a a doua, cu parametrii de poziție independenți aleși drept coordonate generalizate; pentru determinarea reacțiunilor exterioare necunoscute vor fi folosite apoi un număr de r_{ext} dintre ecuațiile scalare ale mișcării, scrise pentru întregul sistem mecanic.

Dacă numărul $s' = p + r_{ext}$ de necunoscute scalare ale problemei, care urmează a fi determinate, este mai mare decît numărul e' de ecuații scalare de mișcare ce pot fi scrise pentru întregul sistem mecanic, fiind satisfăcută însă condiția necesară

$$e = s = p + r_{ext} + r_{int}$$

pentru rezolvarea completă a problemei, atunci pentru rezolvarea parțială cerută a ei vor trebui folosite, pe lîngă sistemul celor e' ecua-

Scanned with CamScanner

ţii scalare de mişcare corespunzătoare întregului sistem mecanic şi un număr suplimentar de ecuaţii de mişcare, scrise pentru anumite elemente izolate din sistem, convenabil alese, astfel întît numărul total de ecuaţii de care se dispune în acest caz, $e'' > e'$, să fie egal cu numărul total al necunoscutelor, reprezentate prin cele s' necunoscute cerute a fi determinate, precum şi printr-un număr de $r'_{int} < r_{int}$ de reacţiuni interioare corespunzătoare elementelor alese; operaţiile necesare rezolvării problemei rămîn aceleaşi ca şi în prima situaţie.

Cazul III: *Se cere determinarea numai a ecuaţiilor finite ale mişcării sistemului mecanic*, adică

$$s' = p \tag{14 267}$$

Luînd în consideraţie numai situaţiile — de altfel, cel mai des întîlnite în aplicaţiile tehnice — cînd, fie că pot fi complet neglijate fenomenele de frecare în toate legăturile pasive aplicate elementelor sistemului mecanic, fie că forţele şi momentele de frecare se aproxmează cu valori cunoscute, independente de mişcarea sistemului mecanic, rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor mecanice în cea de-a treia situaţie se va face prin scrierea directă a sistemului de ecuaţii Lagrange de specia a doua şi integrarea apoi a acestui sistem.

Se mai menţionează faptul că în unele situaţii mai simple asemenea rezolvări parţiale ale problemelor de dinamica sistemelor mecanice pot fi obţinute folosindu-se unele integrale prime — aceasta, evident, în condiţii de existenţă a lor — şi anume: integrale ale impulsului — atunci cînd elementele sistemului mecanic execută numai mişcări de translaţie —, integrale ale momentului cinetic — atunci cînd cel puţin unele din elementele sistemului execută şi rotaţii — şi chiar integrala energiei — în cazurile cînd solicitările disipative pot fi complet neglijate, iar solicitările active derivă dintr-un potenţial.

14.4. *Ecuaţiile şi problemele staticii sistemelor de rigide*

14.4.1. Ecuaţiile staticii sistemelor de rigide

Starea de echilibru static a unui sistem de rigide presupune realizată starea de echilibru pentru fiecare element în parte al sis-

Scanned with CamScanner

temului, adică satisfacerea în permanență a condițiilor cinematice

$$\bar{v}_{G_i} \equiv 0\,; \qquad \bar{\omega}_i \equiv 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.268}$$

cu consecințele lor dinamice directe

$$\bar{\mathcal{H}}_i \equiv 0\,; \qquad \bar{\mathcal{K}}_{G_i} \equiv 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.269}$$

și deci

$$\dot{\bar{\mathcal{H}}}_i = -\bar{\mathcal{F}}_i^e \equiv 0\,; \qquad \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{G_i} = -\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}^e \equiv 0,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.270}$$

În baza acestor condiții, ecuațiile vectoriale ale mișcărilor elementelor sistemului mecanic considerat în echilibru static, fie că sînt scrise sub forma corespunzătoare teoremelor torsorilor impulsurilor (14.67), fie că sînt scrise sub forma ecuațiilor de echilibru dinamic ale lui d'Alembert (14.82), vor lua, în ambele situații, formele

$$\bar{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} + \bar{\mathcal{F}}_{ext_{p_i}} + \bar{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} + \bar{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} = 0\,;$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_{G_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_{G_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_{G_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_{G_i}}} = 0, \tag{14.271}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

exprimînd condiția de echivalență cu zero în polii G_i a tuturor solicitărilor exterioare și interioare, active și pasive, la care sînt supuse elementele (S_i) ale sistemului mecanic; cum această echivalență cu zero este, așa cum s-a arătat în teoria vectorilor alunecători, independentă de pol, ea se va păstra și în polul fix O — originea reperului fix la care este raportată poziția de echilibru static a sistemului mecanic —, putîndu-se scrie deci și relațiile

$$\bar{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} + \bar{\mathcal{F}}_{ext_{p_i}} + \bar{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} + \bar{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} = 0\,;$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}} = 0. \tag{14.272}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Scanned with CamScanner

Se poate trage de aici o primă concluzie, care va conduce, de altfel, și la o primă metodă de rezolvare a problemelor de statica sistemelor mecanice, această concluzie exprimîndu-se prin

— *Teorema întîi a staticii sistemelor mecanice*:

„În cazul unui sistem de rigide în echilibru pot fi scrise ecuații de echilibru pentru fiecare element în parte al sistemului, ținîndu-se seama atît de torsorii, într-un pol oarecare comun tuturor elementelor sistemului, ai solicitărilor exterioare, active și pasive, care acționează asupra fiecărui element, cît și de torsorii, în același pol comun, ai tuturor solicitărilor interioare, active și pasive, la care sînt supuse elementele respective".

Plecînd de la relațiile (14.272), scrise pentru toate elementele sistemului mecanic, se pot obține, prin însumarea, pe de o parte, a tuturor ecuațiilor de echilibru pentru forțe și, pe de altă parte, a tuturor ecuațiilor de echilibru pentru momente, precum și prin luarea în considerație a echivalenței cu zero a sistemului de solicitări interioare, active și pasive, corespunzătoare întregului sistem mecanic, următoarele relații

$$\sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathcal{F}}_{ext_{p_i}}) = 0\,; \qquad \sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathcal{M}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathcal{M}}_{ext_{p_i}}) = 0, \tag{14.273}$$

care se prezintă sub forma ecuațiilor de echilibru ale unui singur rigid — în ecuații figurează numai solicitările exterioare —, deci ca și cum întregul sistem mecanic ar forma un ansamblu rigid, solidificat.

Mai mult încă, dacă se consideră numai o porțiune din sistemul mecanic, formată dintr-un număr de l rigide, (S_{h+1}), (S_{h+2}), ..., ...,(S_{h+l}), luate în ordinea în care se înlănțuiesc ele în sistemul mecanic considerat, (fig. 14.3) și se însumează și acum ecuațiile de echilibru de forma (14.272) — evident, separat ecuațiile de forțe și separat ecuațiile de momente —, scrise pentru fiecare dintre elementele porțiunii menționate, atunci se obțin relațiile

$$\sum_{i=h+1}^{h+l} (\overline{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathcal{F}}_{ext_{p_i}}) + \sum_{i=h+1}^{h+l} \overline{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} + \sum_{i=h+1}^{h+l} \overline{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} = 0\,;$$

$$\sum_{i=h+1}^{h+l} (\overline{\mathcal{M}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathcal{M}}_{ext_{p_i}}) + \sum_{i=h+1}^{h+l} \overline{\mathcal{M}}_{in\cdot a_i} + \sum_{i=h+1}^{h+l} \overline{\mathcal{M}}_{int_{p_i}} = 0. \tag{14.274}$$

Scanned with CamScanner

Se va observa însă că în sumele extinse asupra elementelor porţiunii ale solicitărilor interioare, atît active, cît şi pasive, rămîn numai solicitările din punctele de separaţie a porţiunii considerate de restul sistemului (de ex., în situaţia prezentată în fig. 14.3 rămîn

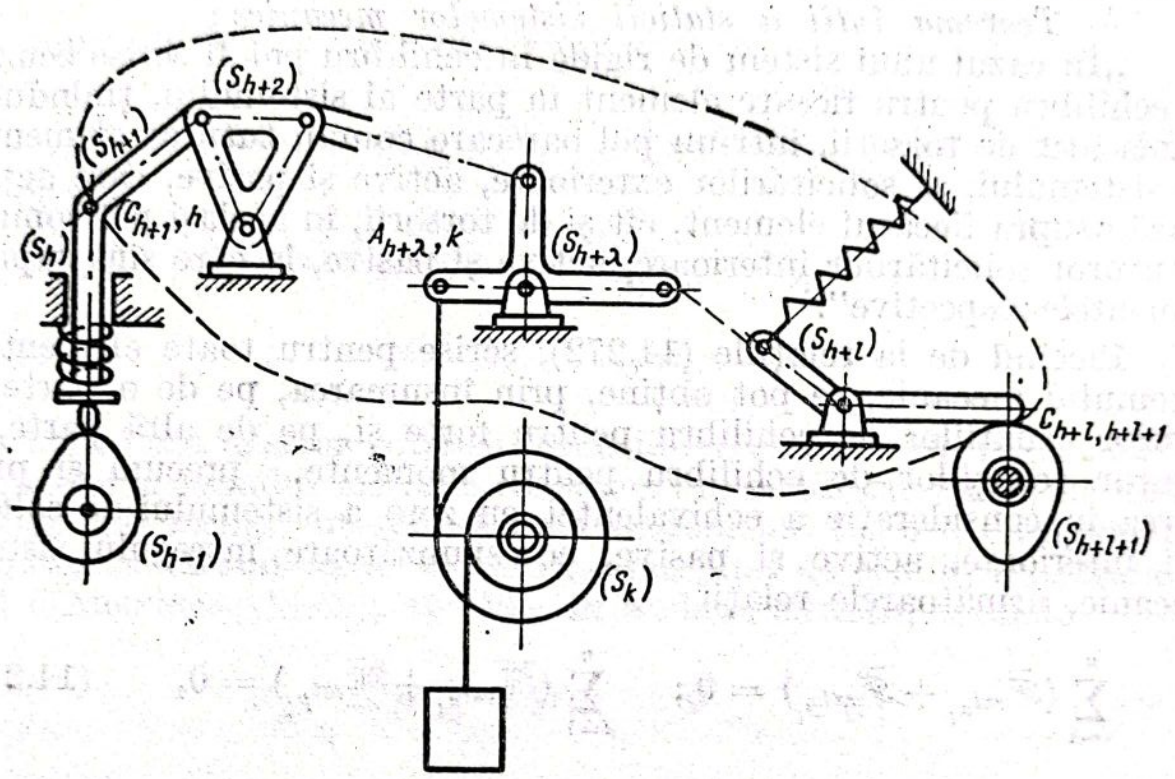


Fig. 14.3

numai solicitările din punctele $C_{h+1,h}$, $C_{h+l,h+l+1}$ şi $A_{h+\lambda,k}$), deoarece în toate celelalte puncte de legătură interioară, atît activă, cît şi pasivă, dintre elementele porţiunii considerate se regrupează perechile de solicitări interioare, două cîte două direct opuse.

În consecinţă, notînd cu

$$\sum_s \overline{\mathcal{F}}_{int_{a_s}} = \sum_{i=h+1}^{h+l} \overline{\mathcal{F}}_{int_{a_i}}; \qquad \sum_s \overline{\mathcal{M}}_{int_{a_s}} = \sum_{i=h+1}^{h+l} \overline{\mathcal{M}}_{int_{a_i}} \tag{14.275}$$

sumele de solicitări interioare active din punctele de separaţie a porţiunii considerate de restul sistemului şi cu

$$\sum_s \overline{\mathcal{F}}_{int_{p_s}} = \sum_{i=h+1}^{h+l} \overline{\mathcal{F}}_{int_{p_i}}; \qquad \sum_s \overline{\mathcal{M}}_{int_{p_s}} = \sum_{i=h+1}^{h+l} \overline{\mathcal{M}}_{int_{p_i}} \tag{14.276}$$

Scanned with CamScanner

sumele de solicitări de reacţiune din punctele de legături interioară pasivă în care se face separaţia porţiunii de restul sistemului mecanic, rezultă următoarele forme finale pentru relaţiile (14.274) :

$$\sum_{i=h+1}^{h+l}(\bar{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}}+\bar{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}})+\sum_s \bar{\mathscr{F}}_{int_{a_s}}+\sum_s \bar{\mathscr{F}}_{int_{p_s}}=0;$$

$$\sum_{i=h+1}^{h+l}(\overline{\mathscr{M}}_{ext_{a_i}}+\overline{\mathscr{M}}_{ext_{p_i}})+\sum_s \overline{\mathscr{M}}_{int_{a_s}}+\sum_s \overline{\mathscr{M}}_{int_{p_s}}=0. \qquad (14.277)$$

Se observă că şi de astă dată ecuaţiile de echilibru se prezintă ca şi cum porţiunea formată din cele l elemente ar constitui un ansamblu rigid, solidificat, cu singura deosebire că acum trebuie luate în consideraţie şi solicitările interioare, active şi de legătură pasivă, dar numai din acele puncte de legătură în care se face separaţia porţiunii de restul sistemului mecanic.

Pe baza ultimelor concluzii poate fi formulată şi

— *Teorema a doua a staticii sistemelor mecanice*, numită încă, din motive uşor de înţeles din observaţiile precedente, şi *teorema solidificării* :

„În cazul unui sistem de rigide în echilibru pot fi scrise ecuaţii de echilibru atît pentru întregul sistem, considerat solidificat, ţinîndu-se seama în acest caz numai de torsorii solicitărilor exterioare, active şi pasive, la care este supus sistemul, cît şi pentru porţiuni complet izolate din sistem, considerate de asemenea solidificate, la torsorii solicitărilor exterioare, active şi pasive, ce acţionează asupra acestor porţiuni adăugîndu-li-se, în această din urmă situaţie, şi torsorii solicitărilor interioare, active şi pasive, dar numai din punctele de separaţie a porţiunilor respective de restul sistemului mecanic".

O altă teoremă generală a staticii sistemelor mecanice va putea fi dedusă plecîndu-se de la principiul d'Alembert-Lagrange.

Într-adevăr, în baza condiţiilor (14.270), care implică egalitatea cu zero a lucrului mecanic virtual al solicitărilor de inerţie ale sistemului mecanic, ecuaţia generală (14.133) a dinamicii şi relaţia (14.137) exprimînd principiul deplasărilor virtuale, vor lua formele particulare

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{\mathscr{F}}_{a_i}\delta_L\bar{r}_{G_i}+\overline{\mathscr{M}}_{a_{G_i}}\delta_L\bar{\Theta}_i)+\sum_{i=1}^{n}(\bar{\mathscr{F}}_{d_i}\delta_L\bar{r}_{G_i}+\overline{\mathscr{M}}_{d_{G_i}}\delta_L\bar{\Theta}_i)=0, \qquad (14.278)$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$\delta \mathscr{L}_a + \delta \mathscr{L}_d = 0, \tag{14.279}$$

care vor permite formularea

— *Teoremei a treia a staticii sistemelor mecanice (principiul deplasărilor virtuale aplicat la statică)* :

„Condiția necesară — se demonstrează că este și suficientă — pentru ca un sistem de rigide, supus la legături cu solicitări disipative cunoscute, să rămînă în echilibru sub acțiunea unui sistem dat de solicitări active, este ca lucrul mecanic virtual al tuturor acestor solicitări active și disipative să fie egal cu zero".

În cazul cînd toate solicitările disipative sînt neglijabile, relațiile (14.278) și (14.279) iau formele

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{\mathscr{F}}_{a_i} \delta_L \bar{r}_{G_i} + \bar{\mathfrak{M}}_{a_{G_i}} \delta_L \bar{\Theta}_i) = 0, \tag{14.280}$$

respectiv

$$\delta \mathscr{L}_a = 0, \tag{14.281}$$

lor corespunzîndu-le acum următoarea formulare a principiului deplasărilor virtuale aplicate la statică :

„Condiția necesară — se demonstrează și de astă dată că este și suficientă — pentru ca un sistem de rigide, supus la legături cu solicitări disipative neglijabile, să rămînă în echilibru sub acțiunea unui sistem de solicitări active, este ca lucrul mecanic virtual al tuturor acestor solicitări active să fie egal cu zero".

O variantă a ultimei forme a principiului deplasărilor virtuale aplicat la statică o constituie așa numitul principiu al lui Torricelli, care se referă la sisteme mecanice în echilibru numai sub acțiunea greutăților elementelor lor, toate solicitările disipative fiind neglijabile.

Prin alegerea polilor invariabili legați de elementele sistemului mecanic în echilibru chiar în centrele de masă ale acestora ($\bar{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{P}_i) = \bar{\mathscr{M}}_{G_i}(\bar{P}_i) = 0$) și prin orientarea axei Oz a reperului fix la care este raportată poziția de echilibru a sistemului mecanic considerat pe verticală și în sus ($\bar{P}_i = -M_i g \bar{k}$), relația (14.281) va lua, în condițiile

menţionate, forma

$$\delta\mathscr{L}_a = \delta\mathscr{L}_g = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i \delta_L \bar{r}_{G_i} = -g \sum_{i=1}^{n} M_i \delta_L z_{G_i} = -g\delta_L \left(\sum_{i=1}^{n} M_i z_{G_i} \right),$$

sau încă, observînd că se poate scrie

$$\sum_{i=1}^{n} M_i z_{G_i} = M z_C$$

— M fiind masa sistemului mecanic, iar z_C cota centrului de masă al acestui sistem —, mai rezultă următoarea formă pentru condiţia (14.281) :

$$-g\delta_L(Mz_C) = -gM\delta_L z_C = 0,$$

adică

$$\boxed{\delta_L z_C = \delta z_C = 0}, \qquad (14.282)$$

ultima relaţie exprimînd *principiul lui Torricelli*, căruia i se poate da următoarea formulare :

„În cazul unui sistem mecanic supus numai la legături cu solicitări disipative neglijabile şi solicitat exterior numai de greutăţile elementelor sale, poziţia lui de echilibru corespunde unei valori extremale a cotei centrului de masă al sistemului".

14.4.2. Problemele şi metodele staticii sistemelor de rigide

Întrucît în condiţiile echilibrului static solicitările de rezistenţă ale mediului şi solicitările de amortizare ale elementelor de legătură elastică devin egale cu zero, solicitările pasive, exterioare şi interioare, se vor reduce numai la solicitările de reacţiune ale legăturilor pasive, exterioare şi interioare, adică vor putea fi scrise rela-

ţiile

$$\overline{\mathcal{F}}_{ext_{p_i}} = \overline{R}_{ext_i}; \qquad \overline{\mathcal{M}}_{ext_{p_i}} = \overline{\mathcal{M}}(\overline{R}_{ext_i}) \tag{14.283}$$

şi

$$\overline{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} = \overline{R}_{int_i}; \qquad \overline{\mathcal{M}}_{int_{p_i}} = \overline{\mathcal{M}}(\overline{R}_{int_i}), \tag{14.284}$$

iar solicitările disipative se vor reduce numai la solcitările de frecare în legăturile pasive, exterioare şi interioare, aplicate elementelor sistemului mecanic în echilibru, solicitări considerate însă cunoscute, rezultînd deci concluzia

$$\delta\mathcal{L}_d = \delta\mathcal{L}_{fr}. \tag{14.285}$$

Relaţiile precedente vor permite să se stabilească următoarele forme finale ale ecuaţiilor staticii sistemelor mecanice:

a) *Ecuaţiile staticii sistemelor mecanice scrise pentru elemente izolate din sistem.* În baza relaţiilor (14.283) şi (14.284), condiţiile de echilibru static (14.272) vor putea fi scrise sub formele

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} + \overline{R}_{ext_i} + \overline{R}_{int_i} = 0; \\ &\overline{\mathcal{M}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathcal{M}}_{int_{a_i}} + \overline{\mathcal{M}}(\overline{R}_{ext_i}) + \overline{\mathcal{M}}(\overline{R}_{int_i}) = 0 \\ &(i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}} \tag{14.286}$$

şi vor reprezenta *ecuaţiile vectoriale ale staticii sistemelor mecanice scrise pentru elemente izolate din sistem.*

În cazul cînd unul, oarecare, din elementele sistemului mecanic va putea fi asimilat cu un punct material, atunci ecuaţiile de echilibru static corespunzătoare lui se vor reduce, ca şi în statica rigidului, numai la ecuaţia de echilibru pentru forţe.

Prin proiectarea ecuaţiilor vectoriale (14.286) pe axele sistemului de referinţă la care este raportată poziţia de echilibru a sistemului mecanic se obţin *ecuaţiile scalare ale staticii sistemelor mecanice scrise pentru elemente izolate din sistem*, aceste ecuaţii avînd deci

formele

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{ext_{a_{ix}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{ix}}} + R_{ext_{ix}} + R_{int_{ix}} = 0\,;\\
&\mathcal{F}_{ext_{a_{iy}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{iy}}} + R_{ext_{iy}} + R_{int_{iy}} = 0\,;\\
&\mathcal{F}_{ext_{a_{iz}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{iz}}} + R_{ext_{iz}} + R_{int_{i_z}} = 0\,;\\
&\mathcal{M}_{ext_{a_{ix}}} + \mathcal{M}_{int_{a_{ix}}} + \mathcal{M}_x(\bar{R}_{ext_i}) + \mathcal{M}_x(\bar{R}_{int_i}) = 0\,;\\
&\mathcal{M}_{ext_{a_{iy}}} + \mathcal{M}_{int_{a_{iy}}} + \mathcal{M}_y(\bar{R}_{ext_i}) + \mathcal{M}_y(\bar{R}_{int_i}) = 0\,;\\
&\mathcal{M}_{ext_{a_{iz}}} + \mathcal{M}_{int_{a_{iz}}} + \mathcal{M}_z(\bar{R}_{ext_i}) + \mathcal{M}_z(\bar{R}_{int_i}) = 0\,;\\
&(t = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{14.287}$$

în cazul sistemelor mecanice spațiale și formele

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{ext_{a_{ix}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{ix}}} + R_{ext_{ix}} + R_{int_{ix}} = 0\,;\\
&\mathcal{F}_{ext_{a_{iy}}} + \mathcal{F}_{int_{a_{iy}}} + R_{ext_{iy}} + R_{int_{iy}} = 0\,;\\
&\mathcal{M}_{ext_{a_i}} + \mathcal{M}_{int_{a_i}} + \mathcal{M}(\bar{R}_{ext_i}) + \mathcal{M}(\bar{R}_{int_i}) = 0\\
&(i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{14.288}$$

în cazul sistemelor mecanice plane.

Ținînd seama de posibilitatea ca unele din elementele sistemului mecanic în echilibru să fie asimilate cu puncte materiale, precum și de posibilitatea aplicării unor sisteme particulare de solicitări, rezultă că pentru întregul sistem mecanic se va dispune de un număr

total de

$$e = \sum_{i=1}^{n} e_i \leqslant 6n \tag{14.289}$$

ecuaţii de echilibru static dacă sistemul mecanic este spaţial şi un număr total de

$$e = \sum_{i=1}^{n} e_i \leqslant 3n \tag{14.290}$$

de ecuaţii scalare de echilibru static în cazul sistemelor mecanice plane, e_i reprezentînd, ca şi în dinamica sistemelor, numărul de ecuaţii scalare ce pot fi scrise pentru elementul (S_i) al sistemului mecanic, iar n reprezentînd numărul total de elemente ale sistemului mecanic.

b) *Ecuaţiile staticii sistemelor mecanice scrise pentru întreg sistemul.* În baza condiţiilor (14.283), condiţiile de echilibru static (14.273) vor lua formele

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (\bar{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}} + \bar{R}_{ext_i}) = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}} + \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_{ext_i}) = 0} \tag{14.291}$$

şi vor reprezenta *ecuaţiile vectoriale ale staticii sistemelor mecanice scrise pentru întregul sistem mecanic.*

Prin proiectarea acestor ecuaţii pe axele reperului fix la care se raportează poziţia de echilibru a sistemului mecanic, rezultă şi *sistemul de ecuaţii scalare ale staticii sistemelor mecanice scrise pentru întreg sistemul mecanic,* aceste ecuaţii avînd deci formele

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} (\mathscr{F}_{ext_{a_{ix}}} + R_{ext_{ix}}) = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{M}_{ext_{a_{ix}}} + \mathfrak{M}_x(\bar{R}_{ext_i})) = 0\,; \\
&\sum_{i=1}^{n} (\mathscr{F}_{ext_{a_{iy}}} + R_{ext_{iy}}) = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{M}_{ext_{a_{iy}}} + \mathfrak{M}_y(\bar{R}_{ext_i})) = 0\,; \\
&\sum_{i=1}^{n} (\mathscr{F}_{ext_{a_{iz}}} + R_{ext_{iz}}) = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{n} (\mathfrak{M}_{ext_{a_{iz}}} + \mathfrak{M}_z(\bar{R}_{ext_i})) = 0,
\end{aligned}} \tag{14.292}$$

Scanned with CamScanner

în cazul sistemelor mecanice spațiale și formele

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{F}_{ext_{a_{ix}}}+R_{ext_{ix}})=0;\\&\sum_{i=1}^{n}(\mathscr{F}_{ext_{a_{iy}}}+R_{ext_{iy}})=0;\\&\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{M}_{ext_{a_i}}+\mathfrak{M}(\bar{R}_{ext_i}))=0,\end{aligned}} \tag{14.293}$$

în cazul sistemelor mecanice plane.

În cazul utilizării acestor ecuații vor rezulta astfel un număr total de

$$e'=6 \tag{14.294}$$

ecuații scalare de echilibru în cazul sistemelor mecanice spațiale și un număr total de

$$e'=3 \tag{14.295}$$

ecuații în cazul sistemelor mecanice plane.

c) *Ecuațiile staticii sistemelor mecanice scrise pentru porțiuni separate din sistem.* Avînd în vedere precizările făcute la început privind natura solicitărilor pasive în condițiile echilibrului static, se vor putea scrie relațiile

$$\sum_s \bar{\mathscr{F}}_{int_{p_s}}=\sum_s \bar{R}_{int_s};\qquad \sum_s \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_s}}=\sum_s \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_{int_s}) \tag{14.296}$$

și deci, ținînd seama și de relațiile (14.283), se vor mai putea scrie condițiile (14.277) de echilibru static al porțiunilor izolate din sistem sub forma

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{i=h+1}^{h+l}(\bar{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}}+\bar{R}_{ext_{a_i}})+\sum_s \bar{\mathscr{F}}_{int_{a_s}}+\sum_s \bar{R}_{int_s}=0\\&\sum_{i=h-1}^{h+l}(\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}}+\overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_{ext_i}))+\sum_s \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_s}}+\sum_s \overline{\mathfrak{M}}(\bar{R}_{int_s})=0,\end{aligned}} \tag{14.297}$$

sub care vor reprezenta *ecuațiile vectoriale ale staticii sistemelor mecanice scrise pentru porțiuni separate din sistem.*

Scanned with CamScanner

Prin proiectarea pe axele reperului fix, la care este raportată poziţia de echilibru a sistemului mecanic, a ecuaţiilor vectoriale precedente, se obţine *sistemul de ecuaţii scalare ale staticii sistemelor mecanice scrise pentru porţiuni izolate din sistem, aceste ecuaţii avînd formele*

$$\sum_{i=h+1}^{h+l}(\mathcal{F}_{ext_{a_{ix}}}+R_{ext_{ix}})+\sum_{s}\mathcal{F}_{int_{a_{sx}}}+\sum_{s}R_{int_{sx}}=0;$$

$$\sum_{i=h+1}^{h+l}(\mathcal{F}_{ext_{a_{iy}}}+R_{ext_{iy}})+\sum_{s}\mathcal{F}_{int_{a_{sy}}}+\sum_{s}R_{int_{sy}}=0;$$

$$\sum_{i=h+1}^{h+l}(\mathcal{F}_{ext_{a_{iz}}}+R_{ext_{iz}})+\sum_{s}\mathcal{F}_{int_{a_{sz}}}+\sum_{s}R_{int_{sz}}=0;$$

$$\sum_{i=h+1}^{h+l}(\mathcal{M}_{ext_{a_{ix}}}+\mathcal{M}_{x}(\bar{R}_{ext_{i}}))+\sum_{s}\mathcal{M}_{int_{a_{sx}}}+\sum_{s}\mathcal{M}_{x}(\bar{R}_{int_{s}})=0;$$

$$\sum_{i=h+1}^{h+l}(\mathcal{M}_{ext_{a_{iy}}}+\mathcal{M}_{y}(\bar{R}_{ext_{i}}))+\sum_{s}\mathcal{M}_{int_{a_{sy}}}+\sum\mathcal{M}_{y}(\bar{R}_{int_{s}})=0;$$

$$\sum_{i=h+1}^{h+l}(\mathcal{M}_{ext_{a_{iz}}}+\mathcal{M}_{z}(\bar{R}_{ext_{i}}))+\sum_{s}\mathcal{M}_{int_{a_{sz}}}+\sum_{s}\mathcal{M}_{z}(\bar{R}_{int_{s}})=0; \tag{14.298}$$

în cazul sistemelor mecanice spaţiale şi formele

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=h+1}^{h+l}(\mathcal{F}_{ext_{a_{ix}}}+R_{ext_{ix}})+\sum_{s}\mathcal{F}_{int_{a_{sx}}}+\sum_{s}R_{int_{sx}}=0;\\
&\sum_{i=h+1}^{h+l}(\mathcal{F}_{ext_{a_{iy}}}+R_{ext_{iy}})+\sum_{s}\mathcal{F}_{int_{a_{sy}}}+\sum_{s}R_{int_{sy}}=0;\\
&\sum_{i=h+1}^{h+l}(\mathcal{M}_{ext_{a_{i}}}+\mathcal{M}(\bar{R}_{ext_{i}}))+\sum_{s}\mathcal{M}_{int_{a_{s}}}+\sum_{s}\mathcal{M}(\bar{R}_{int_{s}})=0,
\end{aligned} \tag{14.299}$$

în cazul sistemelor mecanice plane în echilibru.

Pentru fiecare porţiune separată din sistem se vor putea scrie deci un număr total de

$$e' = 6 \tag{14.300}$$

ecuaţii scalare de echilibru dacă sistemul mecanic este spaţial şi un număr total de

$$e' = 3 \tag{14.301}$$

ecuaţii scalare de echilibru dacă sistemul mecanic este plan.

d) *Ecuaţiile staticii sistemelor mecanice corespunzătoare mecanicii analitice.* Exprimînd lucrurile mecanice virtuale ale solicitărilor active şi disipative ce acţionează asupra sistemului mecanic în echilibru în funcţie de forţele generalizate corespunzătoare şi de deplasările virtuale generalizate — în expresia ultimului lucru mecanic ţinîndu-se seama şi de concluzia (14.285), care permite să se scrie

$$\delta \mathcal{L}_a = \delta \mathcal{L}_{fr} = \sum_{k=1}^{p} Q_{fr_k} \delta q_k, \tag{14.302}$$

unde Q_{fr_k} sînt forţele generalizate de frecare, considerate cunoscute —, condiţia necesară (14.279) pentru asigurarea echilibrului static al unui sistem mecanic va putea fi scrisă sub forma

$$\sum_{k=1}^{p} (Q_{a_k} + Q_{fr_k}) \delta q_k = 0, \tag{14.303}$$

rezultînd de aici, în baza arbitrarietăţii deplasărilor virtuale generalizate δq_k, concluziile

$$\boxed{Q_{a_k} + Q_{fr_k} = 0\,; \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)}, \tag{14.304}$$

care vor reprezenta *ecuaţiile de echilibru static ale mecanicii analitice* pentru sistemul mecanic considerat, numărul acestor ecuaţii fiind egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului, adică cu numărul parametrilor de poziţie independenţi care determină poziţia de echilibru static a sistemului mecanic.

Scanned with CamScanner

În cazul cînd toate legăturile pasive, exterioare și interioare, aplicate unui sistem mecanic în echilibru sînt cu frecare neglijabilă, ($Q_{fr_k} = 0$, $k = 1,2,\ldots,p$), ecuațiile (14.304) se reduc numai la primii termeni din membrul stîng, adică ele iau formele

$$\boxed{Q_{a_k} = 0\,; \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)}\,. \tag{14.305}$$

14.4.2. Problemele și metodele staticii sistemelor de rigide

1°. Problemele staticii sistemelor de rigide

Ca și în cazul problemelor de dinamica sistemelor mecanice, și problemele de statică — considerată, ca de obicei, un caz particular al dinamicii — vor putea conține un număr total de s mărimi scalare necunoscute, dat de relația

$$s = p + f_{ext} + r_{ext} + f_{int} + r_{int}, \tag{14.306}$$

unde p este numărul de parametri de poziție independenți care determină poziția de echilibru static a sistemului mecanic și care urmează să fie determinați din ecuațiile de echilibru, iar ceilalți termeni au semnificațiile cunoscute din dinamica sistemelor mecanice.

De asemenea, tot ca și în dinamica sistemelor mecanice, și problemele staticii sistemelor de rigide, se împart, obișnuit, în două tipuri principale :

— *Probleme de tip direct*, întîlnite în cele mai multe din problemele practice concrete și care se caracterizează prin faptul că poziția de echilibru a sistemului mecanic este cunoscută, rezultînd deci condițiile

$$p = 0\,; \qquad s = f_{ext} + r_{ext} + f_{int} + r_{int}. \tag{14.307}$$

— *Probleme de tip invers* (*fundamental*), în care sînt date toate solicitările active, exterioare și interioare, acest tip de probleme fiind caracterizat deci prin condițiile

$$f_{ext} + f_{int} = 0\,; \qquad s = p + r_{ext} + r_{int}. \tag{14.308}$$

Scanned with CamScanner

Pentru rezolvarea completă a unei probleme de statica sistemelor de rigide este necesar să fie satisfăcută condiţia

$$e = s \tag{14.309}$$

— unde este numărul total de ecuaţii ce pot fi scrise pentru sistemul mecanic în echilibru considerat —, problema fiind numită în acest caz *static determinată*; în cazul cînd numărul necunoscutelor este mai mare decît numărul total de ecuaţii e, problema este *static nedeterminată* şi rezolvarea ei nu este posibilă în cadrul disciplinei de mecanică.

Trebuie făcută şi aici menţiunea că şi în problemele concrete de statica sistemelor nu totdeauna se cere rezolvarea integrală a lor, adică numărul s' de necunoscute cerute a fi determinate poate fi mai mic decît numărul total s de necunoscute pe care le conţine problema.

În consecinţă, şi în statica sistemelor de rigide, ca şi în dinamică, vor putea fi întîlnite următoarele trei situaţii distincte în rezolvarea problemelor de tip fundamental:

Cazul I: *Se cere rezolvarea integrală a problemei*, caz caracterizat prin condiţiile

$$s' = s = p + r_{ext} + r_{int}. \tag{14.310}$$

Cazul II: *Se cere determinarea poziţiei de echilibru static a sistemului mecanic, a reacţiunilor legăturilor pasive exterioare aplicate elementelor sistemului şi a reacţiunilor legăturilor interioare pasive numai dintr-o anumită zonă*, adică

$$s' = p + r_{ext} + r'_{int} < s \tag{14.311}$$

unde $r'_{int} < r_{int}$ este numărul de reacţiuni necunoscute interioare din zona considerată, numărul r'_{int} putînd avea, în particular, şi valoarea zero.

Cazul III: *Se cere determinarea numai a poziţiei de echilibru static a sistemului mecanic*, adică

$$s' = p \tag{14.312}$$

Scanned with CamScanner

2°. Metodele staticii sistemelor de rigide

Rezolvarea problemelor de statica sistemelor de rigide — considerîndu-se, bineînțeles, numai problemele static determinate —, se va face folosindu-se, după caz, una, sau alta, dintre metodele prezentate mai jos, care au la bază una din teoremele generale ale staticii sistemelor mecanice, stabilite în cadrul subpunctului 4.1.1 al acestui paragraf.

— *Metoda separării corpurilor*, bazată pe teorema întîi a staticii sistemelor mecanice și constînd în scrierea ecuațiilor de echilibru pentru fiecare element în parte al sistemului mecanic, considerat complet izolat de restul sistemului, ecuații avînd formele (14.287) în cazul sistemelor mecanice spațiale și formele (14.288) în cazul sistemelor mecanice plane.

Această metodă va fi folosită la rezolvarea tuturor problemelor de tip fundamental care se încadrează în cazul I de la subpunctul precedent.

— *Metoda echilibrului întregului sistem și al părților*, bazată pe teorema a doua a staticii sistemelor mecanice (teorema solidificării) și care constă în a scrie, mai întîi, ecuațiile de echilibru pentru întregul sistem mecanic și apoi și pentru una — sau chiar mai multe — porțiuni considerate complet izolate din sistem, separările făcîndu-se în zonele în care trebuie determinate componentele torsorilor solicitărilor de reacțiune interioară.

Aceasta de a doua metodă va fi folosită la rezolvarea problemelor de tip fundamental care se încadrează în cazul II de la subpunctul precedent, rezolvare care va avea următoarele două etape de lucru :

— Scrierea ecuațiilor de echilibru pentru întregul sistem mecanic — ecuații de forma (14.292) în cazul sistemelor mecanice spațiale și de forma (14.293) în cazul sistemelor mecanice plane —, din care, în cazul satisfacerii condiției

$$e' = p + r_{ext}, \tag{14.313}$$

vor putea fi determinați parametrii care determină poziția de echilibru static a sistemului mecanic și elementele scalare necunoscute din torsorii reacțiunilor legăturilor pasive exterioare aplicate elementelor sistemului mecanic ;

— scrierea ecuațiilor de echilibru static pentru o porțiune complet izolată din sistem, separarea ei făcîndu-se chiar în zona în care

trebuie determinaţi torsorii solicitărilor interioare şi astfel realizată încît numărul elementelor necunoscute din torsorii solicitărilor interioare respective să fie egal cu numărul ecuaţiilor de echilibru ce pot fi scrise pentru acea porţiune, imaginată solidificată, ecuaţii de forma (14.298), respectiv (14.299).

În condiţiile

$$r'_{int} = 0\,; \qquad e' = s' = p + r_{ext} \tag{14.314}$$

rezolvarea problemelor de statica sistemelor mecanice va fi efectuată chiar în prima etapă de lucru.

— *Metoda deplasărilor virtuale*, bazată pe cea de-a treia teoremă generală a staticii sistemelor mecanice şi constînd în scrierea ecuaţiilor de echilibru static sub forma corespunzătoare mecanicii analitice, adică a ecuaţiilor (14.304).

Această metodă poate fi folosită, în primul rînd, la rezolvarea tuturor problemelor de tip fundamental, care se încadrează în cazul III de la subpunctul precedent.

De asemenea, metoda mai poate fi folosită la rezolvarea problemelor de tip direct în care se cere să se determine numai anumite elemente scalare caracterizînd torsorii solicitărilor active aplicate sistemului mecanic, numărul total al acestor elemente fiind egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului mecanic în echilibru ; se înţelege că în acest caz legăturile pasive, exterioare şi interioare, aplicate elementelor sistemului mecanic vor trebui să fie fie cu frecări neglijabile, fie cu frecări cunoscute, cu valorile solicitărilor de frecare determinate, în prealabil, pe altă cale. O asemenea utilizare a metodei va fi ilustrată ulterior, în prezentarea paragrafului „Mecanica maşinilor simple",

În fine, mai trebuie făcută menţiunea că metoda deplasărilor virtuale poate fi folosită şi la determinarea, în unele cazuri, a reacţiunilor legăturilor pasive interioare aplicate elementelor sistemului mecanic în echilibru, dar în următoarele condiţiuni :

— legătura pasivă interioară, pentru care se cere determinarea reacţiunilor, să fie exprimată prin o singură ecuaţie de legătură, astfel încît să-i corespundă un singur element scalar necunoscut în torsorul reacţiunilor, acesta fiind modulul-respectiv valoarea scalară — a reacţiunii de direcţie cunoscută ;

— toate legăturile pasive aplicate sistemului mecanic, exterioare şi interioare, inclusiv cele pentru care trebuie determinate reacţiunile, să fie cu frecare cunoscută sau neglijabilă ;

Scanned with CamScanner

— poziția de echilibru static a sistemului mecanic să fie cunoscută, adică problema să fie de tip direct ($p = 0$).

Procedeul general de rezolvare a problemelor de statică în condițiile precizate mai sus constă în suprimarea legăturilor pasive din punctele de legătură în care trebuie determinate reacțiunile interioare — fapt care va transforma sistemul mecanic dintr-un sistem mecanic cu zero grade de libertate într-un sistem cu un număr de grade de libertate egal cu numărul legăturilor desființate — și prin considerarea reacțiunilor acestor legături desființate ca solicitări exterioare active cu direcții cunoscute dar cu mărimi care vor trebui determinate; este suficient apoi să se egaleze cu zero forțele generalizate — în număr egal, și ele, cu numărul legăturilor desființate și calculate ținîndu-se seama nu numai de solicitările active propriu zise, ci și de cele considerate ca atare în urma desființării legăturilor —, pentru a se obține astfel sistemul de ecuații din care vor rezulta reacțiunilor interioare necunoscute.

Această ultimă variantă de utilizare a metodei deplasărilor virtuale este foarte des folosită în cazurile cînd se cere să se determine o singură reacțiune interioară necunoscută și cînd, prin desființarea legăturii interioare respective, sistemul mecanic în echilibru, se transformă într-un sistem cu un singur grad de libertate, căruia îi va corespunde o singură forță generalizată egalată cu zero, din care va rezulta reacțiunea necunoscută. În această din urmă situație, și pentru sisteme mecanice plane, rezolvarea problemei poate fi și mai mult simplificată prin considerarea ca poli în rigide, la calculul lucrului mecanic virtual și al forțelor generalizate, a centrelor instantanee de rotație ale acestora, centre care pot fi determinate pe baza teoremei coliniarității lor, demonstrată în cinematica sistemelor de rigide.

Într-adevăr prin alegerea polilor în centrele instantanee de rotație ale rigidelor, corespunzătoare poziției pe care o au acestea în momentul echilibrului, centre caracterizate după cum se știe prin, viteze egale cu zero și deci și prin deplasări virtuale egale cu zero adică

$$\delta \bar{r}_{C_{i0}} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

expresia lucrului mecanic virtual al solicitărilor aplicate sistemului mecanic va lua forma simplificată

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}_{C_{i0}} \delta\overline{\Theta}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_{C_{i0}} \delta\varphi_i,$$

$\mathfrak{M}_{C_{i0}}$ fiind valorile scalare, raportate la versorul axei Oz, ale momentelor rezultante în centrele instantanee de rotaţie C_{i0} ale solicitărilor la care sînt supuse elementele (S_i) ale sistemului mecanic în echilibru.

Relaţiei precedente îi va corespunde, în cazul sistemului mecanic în echilibru transformat într-un sistem dinamic cu un singur grad de libertate, condiţia de echilibru

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_{C_{i0}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q} = 0, \tag{14.315}$$

q fiind coordonata lagrangeiană a noului sistem mecanic, aceasta fiind, de regulă, un unghi de rotaţie al unuia din elementele sistemului (obişnuit, al porţiunii rigide din sistem căreia îi este aplicată o articulaţie fixă).

§15. Integrarea ecuaţiilor diferenţiale ale dinamicii sistemelor mecanice

15.1. *Forme generale ale ecuaţiilor diferenţiale ale dinamicii sistemelor mecanice*

15.1.1. Forma normală a ecuaţiilor diferenţiale ale mişcării unui sistem mecanic

Întrucît, în cazul coincidenţei coordonatelor generalizate ale unui sistem mecanic în mişcare cu parametrii lui de poziţie independenţi $(q_j = w_j;\ j = 1,2,\ldots,p)$, ecuaţiile lui Lagrange de specia a doua vor coincide şi ele cu ecuaţiile diferenţiale ale mişcării care s-ar obţine prin eliminarea reacţiunilor necunoscute din sistemul de ecu-

aţii (14.68) —, respectiv (14.70) pentru sistemele mecanice plane — şi după exprimarea, cu ajutorul ecuaţiilor de legătură interioară, a parametrilor de poziţie dependenţi ai sistemului mecanic în funcţie de cei independenţi, se va considera, în continuare, numai forma lagrangeiană a acestor ecuaţii, adică

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_k} = Q_{a_k} + Q_{d_k}, \qquad (15.1)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

cu energia cinetică a sistemului avînd expresia generală (13.92), adică

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} g_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{p} g_{i0}\,\dot{q}_i + \frac{1}{2}\,g_{00}, \qquad (15.2)$$

cu derivatele parţiale ale energiei cinetice în raport cu vitezele generalizate date de relaţiile (14.237), adică

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{p} g_{ki}\,\dot{q}_i + g_{k0} \qquad (15.3)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

şi cu derivatele parţiale ale ei în raport cu coordonatele generalizate avînd expresiile

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j + \sum_{=1}^{p} \frac{\partial q_{i0}}{\partial q_k} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial q_k}. \qquad (15.4)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

Înlocuind expresiile (15.3) şi (15.4) în sistemul (15.1) de ecuaţii Lagrange de specia a doua, acestea vor lua formele

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{p} g_{ki}\,\dot{q}_i + g_{k0}\right] - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j - \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g_{i0}}{\partial q_k}\,\dot{q}_i -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial q_k} = Q_{a_k} + Q_{d_k},$$

$$(k = 1, 2, \ldots . p)$$

Scanned with CamScanner

sau încă, efectuînd derivarea totală în raport cu timpul a primului grup de termeni şi grupînd convenabil apoi termenii, astfel încît să se poată scoate în factori derivatele de ordinul întîi şi doi în raport cu timpul ale coordonatelor generalizate, mai rezultă

$$\sum_{i=1}^{p} g_{ki}\,\ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{p}\left[\frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\right]\dot{q}_i\,\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{p}\left[\frac{\partial g_{k0}}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial g_{i0}}{\partial q_k}\right]\dot{q}_i + \left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial q_k}\right) = Q_{a_k} + Q_{d_k}. \qquad (15.5)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

Se observă însă că pot fi scrise relaţiile

$$\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j = \sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial g_{kj}}{\partial q_i}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i\,\dot{q}_j \qquad (15.6)$$

şi

$$\frac{\partial g_{k0}}{\partial t} = \frac{\partial g_{0k}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial t} + \frac{\partial g_{0k}}{\partial t}\right), \qquad (15.7)$$

în baza cărora ecuaţiile (15.5) vor putea fi aduse la forma

$$\sum_{i=1}^{p} g_{ki}\,\ddot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\,\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial q_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial g_{ki}}{\partial t} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial q_{k0}}{\partial t} + \frac{\partial g_{0k}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial q_k}\right) = Q_{a_k} + Q_{d_k}. \qquad (15.8)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

Scanned with CamScanner

Introducînd notațiile

$$c_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\right) = c_{ij}^{k}(q;t); \tag{15.9}$$

$$c_{0i}^{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial q_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial t} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial q_k}\right) = c_{0i}^{k}(q;t) \tag{15.10}$$

și

$$c_{00}^{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial t} + \frac{\partial g_{0k}}{\partial t} - \frac{\partial g_{00}}{\partial g_k}\right) = c_{00}^{k}(q;t) \tag{15.11}$$

mărimile c_{ij}^{k}, c_{0i}^{k} și c_{00}^{k} fiind echivalente *simbolurilor lui Christoffel de specia întîi* în notațiile tensoriale, ecuațiile (15.8) vor mai lua formele

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} g_{ki}\,\ddot{q}_i + \sum_{i,j=1}^{p} c_{ij}^{k}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j + 2\sum_{i=1}^{p} c_{0i}^{k}\,\dot{q}_i + c_{00}^{k} = Q_{a_k} + Q_{d_k}. \quad (k = 1, 2 \ldots,)p)} \tag{15.12}$$

Considerînd, în continuare, determinantul format din coeficienții derivatelor de ordinul doi în raport cu timpul ale parametrilor lagrangeieni din sistemul (15.12) de ecuații, adică

$$g = |g_{ki}| = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1i} & \cdots & g_{1p} \\ g_{21} & \cdots & g_{2i} & \cdots & g_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{ki} & \cdots & g_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_{p1} & \cdots & g_{pi} & \cdots & g_{pp} \end{vmatrix}, \tag{15.13}$$

determinant despre care s-a mai amintit și cu un alt prilej că este diferit de zero ca urmare a faptului că forma pătratică în vitezele

generalizate din expresia energiei cinetice este pozitiv definită, se vor nota cu g_{gh}^* complementii algebrici normați ai elementelor g_{kh} din determinantul (15.13), adică mărimile

$$g_{kh}^* = (-1)^{(k+h)} \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1,h-1} & g_{1,h+1} & \cdots & g_{1p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k-1,1} & \cdots & g_{k-1,h-1} & g_{k-1,h+1} & \cdots & g_{k-1,p} \\ g_{k+1,1} & \cdots & g_{k+1,h-1} & g_{k+1,h+1} & \cdots & g_{k+1,p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{p,1} & \cdots & g_{p,h-1} & g_{p,h+1} & \cdots & g_{pp} \end{vmatrix}}{g}, \quad (15.14)$$

fapt care permite să se scrie, așa cum se știe din teoria determinanților, condițiile

$$\sum_{k=1}^{p} g_{ki}\, g_{kh}^* \begin{cases} = 1, & \text{pentru } i = h; \\ = 0, & \text{pentru } i \neq h. \end{cases} \quad (15.15)$$

Revenind la sistemul de ecuații (15.12), se vor înmulți aceste ecuații cu complementii algebrici normați g_{kh}^*, însumîndu-se apoi ecuațiile astfel înmulțite după indicele k, rezultînd astfel următorul sistem de p egalități, corespunzătoare celor p valori posibile ale indicelui h:

$$\sum_{k=1}^{p} g_{kh}^* \sum_{i=1}^{p} g_{ki}\, \ddot{q}_i + \sum_{k=1}^{p} g_{kh}^* \sum_{i,j=1}^{p} c_{ih}^k\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j + 2 \sum_{k=1}^{p} g_{kh}^* \sum_{i=1}^{p} c_{0i}^k\, \dot{q}_i +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} g_{kh}^*\, c_{00}^k = \sum_{k=1}^{p} g_{kh}^*\, Q_{a_k} + \sum_{k=1}^{p} g_{kh}^*\, Q_{d_k}. \quad (15.16)$$

$$(h = 1, 2, \ldots, p)$$

Se va observa mai întîi că în baza condițiilor (15.15), primul grup de termeni din membrul stîng al relației precedente ia valoarea

$$\sum_{k=1}^{p} g_{kh}^* \sum_{i=1}^{p} g_{ki}\, \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} g_{kh}^*\, g_{ki} \right) \ddot{q}_i = \ddot{q}_h, \quad (15.17)$$

Scanned with CamScanner

deoarece în suma după indicele i va rămîne, în condiţiile (15.15), numai termenul pentru care indicele i ia valoarea h.

De asemenea, pentru următoarele trei grupuri de termeni din membrul stîng al ecuaţiilor (15.16) vor putea fi scrise expresiile

$$\sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*} \sum_{i,j=1}^{p} c_{ij}^{k}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j = \sum_{i,j=1}^{p} \left[\sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*}\, c_{ij}^{k} \right] \dot{q}_i\, \dot{q}_j = \sum_{i,j=1}^{p} e_{ij}^{h}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \,; \tag{15.18}$$

$$\sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*} \sum_{i=1}^{p} c_{0i}^{k}\, \dot{q} = \sum_{i=1}^{p} \left[\sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*}\, c_{0i}^{k} \right] \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{p} e_{0i}^{h}\, \dot{q}_i \tag{15.19}$$

şi

$$\sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*}\, c_{00}^{k} = e_{00}^{h}, \tag{15.20}$$

unde mărimile

$$e_{ij}^{h} = \sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*}\, c_{ij}^{k} \,; \quad e_{0i}^{h} = \sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*}\, c_{0i}^{k} \,; \quad e_{00}^{h} = \sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*}\, c_{00}^{k} \tag{15.21}$$

corespund, în notaţiile tensoriale, *simbolurilor lui Christoffel de specia a doua.*

Introducînd şi notaţiile

$$\sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*}\, Q_{a_k} = Q_{a_h}^{*} \,; \quad \sum_{k=1}^{p} g_{kh}^{*}\, Q_{d_k} = Q_{d_h}^{*} \tag{15.22}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, p)$$

şi ţinînd seama şi de relaţiile (15.17), (15.18), (15.19) şi (15.20), egalităţile (15.16) vor mai putea fi scrise sub formele

$$\boxed{\ddot{q}_h + \sum_{i,j=1}^{p} e_{ij}^{h}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j + 2 \sum_{i=1}^{p} e_{0i}^{h}\, \dot{q}_i + e_{00}^{h} = Q_{a_h}^{*} + Q_{d_h}^{*}} \tag{15.23}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, p)$$

Scanned with CamScanner

ele reprezentînd *ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului mecanic sub forma normală.*

În cazul sistemelor mecanice scleronome fiind valabile condițiile

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial t} \equiv 0\,; \quad g_{k0} \equiv 0\,; \quad g_{00} \equiv 0, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, p) \tag{15.24}$$

cu consecințele

$$c^k_{0i} = 0\,; \quad c^k_{00} = 0\,; \quad (i, k = 1, 2, \ldots, p) \tag{15.25}$$

și deci

$$e^h_{0i} = 0\,; \quad e^h_{00} = 0\,; \quad (i, h = 1, 2, \ldots,)p) \tag{15.26}$$

ecuațiile (15.23) vor lua formele

$$\boxed{\ddot{q}_h + \sum_{i,j=1}^{p} e^h_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j = Q^*_{a_h} + Q^*_{d_h} \atop (h = 1, 2, \ldots, p)}\,. \tag{15.27}$$

Formele (15.12) și (15.23) ale ecuațiilor diferențiale ale mișcării unui sistem mecanic confirmă din nou afirmația făcută în paragraful precedent cu privire la faptul că aceste ecuații formează un sistem de p ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi în p funcții necunoscute de timp, acestea din urmă fiind reprezentate prin coordonatele generalizate ale sistemului mecanic.

15.1.2. Ecuația cu derivate parțiale Hamilton — Jacobi

O altă formă de prezentare a ecuațiilor diferențiale ale mișcării unui sistem mecanic, care permite, de asemenea, discutarea posibilității de integrare a lor, poate fi obținută, în cazul sistemelor (14.251) de ecuații canonice ale lui Hamilton, adică

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H^*}{\partial h_k}\,; \quad \dot{h}_k = -\frac{\partial H^*}{\partial q_k}, \tag{15.28}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

Scanned with CamScanner

ecuații care puteau a fi deduse, la rîndul lor, plecîndu-se de la o relație variațională analogă relației (14.206) care exprima principiul Hamilton-Ostrogradski, adică

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L}\, dt = 0, \tag{15.29}$$

prin înlocuirea, pe de o parte, în baza relației (14.248) de definiție a funcției caracteristice a lui Hamilton, a potențialului cinetic lagrangeian cu expresia

$$\mathfrak{L} = \sum_{i=1}^{p} h_i \dot{q}_i - \mathcal{H}^* \tag{15.30}$$

și, pe de altă parte, prin considerarea ca independente între ele și luînd valori zero pentru valorile extreme ale intervalului de integrare $[t_0, t_1]$, nu numai a variațiilor δq_i, ale parametrilor lagrangeieni de poziție — ca în formularea obișnuită a principiului Hamilton-Ostrogradski —, ci și a variațiilor δh_j ale impulsurilor generalizate.

Se poate spune deci că ecuațiile (15.28) sînt echivalente ecuației variaționale

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{p} h_i\, dq_i - H^* dt \right] = 0, \tag{15.31}$$

cu condiția de a se considera variațiile δq_j și δh_j independente între ele și egale cu zero pentru momentele extreme ale intervalului de integrare.

Această variație a acțiunii hamiltoniene a unui sistem mecanic conservativ va putea fi calculată comparîndu-se mișcarea reală a sa, efectuată într-un interval de timp $[t_0, t_1]$, cu un anumit tip de mișcare variată, în care variațiile parametrilor lagrangeieni de poziție să se efectueze în concordanță cu o lege temporală determinată $\delta t = \delta t(t)$, adică să fie de forma

$$\delta q_j = \delta q_j(t + \delta t), \ (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{15.32}$$

funcția $\delta t(t)$ satisfăcînd însă condițiile

$$\delta t\,(t_0) = \delta t(t_1) = 0 \tag{15.33}$$

și cu operatorii δ și d consideraţi și acum independenţi între ei atunci cînd sînt aplicaţi succesiv timpului t, adică

$$d(\delta t) = \delta\,(dt). \tag{15.34}$$

Mișcarea reală efectuată în intervalul de timp $[t_0, t_1]$ va fi reprezentată în graficele $q_j = q_j(t)$, (fig. 15.1), prin curbele (Γq_j),

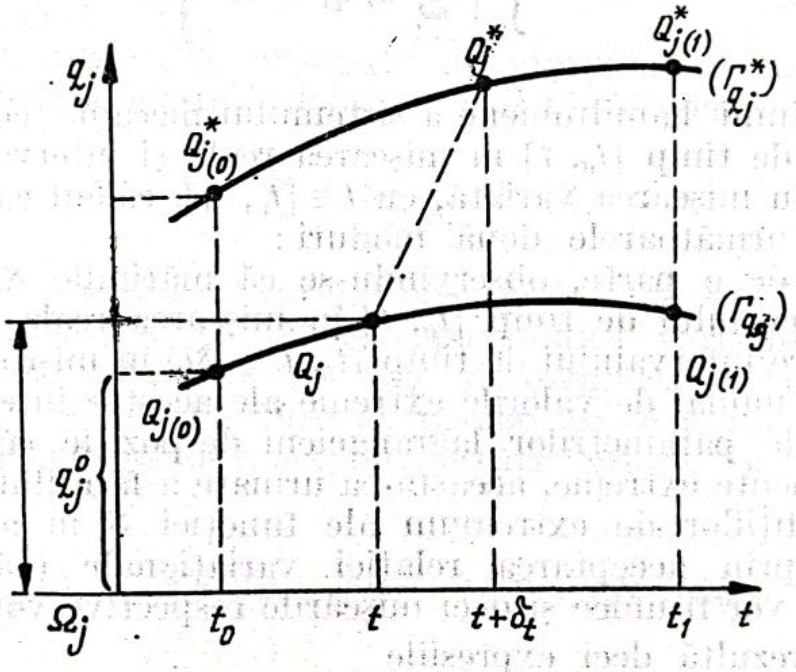


Fig. 15.1

momentelor t_0, t_1 și $t \in [t_0, t_1]$ corespunzîndu-le pe curbe punctele $Q_{j(0)}(t_0\,;\, q_j(t_0))$, $Q_{j(1)}(t_1, q_j(t_1))$ și $Q_j(t\,;\, q_j)$. Mișcarea variată menţionată va fi definită prin ecuaţiile

$$q_j^* = q_j(t) + \delta q_j(t + \delta t) \approx q_j + \delta q_j, \tag{15.35}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

cu

$$q_j^*(t_0) = q_j(t_0) + \delta q_j(t_0) \tag{15.36}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

ca urmare a condițiilor (15.33) și va fi reprezentată, în graficele din figura 15.1, prin curbele $(\Gamma^*_{q_j})$, momentelor t_0, t_1 și $t \in [t_0, t_1]$ corespunzîndu-le pe aceste din urmă curbe punctele $Q^*_{j(0)}(t_0;\ q_j(t_0) + \delta q_j(t_0))$, $Q^*_{j(1)}(t_1; q_j(t_1) + \delta q_j(t_1)$ și $Q^*_j(t + \delta t_i\ q_j + \delta q_j)$, $(j = 1,2,\ldots, p)$.

Cu aceasta, se va putea trece la calculul variației mărimii

$$S = \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{i=1}^{p} h_i\, \dot{q}_i - H^* \right] dt, \tag{15.37}$$

analogă acțiunii hamiltoniene a sistemului mecanic corespunzătoare intervalului de timp $[t_0, t]$ în mișcarea reală și intervalului de timp $[t_0, t + \delta t]$ în mișcarea variată, cu $t \in [t_0, t_1]$, calcul care va putea fi efectuat în următoarele două moduri:

— Pe de o parte, observîndu-se că mărimile S — corespunzătoare intervalului de timp $[t_0, t]$ în mișcarea reală — și S^* — corespunzătoare intervalului de timp $[t_0, t + \delta t]$ în mișcarea variată — vor depinde numai de valorile extreme ale acestor intervale de timp și de valorile parametrilor lagrangeieni de poziție corespunzătoare acestor momente extreme, aceasta ca urmare a faptului că prin satisfacerea condițiilor de extremum ale funcției S în aceste mișcări, confirmată prin acceptarea relației variaționale (15.31), curbele (Γ_{q_j}) și $(\Gamma^*_{q_j})$ vor fi unice și deci mișcările respective vor fi precis determinate; rezultă deci expresiile

$$S = S\,(q_1\,(t_0)\,, \ldots, q_p\,(t_0)\ ; q_1, \ldots, q_p\,; t) \tag{15.38}$$

pentru mișcarea reală efectuată în intervalul de timp $[t_0, t]$ și

$$S^* = S(q_1\,(t_0) + \delta q_1(t_0), \ldots, q_p(t_0) + \delta q_p(t_0)\,;\ q_1 + \delta q_1, \ldots, q_p + \delta q_p\,; t + \delta t) \tag{15.39}$$

pentru mișcarea variată efectuată în intervalul de timp $[t_0, t + \delta t]$.

Dezvoltînd în serie Taylor, în jurul valorilor $q_j(t_0)$, q_j și t, expresia lui S^*, considerată ca o funcție de variabilele $q_j(t_0)$, q_j și t, $(j = 1,2,\ldots, p)$ și ținînd seama și de relația (15.38), se mai poate scrie

$$S^* = S + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S}{\partial q_i(t_0)}\, \delta q_j(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S}{\partial q_i}\, \delta q_i + \frac{\partial S}{\partial t}\, \delta t, \tag{14.40}$$

Scanned with CamScanner

rezultînd astfel următoarea expresie pentru variaţia mărimii S, definită prin relaţia (15.37) :

$$\delta S = S^* - S = \sum_{i=1}^{p} \frac{\delta S}{\partial q_i(t_0)} \delta q_i(t_0) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial S}{\partial t} \delta t ; \tag{15.41}$$

— pe de altă parte, prin calculul variaţiei δS plecîndu-se direct de la relaţia (14.37).

Pentru mişcarea reală, efectuată în intervalul de timp $[t_0, t]$, cu $t \in [t_0, t_1]$, valoarea acestei mărimi va fi dată de relaţia

$$S = \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{i=1}^{p} h_i \, \delta q_i - H^* \, dt \right] \tag{15.42}$$

Considerînd şi mişcarea variată efectuată în intervalul de timp $[t_0, t + \delta t]$, momentului $t + \delta t$ corespunzîndu-i variaţiile δh_j ale impulsurilor generalizate, variaţiile δq_j ale parametrilor lagrangeieni de poziţie şi variaţia δH^* a funcţiei caracteristice a lui Hamilton, mărimea S^*, corespunzătoare acestei mişcări variate, va fi determinată prin relaţia

$$S^* = \int_{t_0}^{t+\delta t} \left\{ \sum_{i=1}^{p} (h_i + \delta h_i) \, d(q_i + \delta q_i) - (H^* + \delta H^*) \, d(t + \delta t) \right\} \simeq$$

$$\simeq \int_{t_0}^{t} \left\{ \sum_{i=1}^{p} (h_i + \delta h_i) \, d(q_i + \delta q_i) - (H^* + \delta H^*) \, d(t + \delta t) \right\}, \tag{15.43}$$

aproximarea fiind justificată de ordinul de mărime al variaţiei δt a timpului şi de aplicarea teoremei medii integralei efectuată în intervalul de timp de la t la $t + \delta t$.

Efectuînd calculele în relaţia (15.43) şi ordonînd convenabil termenii, se mai poate scrie următoarea expresie pentru mărimea S^* :

$$S^* = \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{i=1}^{p} h_i \, dq_i - H^* \, dt \right] + \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{i=1}^{p} h_i \, d(\delta q_i) - H^* \, d(\delta t) \right] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{p} (\delta h_i \, dq_i + \delta h_i \, d(\delta q_i)) - (\delta H^* \, dt + \delta H^* \, d(\delta t)) \Big],$$

Scanned with CamScanner

sau încă, remarcînd că primul termen din membrul drept reprezintă mărimea S, corespunzătoare mişcării reale, determinată prin relaţia (15.42), şi că, în baza aproximărilor permise în analiză, ultima integrală, conţinînd infiniţi mici de ordin superior, poate fi neglijată, se va mai putea scrie

$$S^* = S + \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{i=1}^{p} h_i \, d(\delta q_i) - H^* \, d(\delta t) \right]. \qquad (15.44)$$

Integrala din membrul drept al ultimei relaţii poate fi adusă însă la forma

$$\int_{t_0}^{t} \left[\sum_{i=1}^{p} h_i \, d(\delta q_i) - H^* \, d(\delta t) \right] = \int_{t_0}^{t} d\left[\sum_{i=1}^{p} h_i \, \delta q_i - H^* \, \delta t \right] -$$

$$- \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{i=1}^{p} dh_i \, \delta q_i - d\, H^* \, \delta t \right],$$

sau încă, neglijînd şi acum termenii conţinînd infiniţi mici de ordin superior, mai rezultă

$$\int_{t_0}^{t} \left[\sum_{i=1}^{p} h_i \, d(\delta q_i) - H^* \, d\,(\delta t) = \int_{t_0}^{t} d\left[\sum_{i=1}^{p} h_i \, \delta q_i - H^* \, \delta t \right] = \right.$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{p} h_i \, \delta q_i - H^* \, \delta t \right] \Bigg|_{t=t_0}^{t}$$

adică

$$\int_{t_0}^{t} \left[\sum_{i=1}^{q} h_i \, d(\delta q_i) - H^* \, d(\delta t) \right] = \sum_{i=1}^{p} h_i \, \delta q_i - H^* \, \delta t - \sum_{i=1}^{p} h_i(t_0) \, \delta q_i \, (t_0) \qquad (15.45)$$

În baza ultimei relaţii, egalitatea (15.44) va lua forma

$$S^* = S + \sum_{i=1}^{p} h_i \, \delta q_i - H^* \, \delta t - \sum_{i=1}^{p} h_i \, (t_0) \, \delta q_i \, (t_0) \qquad (15.46)$$

Scanned with CamScanner

și deci expresia variației mărimii S va mai putea fi scrisă sub forma

$$\delta S = S^* - S = -\sum_{i=1}^{p} h_i(t_0)\,\delta q_i(t_0) + \sum_{i=1}^{p} h_i\,\delta q_i - H^*\,\delta t. \tag{15.47}$$

Compararea relațiilor (15.41) și (15.47) permite să se scrie consecințele

$$h_i(t_0) = -\frac{\partial S}{\partial q_i(t_0)}\,; \quad h_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}\,; \quad H^* = -\frac{\partial S}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15.48}$$

Observînd acum că în ultima dintre relațiile precedente, scrisă sub forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^* = 0, \tag{15.49}$$

funcția caracteristică a lui Hamilton, care depinde, așa cum s-a arătat în paragraful precedent, de variabilele canonice și de timp — dacă funcția potențială conține în mod explicit timpul —, adică este de forma

$$H^* = \sum_{i=1}^{p} h_i\,\dot{q}_i - \mathfrak{L} = H^*(q; h; t), \tag{15.50}$$

poate fi exprimată, în baza celei de-a doua serii de relații (15.48), ca o funcție de parametrii lagrangeieni de poziție, de derivatele parțiale ale funcției S în raport cu coordonatele generalizate și de timp explicit, adică

$$H^* = H^*\left(q; \frac{\partial S}{\partial q}\,; t\right), \tag{15.51}$$

se va mai putea scrie ecuația (15.49) sub forma

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + H^*\left(q; \frac{\partial S}{\partial q}\,; t\right) = 0} \tag{15.52}$$

Scanned with CamScanner

cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de *ecuația cu derivate parțiale Hamilton-Jacobi.*

Posibilitatea de integrare completă a acestei ecuații diferențiale cu derivate parțiale în funcția $S = S(q; q(t_0); t)$ va permite, așa cum se va arăta în cadrul subpunctului următor, să se găsească soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării sistemului mecanic considerat, adică ecuațiile finite ale mișcării lui.

15.2. *Integrale prime ale sistemului de ecuații diferențiale ale dinamicii sistemelor mecanice*

Rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor mecanice, care implică, în primul rînd, integrarea sistemului de ecuații diferențiale ale mișcărilor lor, poate fi mult ușurată în unele cazuri dacă sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării unui sistem mecanic concret admite *integrale prime*, adică, atunci cînd pot fi găsite, prin diverse mijloace, un număr oarecare — care nu va putea depăși, evident, numărul gradelor de libertate ale sistemului mecanic considerat — de funcții independente între ele, depinzînd de parametrii de poziție lagrangeieni ai acelui sistem mecanic, de derivatele lor în raport cu timpul — sau de impulsurile generalizate — și de timp, precum și de un număr egal de constante arbitrare și care să satisfacă sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării sistemului mecanic studiat.

Aceste integrale prime, exprimate matematic prin relații de forma

$$F_k = F_k(q; \dot{q}; t) = C_k \qquad (15.53)$$
$$(k = 1, 2, \ldots,)$$

sau

$$\Phi_k = \Phi_k(q; h; t) = C_k \qquad (15.54)$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

unde C sînt constante ce vor putea fi determinate impunîndu-se condiția ca relațiile (15.53), sau (15.54), să fie satisfăcute de sistemul de condiții inițiale

$$t = 0: \{q_j(0) = q_j^0; \quad \dot{q}_i(0) = \dot{q}_j^0; \quad (j = 1, 2, \ldots, p)\} \qquad (15.55)$$

Scanned with CamScanner

respectiv

$$t = 0 : \{q_j(0) = q_j^0 ; \quad h_j(0) = h_j^0 ; \quad (j = 1, 2, \ldots, p)\}, \quad (15.56)$$

reflectă anumite proprietăţi fizice ale mişcărilor unor sisteme mecanice concrete, care se deplasează în condiţii particulare de solicitare exterioară şi interioară.

În multe situaţii, aceste integrale prime pot fi găsite cu destulă uşurinţă, ca urmare a formelor particulare pe care le pot lua uneori ecuaţiile diferenţiale ale mişcării unor sisteme mecanice; alteori, pentru găsirea acestor integrale prime va trebui să se apeleze la anumite metode, sau chiar anumite tehnici de calcul.

În continuare, vor fi prezentate unele din situaţii menţionate mai sus, în care se pot găsi integralele prime, precum şi unele din metodele de determinare a unor asemenea integrale prime.

15.2.1. Integralele impulsurilor generalizate

Aceste integrale pot fi scrise pentru sistemele mecanice conservative, deci cu mişcările descrise prin sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} = 0, \quad (15.57)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

în cazurile cînd funcţia lui Lagrange nu depinde de una, sau de mai multe, din coordonatele generalizate.

Într-adevăr, dacă funcţia lui Lagrange nu depinde de coordonata lagrangeiană q_j, fapt care se va traduce matematic prin condiţia

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_j} = 0, \quad (15.58)$$

atunci ecuaţia lui Lagrange corespunzătoare gradului de libertate j din sistemul (15.57) se va reduce numai la primul termen, adică se va scrie

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0, \quad (15.59)$$

Scanned with CamScanner

rezultînd de aici, prin integrare, concluzia

$$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_j} = C_j}, \tag{15.60}$$

C_j fiind o contantă de integrare.

Observînd că în baza relației (14.204) de definiție a potențialului cinetic se poate scrie egalitatea

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_j} = h_j \tag{15.61}$$

și ținînd seama de faptul că în cazul sistemelor mecanice scleronome expresiile (15.3) ale impulsurilor generalizate se reduc numai la primul grup de termeni, vor mai rezulta următoarele forme pentru relațiile (15.60):

$$\sum_{i=1}^{p} g_{ji}\, \dot{q}_i = F_j(q\,;\, \dot{q}\,;\, t) = C_j, \tag{15.62}$$

respectiv

$$h_j = \Phi_j(h_j) = C_j \tag{15.63}$$

reprezentînd particularizări ale relațiilor (15.53) și (15.54); relația (15.63) explică acum și denumirea de *integralele impulsurilor generalizate*, care se mai poate da relațiilor (15.60).

Coordonatele q_j, care nu figurează în expresia funcției lui Lagrange și pentru care se obțin deci integrale prime de forma (15.60), se numesc *coordonate ciclice*, sau încă, *coordonate ignorabile*.

15.2.2. Integrala energiei a lui Hamilton

Această integrală primă se obține tot în cazul sistemelor mecanice conservative, cu funcția potențială — și deci și cu funcția lui Lagrange — nedepinzînd explicit de timp, rezultînd de aici că ecuațiile diferențiale ale mișcărilor acestor sisteme vor putea fi scrise sub

formele (15.57), cu

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(q\,;\,\dot{q}). \tag{15.64}$$

Prin înmulţirea ecuaţiei corespunzătoare gradului de libertate k cu deplasarea generalizată elementară reală respectivă dq_k şi prin însumarea, apoi, a acestor ecuaţii astfel înmulţite, scrise pentru toate cele p grade de libertate ale sistemului mecanic, rezultă egalitatea

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) dq_k - \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k}\, dq_k = 0. \tag{15.65}$$

Întrucît derivata totală în raport cu timpul este definită ca un raport de diferenţiale, primul grup de termeni din membrul stîng al relaţiei (15.65) mai poate fi scris sub forma

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) dq_k = \sum_{k=1}^{p} d\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^{p} d\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) \dot{q}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} d\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\, \dot{q}_k\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\, d\dot{q}_k = d\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\, \dot{q}_k\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\, d\dot{q}_k,$$

în baza căreia egalitatea (15.65) va mai lua forma

$$d\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\, \dot{q}_k\right) - \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k}\, dq_k + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\, d\dot{q}_k\right] = 0. \tag{15.66}$$

Este suficient să se observe acum că avînd în vedere expresia (15.64) a funcţiei lui Lagrange cel de-al doilea grup de termeni din membrul stîng al relaţiei (15.66) va reprezenta diferenţiala totală a funcţiei lui Lagrange, pentru ca această din urmă relaţie să poată fi scrisă sub forma

$$d\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}\, \dot{q}_k - \mathfrak{L}\right) = 0 \tag{15-67}$$

În baza relaţiilor (14.204) şi (14.248) de definiţie a funcţiei lui Lagrange şi a funcţiei caracteristice a lui Hamilton, expresia din

paranteza din membrul stîng al relaţiei (15.67) va căpăta însă următoarea semnificaţie :

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^{p} h_k \dot{q}_k - L = H^* \tag{15.68}$$

ceea ce face ca relaţia (15.67) să capete forma

$$dH^* = 0, \tag{15.69}$$

cu consecinţa

$$\boxed{H^* = h}, \tag{15.70}$$

această ultimă relaţie reprezentînd *integrala energiei a lui Hamilton* denumire justificată de faptul că, în condiţiile precizate, funcţia caracteristică a lui Hamilton coincide cu energia mecanică a sistemului mecanic şi deci constanta de integrare h reprezintă chiar constanta energiei.

Într-adevăr, în cazul sistemelor mecanice conservative expresia energiei cinetice a sistemului mecanic se reduce numai la forma pătratică în vitezele generalizate, adică

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} \sum_{i,i=1}^{p} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j,$$

cu

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^{p} g_{kj} \dot{q}_j,$$

fapt care permite să se scrie

$$H^* = \sum_{k=1}^{p} h_k \dot{q}_k - H = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - (\mathscr{E} - V) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} g_{kj} \dot{q}_j \right) \dot{q}_k -$$

$$- (\mathscr{E} - V) = \sum_{j,k=1}^{p} g_{kj} \dot{q}_j \dot{q}_k - (\mathscr{E} - V) = 2\mathscr{E} - (\mathscr{E} - V),$$

adică

$$H^* = \mathscr{E} + V \tag{15.71}$$

În cazul cînd constanta aditivă, pînă la care este determinată funcţia potenţială V, este aleasă astfel încît valoarea acestei funcţii pentru poziţia de echilibru static a sistemului mecanic să fie zero, funcţia potenţială V va reprezenta chiar energia potenţială a sistemului mecanic ($V = \mathscr{E}_p$) şi deci relaţia (15.70) va lua forma

$$H^* = \mathscr{E} + \mathscr{E}_p = \mathscr{E}_m, \tag{15.72}$$

justificînd afirmaţia făcută cu privire la semnificaţia fizică a relaţiei (15.69) şi a constantei de integrare h.

În cazul cînd integrala (15.70), se scrie, în baza relaţiei (15.71), sub forma

$$\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{p} g_{kj}\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k + V(q) = h, \tag{15.73}$$

ea devine o integrală primă de tipul (15.53), iar dacă e scrisă sub forma corespunzătoare relaţiei de definiţie a funcţiei caracteristice a lui Hamilton, adică

$$\sum_{k=1}^{p} h_k\,\dot{q}_k - \mathscr{E}(q\,\dot{q}), + V(q) = h, \tag{15.74}$$

ea devine o integrală primă de tipul (15.54).

15.2.3. Parantezele lui Poisson

Un procedeu comod pentru obţinerea, în multe situaţii, de noi integrale prime ale sistemului de ecuaţii canonice ale lui Hamilton corespunzătoare sistemelor mecanice conservative, procedeu utilizat în cazurile cînd se cunosc cel puţin două integrale prime ale acestui sistem, îl constituie procedeul *parantezelor lui Poisson*, ce va fi prezentat în continuare.

Întrucît ecuaţiile canonice ale lui Hamilton sînt ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi în cele $2p$ variabile canonice $q_1, \ldots, q_p$ şi $h_1, \ldots,$

..., h_p, o integrală primă a acestui sistem de ecuaţii diferenţiale va trebui să aibă forma generală

$$F = F(q_1, \ldots, q_p; h_1, \ldots, h_p; t) = F(q; h; t) = C, \tag{15.75}$$

unde C este o constantă arbitrară — şi ea va trebui să satisfacă următoarele două condiţii :

— pe de o parte, derivata totală a ei în raport cu timpul va trebui să fie egală cu zero, adică se va putea scrie

$$\frac{dF}{dt} = 0; \tag{15.76}$$

— Pe de altă parte, ca va trebui să verifice sistemul de ecuaţii canonice ale lui Hamilton, adică

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H^*}{\partial h_k}; \quad \dot{h}_k = -\frac{\partial H^*}{\partial q_k}; \quad (h = 1, 2, \ldots, p) \tag{15.77}$$

Ca urmare a primei condiţii, rezultă egalitatea

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial h_k}\dot{h}_k\right] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{15.78}$$

Cea de-a doua condiţie va fi satisfăcută înlocuind în ultima relaţie pe $\dot{q}_k$ şi $\dot{h}_k$ cu expresiile (15.77), rezultînd astfel următoarea condiţie globală, pentru ca funcţia F să fie o integrală primă a sistemului de ecuaţii canonice ale lui Hamilton :

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial h_k} - \frac{\partial F}{\partial h_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{15.79}$$

Primul grup de termeni din membrul stîng al ultimei relaţii, notat cu simbolul

$$[F, H^*] = \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial h_k} - \frac{\partial F}{\partial h_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right], \tag{15.80}$$

Scanned with CamScanner

a primit denumirea de *paranteza lui Poisson* a funcţiilor F şi H^*; cu această notaţie, condiţia (15.79), necesară a fi satisfăcută de funcţia F pentru ca ea să fie o integrală primă a sistemului de ecuaţii canonice, va lua forma

$$[F, H^*] + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{15.81}$$

Pentru a justifica posibilitatea de utilizare a parantezelor lui Poisson la găsirea de noi integrale prime ale sistemului de ecuaţii canonice, vor trebui demonstrate, în prealabil, o serie de proprietăţi ale acestor paranteze, care amintesc de proprietăţile produselor vectoriale dintre doi vectori:

— *Asociativitatea în raport cu un factor constant*, adică:

$$C\,[F, H^*] = [CF, H^*] = [F, CH^*], \tag{15.82}$$

proprietatea justificată de şirul de relaţii de mai jos

$$C \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial H^*}{\partial h_k} - \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial H^*}{\partial q_k} \right] = \sum_{k=1}^{p} \left[C \frac{\partial F}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial H^*}{\partial h_k} - C \frac{\partial F}{\partial h_k} \frac{\partial H^*}{\partial q_k} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{\partial F}{\partial q_k} \cdot C \frac{\partial H^*}{\partial h_k} - \frac{\partial F}{\partial h_k} \cdot C \frac{\partial H^*}{\partial q_k} \right],$$

cu completările evidente

$$\begin{cases} C \dfrac{\partial F}{\partial q_k} = \dfrac{\partial}{\partial q_k}(CF); \quad C \dfrac{\partial H^*}{\partial q_k} = \dfrac{\partial}{\partial q_k}(CH^*); \\ C \dfrac{\partial F}{\partial h_k} = \dfrac{\partial}{\partial h_k}(CF); \quad C \dfrac{\partial H^*}{\partial h_k} = \dfrac{\partial}{\partial h_k}(CH^*). \end{cases}$$

— *Anticomutativitatea funcţiilor din parantezele lui Poisson*, adică

$$(F, H^*] = -[H^*, F], \tag{15.83}$$

Scanned with CamScanner

proprietate evidenţiată de relaţia

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial h_k}-\frac{\partial F}{\partial h_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right]=-\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial h_k}-\frac{\partial H^*}{\partial h_k}\cdot\frac{\partial F}{\partial q_k}\right].$$

— *Distributivitatea faţă de suma funcţiilor din parantezele lui Poisson*, adică

$$[F_1+F_2, H^*]=[F_1, H^*]+[F_2, H^*], \qquad (15.84)$$

proprietate uşor de verificat urmărind şirul de relaţii de mai jos :

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial(F_1+F_2)}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial h}-\frac{\partial(F_1+F_2)}{\partial h_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right]=\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial F_1}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial h_k}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F_1}{\partial h_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right]+\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial F_2}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial h_k}-\frac{\partial F_2}{\partial h_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right].$$

— *Derivarea parţială în raport cu timpul a parantezelor lui Poisson după o regulă analogă regulei de derivare a produselor*, adică

$$\frac{\partial}{\partial t}[F, H^*]=\left[\frac{\partial F}{\partial t}, H^*\right]+\left[F, \frac{\partial H^*}{\partial t_k}\right] \qquad (15l85)$$

Proprietatea se justifică prin următorul şir de relaţii :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H^*}{\partial h_k}-\frac{\partial F}{\partial h_k}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right]\right\}=\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial t}\frac{\partial H^*}{\partial h_k}-\frac{\partial^2 F}{\partial h}\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H^*}{\partial h_k \partial t}-\frac{\partial F}{\partial h}\frac{\partial^2 H^*}{\partial q_k \partial t}\right]=\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{\partial H^*}{\partial h_k}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial h_k}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{\partial H^*}{\partial q_k}\right]+\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial h_k}\left(\frac{\partial H^*}{\partial t}\right)-\frac{\partial F}{\partial h_k}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial H^*}{\partial t}\right)\right].$$

Scanned with CamScanner

— *Valabilitatea identității Poisson-Jacobi pentru parantezele lui Poisson compuse*, adică

$$[[F, \Phi], H^*] +)[[\Phi, H^*]I, F] + [[H^*, F], \Phi] = 0. \quad (15.86)$$

Pentru demonstrarea proprietății ii, se va retranscrie relația precedentă sub forma dezvoltată, adică

$$\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{\partial}{\partial q}\left[\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial \Phi}{\partial h_j}-\frac{\partial F}{\partial h_j}\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}\right]\right]\frac{\partial H^*}{\partial h_k}-\frac{\partial}{\partial h_k}\left[\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial F}{\partial q_j}\frac{\partial \Phi}{\partial h_j}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\partial F}{\partial h_j}\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}\right]\right]\frac{\partial H^*}{\partial q_j}\right\}+\sum_{k=2}^{p}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}\frac{\partial H^*}{\partial h_j}-\frac{\partial \Phi}{\partial h_j}\frac{\partial H^*}{\partial q_j}\right]\right]\frac{\partial F}{\partial h_k}-\right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial h_k}\left[\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial q_j}\frac{\partial H^*}{\partial h_j}-\frac{\partial \Phi}{\partial h_j}\frac{\partial H^*}{\partial q_j}\right]\right]\frac{\partial F}{\partial q_k}\Bigg\}+\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial H^*}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial h_j}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{\partial H^*}{\partial h_j}\frac{\partial F}{\partial q_j}\right]\right]\frac{\partial \Phi}{\partial h_k}-\frac{\partial}{\partial h_k}\left[\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial H^*}{\partial q_j}\frac{\partial F}{\partial h_j}-\frac{\partial H^*}{\partial h_j}\frac{\partial F}{\partial q_j}\right]\right]\frac{\partial \Phi}{\partial q_k}\right\}.$$

Este suficient să se efectueze, în continuare, derivările parțiale ale sumelor din parantezele drepte mari, pentru a se constata astfel că toate grupurile de termeni se reduc, fapt care va justifica valabilitatea relației (15.86).

În afara proprietăților demonstrate mai sus, mai pot fi menționate relațiile

$$[F, F] = 0 \quad (15.87)$$

și

$$[C, F] = 0 \quad (15.88)$$

unde C este o constantă, a căror verificare, imediată, nu mai necesită nici un fel de explicații.

Cu aceasta, se poate trece la prezentarea procedeului de determinare a unei noi integrale prime a sistemului de ecuații canonice, atunci cînd se cunosc două din integralele prime distincte ale lui, de

Scanned with CamScanner

exemplu

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1(q; h; t) = C_1 ; \\ F_2 &= F_2(q; h; t) = C_2 , \end{aligned} \tag{15.89}$$

care vor trebui să satisfacă deci condiţia (15.81), ceea ce înseamnă că vor putea fi scrise relaţiile

$$[F_1, H^*] + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 ; \quad [F_2, H^*] + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0. \tag{15.90}$$

Scriind identitatea lui Poisson pentru funcţiile F_1, F_2 şi H^*, adică

$$[[F_1, F_2], H^*] + [[F_2, H^*], F_1] + [[H^*, F_1], F_2] = 0 \tag{15.91}$$

se vor înlocui ultimele două paranteze cu expresiile din relaţiile (15.90), adică

$$[[F_2, H^*], F_1] = \left[-\frac{\partial F_2}{\partial t}, F_1 \right] = \left[F_1 , \frac{\partial F_2}{\partial t} \right] \tag{15.92}$$

şi

$$[[H^*, F_1], F_2] = \left[\frac{\partial F_1}{\partial t}, F_2 \right], \tag{15-93}$$

rezultînd astfel egalitatea

$$[[F_1, F_2], H^*] + \left[\frac{\partial F_1}{\partial t} , F_2 \right] + \left[F_1, \frac{\partial F_2}{\partial t} \right] = 0, \tag{15.94}$$

sau încă, avînd în vedere şi relaţia (15.85), egalitatea

$$[[F_1, F_2], H^*] + \frac{\partial [F_1, F_2]}{\partial t} = 0. \tag{15.95}$$

Ultima relaţie exprimă faptul că funcţia F_3, definită prin relaţia

$$F_3 = [F_1, F_2] = \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{\partial F_1}{\partial q_k} \frac{\partial F_2}{\partial h_k} - \frac{\partial F_1}{\partial h_k} \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \right] = C_3 \tag{15.96}$$

este și ea o integrală primă a sistemului de ecuații diferențiale ale lui Hamilton.

Trebuie făcută însă precizarea că de fiecare dată cînd se va folosi procedeul parantezelor lui Poisson pentru aflarea unor noi integrale prime, atunci cînd se cunosc un număr oarecare de asemenea integrale prime, va trebui să se verifice dacă noua integrală obținută este distinctă de celelalte cunoscute, deoarece este posibil ca aplicarea acestui procedeu să conducă tot la una din integralele cunoscute.

15.3. *Integrarea sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării unui sistem mecanic*

15.3.1. Determinarea soluției generale a sistemului de ecuații ale mișcării unui sistem mecanic

Întrucît sistemul de p ecuații diferențiale de ordinul doi în cele p funcții necunoscute de timp, reprezentate prin parametrii lagrangeieni de poziție ai unui sistem mecanic, poate fi adus totdeauna la forma canonică, adică la sistemul echivalent de $2p$ ecuații diferențiale de ordinul întîi în cele $2p$ variabile canonice, iar pentru aceste din urmă sisteme pot fi aplicate direct concluziile teoriei sistemelor de ecuații diferențiale ordinare, în continuare ecuațiile diferențiale ale mișcării sistemului mecanic studiat vor fi considerate numai sub forma ecuațiilor canonice ale lui Hamilton, ecuații care, ținînd seama de faptul că funcția caracteristică a lui Hamilton — și deci și derivatele ei parțiale în raport cu cele două serii de variabile canonice —, depinde numai de aceste variabile canonice și eventual și de timp dacă funcția potențială conține în mod explicit timpul, vor mai putea fi scrise sub formele

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H^*}{\partial h_k} = \mathfrak{Q}_k(q_1, \ldots, q_p; h_1, \ldots, h_p; t);$$

$$\dot{q}_k = -\frac{\partial H^*}{\partial q_k} = \mathfrak{H}_k(q_1, \ldots, q_p; h_1 \ldots, h_p; t)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p). \qquad (15.97$$

După cum se știe din teoria sistemelor de ecuații diferențiale ordinare, integrarea sistemului precedent de ecuații diferențiale este echivalentă cu găsirea unui număr de $2p$ integrale prime independente ale sistemului, de forma

$$F_j = F_j(b_1, \ldots, q_p ; h_1, \ldots h_p ; t) = C_j, \qquad (15.98)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, 2p)$$

soluția generală a sistemului (15.97) de ecuații diferențiale ale mișcării sistemului mecanic fiind reprezentată în acest caz prin ansamblul rădăcinilor sistemului (15.98) de ecuații algebrice în necunoscutele q_j și h_j, $(j = 1,2,\ldots, p)$, rădăcini de forma

$$q_j = q_j (t ; C_1, \ldots, C_{2p}) ; \qquad (15.99)$$

$$h_j = h_j (t ; C_1, \ldots, C_{2p}).$$

$$(j = 1, 2, \ldots \mathrm{m}\, p)$$

După determinarea, cu ajutorul condițiilor inițiale (15.56) impuse în relațiile (15.98), a celor $2p$ constante arbitrare $C_1, \ldots, C_{2p}$ și după introducerea valorilor astfel găsite ale acestor constante în prima serie de relații (15.99), se obțin *ecuațiile finite dle mișcării sistemului mecanic*, sub forma :

$$q_j = q_j(t ; q_1^0, \ldots, q_1^0 ; h_p^0 ; h_1^0 \ldots, h_p^0). \qquad (15.100)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p).$$

Un alt caz cînd este posibilă determinarea soluției generale a sistemului (15.97) de ecuații diferențiale ale mișcării unui sistem mecanic și deci — după determinarea constantelor de integrare — și a ecuațiilor finite ale mișcării sistemului respectiv de ecuații, este acela cînd poate fi integrată ecuația cu derivate parțiale Hamilton-Jacobi — ecuația (15.52) —, găsindu-se *soluția completă* a acestei ecuații sub forma

$$S = S (t ; q_1, \ldots, q_p ; q_1 (t_0), \ldots, q_p(t_0)). \qquad (15.101)$$

Scanned with CamScanner

Întrucît momentul t_0, considerat în integrala (15.42), care definește mărimea S, analoagă acțiunii hamiltoniene a sistemului mecanic, poate să nu coincidă cu momentul inițial al mișcării sistemului mecanic, considerat, de regulă, ca moment zero, valorile constante $q_j(t_0)$ și $h_j(t_0)$, $(j = 1,2,\ldots,p)$ vor fi notate acum cu alte simboluri și anume

$$q_j(t_0) = \alpha_i\,; \quad h_j(t_0) = \beta_j \qquad (15.102)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

astfel că funcția S va lua acum forma

$$S = S\,(t\,; q_1 \ldots, q_p\,; \alpha_1, \ldots, \alpha_p), \qquad (15.103)$$

iar prima serie dintre relațiile (15.48) va putea fi scrisă sub forma

$$\beta_j = -\frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p). \qquad (15.104)$$

Observînd apoi că derivatele parțiale în raport cu parametrii lagrangeieni de poziție, precum și în raport cu parametrii α_j, ale funcției S vor fi, în general, la rîndul lor, funcții de timp, de coordonatele generalizate q_j și de mărimile α_j, $(j = 1,2,\ldots,p)$, adică

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q_j} &= \Phi_j(t\,; q_1, \ldots, q_p\,;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_p)\,; \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha_j} &= F_j(t\,; q_1, \ldots, q_p\,; \alpha_1, \ldots, \alpha_p), \end{aligned} \qquad (15.105)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p),$$

rezultă că cea de-a doua serie dintre relațiile (15.48) va putea fi scrisă sub forma

$$h_j = \Phi_j(t\,; q_1, \ldots, q_p\,; \alpha_1, \ldots, \alpha_p), \qquad (15.106)$$

$$(j = 1, 2, \ldots, p)$$

Scanned with CamScanner

în timp ce sistemul (15.104) de relații va lua și el forma

$$F_j(t; q_1, \ldots, q_p; \alpha_1, \ldots, \alpha_p) = \beta_j. \quad (j = 1, 2, \ldots, p) \tag{15.107}$$

Rezolvarea ultimului sistem de p ecuații algebrice în cei p parametri lagrangeieni de poziție ai sistemului mecanic va permite exprimarea acestora din urmă sub forma

$$q_j = q_j(t; \alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_p), \quad (j = 1, X, .., \beta) \tag{15.108}$$

ansamblul acestor relații reprezentînd soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării sistemului mecanic, cu mărimile α_j și β_j, $(j = 1,2,\ldots,p)$ avînd rolul de constante de integrare.

Introducerea condițiilor inițiale (15.56) în relațiile (15.106) și (15.108) va permite determinarea celor două serii de constante arbitrare, α_j și β_j, iar înlocuirea valorilor lor, astfel determinate, în soluția generală (15.108) va permite apoi să se obțină și ecuațiile finite ale mișcării sistemului mecanic, ecuații avînd și acum formele (15.100).

În fine, o altă situație cînd va putea fi scrisă soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării unui sistem mecanic cu p grade de libertate, folosindu-se teoria generală a sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, este aceea cînd mișcarea sistemului mecanic se efectuează în următoarele condițiuni, satisfăcute, de regulă, în cazurile cînd sistemul execută mici deplasări în jurul poziției sale de echilibru stabil, ca în mecanica vibrațiilor liniare :

— Sistemul mecanic este supus numai la legături pasive staționare cu frecare neglijabilă, ceea ce înseamnă că expresia energiei lui cinetice se reduce numai la forma patratică în vitezele generalizate, adică

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \tag{15.109}$$

iar coeficienții de inerție au valori constante, sau pot fi aproximați cu valori constante

$$g_{ij} = a_{ij} = \text{const.} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, p) \tag{15.110}$$

Scanned with CamScanner

rezultînd de aici condiţiile

$$c_{ij}^{k} \equiv 0\,; \quad c_{0i}^{k} \equiv 0\,; \quad c_{00}^{k} \equiv 0. \tag{15.111}$$

$$(i, j, k = 1, 2, \ldots, \beta)$$

— Solicitările disipative, exterioare şi interioare, admit o funcţie disipativă generală a lui Rayleigh, adică se poate scrie

$$Q_{d_k} = -\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \dot{q}_k}, \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{15.112}$$

cu funcţia disipativă $\mathscr{R}$ determinată prin relaţia

$$\mathscr{R} = \mathscr{R}_{ext} + \mathscr{R}_{int} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} (\beta_{ext_{ij}} + \beta_{int_{ij}})\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} \beta_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \tag{15.113}$$

şi cu coeficienţii β_{ij} constanţi, sau posibil de aproximat cu valori constante

$$\beta_{ij} = \beta_{ext_{ij}} + \beta_{int_{ij}} = b_{ij} = b_{ji} = \text{const.} \tag{15.114}$$

$$(i, \quad = 1, 2, \ldots, \beta)$$

— Solicitările active sînt reprezentate, pe de o parte, prin solicitări conservative, cărora le corespund forţe generalizate conservative de forma

$$Q_{ac_k} = \frac{\partial U}{\partial q_k} (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{15.115}$$

cu funcţia de forţă generalizată exprimată — sau posibilă de aproximat — prin o formă pătratică în coordonatele generalizate, adică

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{p} c_{ij}\, q_i\, q_j, \tag{15.116}$$

Scanned with CamScanner

cu coeficienţii $c_{ij} = c_{ji}$ constanţi, şi, pe de altă parte, prin solicitări de excitaţie, funcţii numai de timp, cărora le corespund forţe generalizate de forma

$$Q_{ex_k} = Q_{ext_k}(t), \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{15.117}$$

În aceste condiţii, ecuaţiile (15.12) vor lua formele

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ki}\,\dot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_k} - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_k} + Q_{ex_k}(t), \tag{15.118}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

sau încă, avînd în vedere relaţiile

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} c_{ij}\,q_i\,q_j\right] = -\sum_{i=1}^{p} c_{ki}\,q_i \tag{15.119}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p).$$

şi

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{p} b_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j\right] = \sum_{i=1}^{p} b_{ki}\,\dot{q}_i, \tag{15.120}$$

se mai poate scrie

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=1}^{p}\left[a_{ki}\,\ddot{q}_i + b_{ki}\,\dot{q}_i + c_{ki}\,q_i\right] = Q_{ex_k} \\ (k = 1, 2, \ldots, p)\end{gathered}} \tag{15.121}$$

rezultînd deci un sistem de p ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, neomogene, de ordinul doi, în p funcţii necunoscute de timp, reprezentate prin parametrii lagrangeieni q_k, $(k = 1,2,\ldots,p)$, ai sistemului mecanic.

15.3.2. Integrarea aproximativă a sistemului de ecuaţii diferenţiale ale mişcării unui sistem mecanic

În cazurile cînd sistemul de ecuaţii diferenţiale ale mişcării unui sistem mecanic nu se încadrează în nici unul din cazurile examinate la subpunctul precedent, pentru care este posibilă determinarea soluţiei exacte a sistemului, dar există în schimb certitudinea că sînt satisfăcute condiţiile de existenţă şi unicitate a unei asemenea soluţii, ea va putea fi determinată, în multe situaţii, prin integrări aproximative, care se pot împărţi în două mari categorii :

1°. Integrarea aproximativă analitică a sistemului

Constă în prezentarea soluţiei sistemului sub forma unor expresii analitice aproximative, determinate prin una din următoarele două metode generale, folosite frecvent în aplicaţiile concrete :

— Metoda aproximărilor succesive ;

— metoda elaborării soluţiei sub forma unor serii de puteri.

Întrucît prezentarea acestor metode depăşeşte cadrul unui curs de mecanică, se recomandă inginerului care va dori să le folosească, consultarea, fie a bibliografiei de specialitate, fie a unui matematician specializat în acest domeniu.

2°. Integrarea numerică a sistemului de ecuaţii diferenţiale

Constă în prezentarea soluţiei sub forma unor şiruri de valori ale funcţiilor necunoscute din ecuaţii, determinate pentru un număr de *n paşi de integrare*

$$h = t_{i+1} - t_i, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{15.122}$$

în intervalul de timp $[t_0, t_n = t]$ în care se studiază mişcarea sistemului mecanic, plecîndu-se de la valorile iniţiale — cunoscute prin condiţiile iniţiale ale problemei — ale acestor funcţii, folosindu-se în acest scop una din metodele enumerate mai jos :

a) Metode cu paşi separaţi, cărora le aparţin :

— metoda dezvoltării în serii Taylor ;

— metoda liniilor poligoanle a lui Euler ;

Scanned with CamScanner

— metoda Euler perfecționată ;
— metoda generală Runge — Kutta.

b) Metode cu pași legați, în rîndul cărora se încadrează :
— metoda Adams-Moulton ;
— metoda Milne

ș.a.

Pentru cele mai multe din aceste metode au fost elaborate și algoritmi de calcul, care au permis programarea soluțiilor la mașinile electronice de calcul ; inginerul care va dori să obțină o asemenea soluție numerică a sistemului de ecuații diferențiale care modelează matematic mișcarea unui anumit sistem mecanic, va putea să se adreseze oricărui centru de calcul, cu ecuațiile stabilite de el și cu condițiile inițiale, respectiv de contur, corespunzătoare.

În aplicațiile tehnice se folosește, de foarte multe ori, integrarea numerică și pentru sistemul de ecuații diferențiale liniare (15.121), scris în prealabil sub forma matricială, care permite folosirea calculatorului electronic.

Într-adevăr, observînd, pe de o parte, că matricea de inerție (13.30) capătă, în condițiile (15.110), forma

$$\mathbf{I} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & & \\ a_{k1} & \dots & a_{ki} & \dots & a_{kp} \\ \vdots & & & & \\ a_{p1} & \dots & a_{pi} & \dots & a_{pp} \end{matrix} \right\| = ||a_{ki}|| \qquad (15.123)$$

și introducînd, pe de altă parte, matricea

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{matrix} b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & & & & \\ b_{k1} & \dots & b_{ki} & \dots & b_{kp} \\ \vdots & & & & \\ b_{p1} & \dots & b_{pi} & \dots & b_{pp} \end{matrix} \right\| = ||b_{ki}|| \qquad (15.124)$$

numită *matrice de amortizare* — datorită faptului că solicitările disipative de tipul considerat produc amortizări ale mișcărilor, — matricea

$$\mathbf{C} = \left\| \begin{matrix} c_{11} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & \dots & c_{2i} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & & & & \\ c_{k1} & \dots & c_{ki} & \dots & c_{kp} \\ \vdots & & & & \\ c_{p1} & \dots & c_{pi} & \dots & c_{pp} \end{matrix} \right\| = ||C_{ki}|| \qquad (15.125)$$

numită, obișnuit, *matrice de rigiditate* — datorită faptului că solicitările active conservative considerate, care derivă din funcția de forță (15.116) sînt, de regulă, de natură elastică —, precum și matricele coloană

$$\mathbf{q} = \left\| \begin{matrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_p \end{matrix} \right\|; \quad \dot{\mathbf{q}} = \left\| \begin{matrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_i \\ \vdots \\ \dot{q}_p \end{matrix} \right\|; \quad \ddot{\mathbf{q}} = \left\| \begin{matrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_i \\ \vdots \\ \ddot{q}_p \end{matrix} \right\| \qquad (15.126)$$

și

$$\mathbf{Q}_{ex} = \left\| \begin{matrix} Q_{ex_1} \\ \vdots \\ Q_{ex_i} \\ \vdots \\ Q_{ex_p} \end{matrix} \right\|, \qquad (15.127)$$

ultima matrice purtînd numele de *matricea de excitație*, se verifică cu ușurință că sistemul de ecuații diferențiale liniare (15.121) poate fi scris sub forma concentrată, matriceală

$$\boxed{\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^{\cdot} + \mathbf{C}\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{ex}}, \qquad (15.128)$$

Scanned with CamScanner

care poate fi introdusă în calculatorul electronic*.

Precizările făcute în cadrul acestui ultim subpunct permit să se tragă concluzia că în rezolvarea problemelor de dinamica sistemelor mecanice complexe este absolut necesară colaborarea dintre inginer — atunci cînd aceste nu are o pregătire matematică specială — și dintre matematician, primului revenindu-i sarcina de a modela din punct de vedere matematic procesul mecanic studiat, mergînd pînă la stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării sistemului mecanic în cauză și de a verifica justețea, din punct de vedere fizic, a ipotezelor simplificatoare adoptate în rezolvarea problemei, iar cel de-al doilea avîndu-și partea sa de contribuție prin verificarea rigurozității matematice a ipotezelor simplificatoare amintite și prin alegerea — atunci cînd este posibilă — a celor mai potrivite metode de soluționare a problemei integrării ecuațiilor diferențiale ale mișcării; se înțelege însă că tot inginerului îi revine rolul de a da interpretarea fizică soluției găsite de matematician și, mai ales, de a trage din ea concluziile care interesează aplicațiile tehnice.

* Asupra modului de integrare a ecuației (15.128) se va reveni în volumul III al lucrării, MECANICA VIBRAȚILOR SISTEMELOR DE RIGIDE.

Scanned with CamScanner

Partea a patra

PROBLEME SPECIALE ALE MECANICII SISTEMELOR DE RIGIDE

Capitolul VIII

PROBLEME SPECIALE ALE DINAMICII SISTEMELOR MECANICE

Elementele prezentate în primele două capitole ale acestui volum permit abordarea, în continuare, fie a unor probleme mai complexe ale dinamicii — în particular, ale staticii — sistemelor mecanice, cum sînt cele legate de utilizarea unor sisteme mecanice simple ca unelte de lucru și care vor fi examinate în paragraful *mecanica mașinilor simple*, sau cele care se referă la unele forme particulare de interacțiune dintre elementele unor sisteme mecanice cu structuri specifice, care vor fi cercetate în paragraful *mecanica sistemelor articulate*, fie a unor probleme noi în care, fără a se ieși din cadrul mecanicii clasice, se va renunța totuși la cîte una din principalele ipoteze de lucru adoptate în expunerea de pînă acum cum sînt :

— Ipoteza privind numărul finit al gradelor de liberate ale sistemelor mecanice, care va fi abandonată în paragraful *mecanica firelor* ;

— ipoteza privind variația continuă a componentelor torsorilor în centrele de masă ai impulsurilor elementelor unui sistem mecanic, ipoteză ce va fi părăsită în paragraful *mecanica ciocnirilor* ;

— ipoteza asupra invariabilității în timp a maselor elementelor sistemului mecanic, la care se va renunța în paragraful *mecanica corpurilor cu mase variabile*.

Toate aceste probleme vor fi prezentate în continuare.

§16. Mecanica mașinilor simple

16.1. *Definiții. Noțiuni de bază. Caracteristici generale.*

16.1.1. Definiția mașinilor simple

Se vor numi *mașini simple*, anumite rigide, sau sisteme simple de rigide, folosite fie la efectuarea directă a unor operații sau procese

Scanned with CamScanner

tehnologice utile practicii umane, fie ca părţi componente ale unor maşini, sau utilaje mai complicate.

Ca exemple de asemenea maşini pot fi date : pîrghiile şi sistemele de pîrghii, scripeţii şi sistemele de scripeţi, penele, planele înclinate, cricurile etc.

16.1.2. Noţiuni de bază în mecanica maşinilor simple

Asupra elementelor unui sistem mecanic folosit ca utilaj simplu acţionează, obişnuit, în afara greutăţilor proprii ale elementelor — de cele mai multe ori, neglijabile — două distribuţii distincte de solicitări exterioare active, fiecare echivalentă, de regulă, cu cîte o rezultantă unică, una, *forţa motoare* $\overline{\mathcal{F}}m$, efectuînd un lucru mecanic motor, iar a doua, *forţa rezistentă* $\overline{\mathcal{F}}r$, efectuînd un lucru mecanic rezistent.

Trăsătură caracteristică a maşinilor simple o constituie faptul că, în general, ele dau posibilitatea de a se deplasa punctul de aplicaţie al forţei rezistente — această deplasare reprezentînd chiar operaţia utilă practicii —, acţionîndu-se cu o forţă motoare de modul inferior celui al forţei rezistente, dar convenabil plasată.

Pentru a se evita consumuri suplimentare de lucru mecanic, precum şi eventuale dereglări în funcţionare, maşinilor simple li se asigură mişcări uniforme — translaţii rectilinii şi rotaţii uniforme —, la cere se ajunge, evident, după trecerea unui interval oarecare de timp, necesar pentru ca parametrii cinematici de ordinul întîi să capete valorile fixate, o asemenea stare de mişcare uniformă numindu-se *funcţionare în regim permanent.*

În aceste condiţii, energia cinetică a maşinii simple rămîne constantă şi deci relaţia exprimînd teorema variaţiei finite a energiei cinetice a unui asemenea sistem mecanic va lua forma

$$0 = \mathcal{L}_{ext_a} + \mathcal{L}_{ext_p} + \mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_{fr} \qquad (16.1)$$

cu

$$\mathcal{L}_m > 0\,; \quad \mathcal{L}_r < 0\,; \quad \mathcal{L}_{fr} < 0, \qquad (16.2)$$

$\mathcal{L}_m$ fiind lucrul mecanic al solicitărilor active motoare, $\mathcal{L}_r$ lucrul mecanic al solicitărilor active rezistente, iar $\mathcal{L}_{fr}$ lucrul mecanic datorat solicitărilor de frecare din legăturile pasive, exterioare şi interioare, aplicate elementelor sistemului mecanic.

Scanned with CamScanner

Introducînd notaţia

$$\mathscr{L}_u = |\mathscr{L}_r| > 0, \tag{16.3}$$

mărimea $\mathscr{L}_u$ numindu-se, din motive uşor de înţeles, *lucru mecanic util*, relaţia (16.1) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\mathscr{L}_u = \mathscr{L}_m - |\mathscr{L}_{fr}|, \tag{16.4}$$

rezultînd de aici condiţia

$$\mathscr{L}_u < \mathscr{L}_m \tag{16,5}$$

16.1.3. Caracteristicile maşinilor simple

Calităţile funcţionale ale unei maşini simple sînt determinate de următoarele două caracteristici generale :

— *Raportul de transformare al maşinii*, definit prin relaţia

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|}} \tag{16.6}$$

tendinţa fiind de a se realiza asemenea rapoarte mult superioare valorii 1 ;

— *randamentul maşinii simple*, caracterizînd transferul de putere realizat în sistemul mecanic ce alcătuieşte maşina şi definit prin relaţia

$$\boxed{\eta = 100\,\frac{\mathscr{L}_u}{\mathscr{L}_m}\,\% = 100\left(1 - \frac{|\mathscr{L}_{fr}|}{\mathscr{L}_m}\right)\%} \tag{16.7}$$

acest raport fiind, după cum se vede, totdeauna inferior lui 100%, datorită condiţiei reale

$$\mathscr{L}_{fr} \neq 0. \tag{16.8}$$

Scanned with CamScanner

Determinarea primei dintre cele două caracteristici pentru principalele tipuri de mașini simple întîlnite curent în practica inginerească se va face, în cele ce urmează, folosindu-se principiul deplasărilor virtuale, în următoarele ipoteze de lucru :

— Neglijarea greutăților proprii ale elementelor mașinilor simple, precum și a componentelor torsorilor forțelor de inerție în cazurile cînd, cu tot caracterul uniform al mișcării, aceste componente sînt diferite de zero ;

— considerarea componentelor torsorilor reacțiunilor legăturilor exterioare pasive drept forțe și cupluri exterioare cunoscute, această din urmă ipoteză implicînd determinarea lor prealabilă din alte relații, de regulă din ecuațiile de echilibru scrise pentru solicitările exterioare aplicate sistemului mecanic ce formează mașina simplă considerată.

Cunoașterea raportului de transformare va permite apoi să se calculeze și randamentul mașinii simple în condițiile funcționării în regim permanent.

16.2. *Mașini simple uzuale*

Studiul, efectuat în continuare, al celor mai uzuale tipuri de mașini simple va avea la bază împărțirea acestora în două mari categorii, în funcție de modul de realizare practică a lor :

16.2.1. Mașini simple constituite din rigide articulate

Pentru aplicarea principiului deplasărilor virtuale la studiu acestei categorii de mașini simple, cu considerarea fenomenelor de frecare, se va examina mai întîi cazul unei mașini simple constituite dintr-un singur rigid, legat cu exteriorul printr-o articulație, stabilindu-se în prealabil expresia momentului de frecare în articulație, respectiv expresia reacțiunii rezultante din punctul teoretic de articulație, ceea ce se va face în baza ecuației de echilibru

$$\overline{\mathscr{F}}_m + \overline{\mathscr{F}}_r + \overline{R} = 0, \tag{16.9}$$

rezultînd de aici, în condițiile cele mai frecvent întîlnite în aplicațiile practice — adică, atunci cînd forțele $\overline{\mathscr{F}}_m$ și $\overline{\mathscr{F}}_r$ au suporturile paralele —, valoarea

$$|\overline{R}| = |\mathscr{F}_m + \mathscr{F}_r|, \tag{16.10}$$

cu $\overline{\mathscr{F}}_m$ și $\overline{\mathscr{F}}_r$ reprezentînd valorile scalare, raportate la un versor ales arbitrar pentru direcția comună a forțelor $\overline{\mathscr{F}}_m$ și $\overline{\mathscr{F}}_r$, ale celor două forțe rezultante exterioare active.

Rezultă astfel următoarea valoare pentru momentul de frecare în articulație

$$|\overline{\mathscr{M}}_{fr}| = |\overline{\mathscr{M}}_f| = \mu' r_b |\mathscr{F}_m + \mathscr{F}_r|, \qquad (16.11)$$

μ' fiind coeficientul de frecare în articulație, iar r_b raza bolțului articulației.

Cele mai importante tipuri de mașini simple din această primă categorie sînt următoarele :

1°. Pîrghiile

Se numește *pîrghie* un rigid avînd obișnuit forma unei bare drepte, (fig. 16.1), cu o articulație cilindrică fixă C (sau o legătură asimilabilă cu o articulație fixă) și asupra căruia acționează,

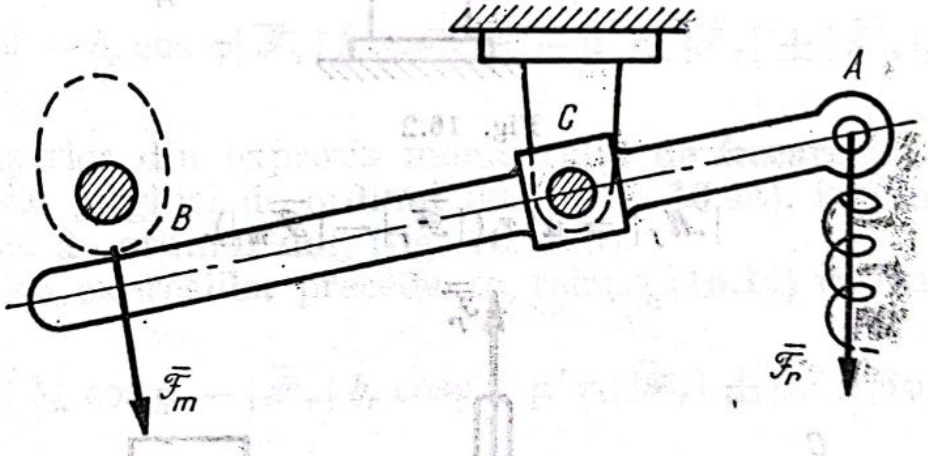


Fig. 16.1

în același plan normal la axa de rotație, forța motoare $\overline{\mathscr{F}}_m$, aplicată într-un punct B și forța rezistentă $\overline{\mathscr{F}}_m$, aplicată într-un punct A; după poziția punctului teoretic de articulație — între punctele de aplicație ale celor două forțe rezultante exterioare active, sau în afara lor —, pîrghiile se împart în :

— *Pîrghii de ordinul întîi*, caracterizate prin plasarea punctului C de articulație între cele două puncte de aplicație ale forțelor $\overline{\mathscr{F}}_m$ și $\overline{\mathscr{F}}_r$, pe aceeași linie, coincizînd cu axa longitudinală a pîrghiei, (fig. 16.2).

La aceste pîrghii, cele două forţe rezultante exterioare active au acelaşi sens şi deci expresia (16.11) a momentului de frecare în articulaţie va lua forma

$$|\overline{\mathcal{M}}_f| = \mu' r_b(|\overline{\mathcal{F}}_m| + |\overline{\mathcal{F}}_r|); \tag{16.12}$$

— *Pîrghii de ordinul doi*, la care punctul teoretic de articulaţie se găseşte pe axa longitudinală a pîrghiei, în afara punctelor de aplicaţie ale celor două forţe rezultante active, (fig. 16.3), pentru această situaţie modulul momentului de frecare în articulaţie luînd valoarea

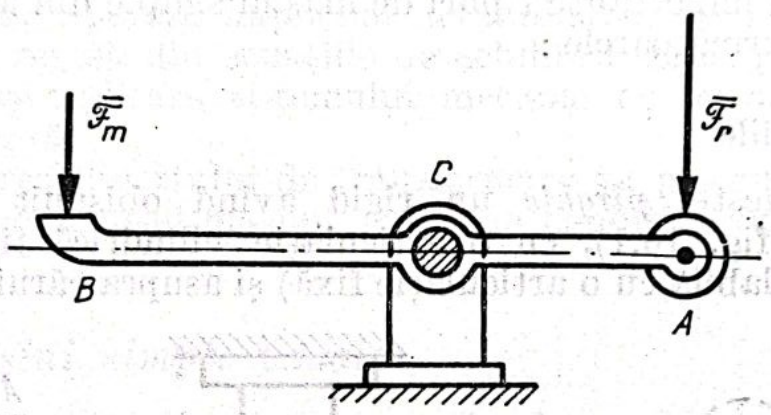


Fig. 16.2

$$|\overline{\mathcal{M}}_f| = \mu' r_b(|\overline{\mathcal{F}}_r| - |\overline{\mathcal{F}}_m|). \tag{16.13}$$

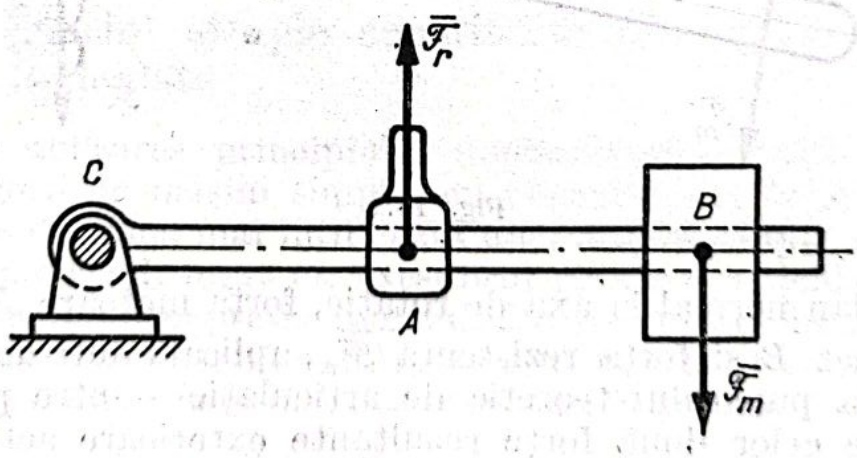


Fig. 16.3

Pentru determinarea celor două caracteristici funcţionale ale pîrghiilor, se va admite că cele două forţe rezultante exterioare active îşi păstrează în permanenţă direcţia comună, normală la po-

ziția inițială a axei ABC a pîrghiei, poziție în raport cu care va fi măsurat și unghiul de rotație φ al pîrghiei.

Convenind să se privească totdeauna pîrghia astfel întîi rotația ei, efectuată sub acțiunea forței motoare, să se efectueze în sens direct — convenție care nu restrînge cu numic generalitatea problemei, dar care permite să se lucreze cu semne determinate pentru rotațiile pîrghiei și pentru valorile scalare ale momentelor rezultante ale celor două forțe rezultante exterioare active — și alegînd ca pol invariabil legat de pîrghie chiar punctul teoretic de articulație, ($Q \equiv C$; $\delta\bar{r}_Q \equiv 0$; $\overline{\mathcal{F}}_m\,\delta\bar{r}_Q = \overline{\mathcal{F}}_r\,\delta\bar{r}_Q = 0$), rezultă, în cadrul ipotezelor de lucru adoptate, următoarea relație exprimînd principiul deplasărilor virtuale aplicat la pîrghie :

$$\overline{\mathcal{M}}_C(\overline{\mathcal{F}}_m)\,\delta\bar{\Theta} + \overline{\mathcal{M}}_c(\overline{\mathcal{F}}_r)\delta\bar{\Theta} + \overline{\mathcal{M}}_f\,\delta\bar{\Theta} = 0, \tag{16.14}$$

cu

$$\delta\bar{\Theta} = \delta\varphi\,\bar{k}' = \delta\varphi\,\bar{k}\,;\quad \overline{\mathcal{M}}_c(\overline{\mathcal{F}}_m) = b_m\cos\varphi\,|\overline{\mathcal{F}}_m|\bar{k}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_c(\overline{\mathcal{F}}_r) = -\,b_r\cos\varphi|\,\overline{\mathcal{F}}_r\,|\,\bar{k}\,;\ \mathcal{M}_f = -\,\mu' r_b(|\overline{\mathcal{F}}_r| \pm |\overline{\mathcal{F}}_m|)\bar{k}, \tag{16.15}$$

semnul superior din expresia momentului de frecare în articulație corespunzînd pîrghiei de ordinul întîi, (fig. 16.4a), iar semnul inferior pîrghiei de ordinul doi, (fig. 16. 4 b).

În baza expresiilor precedente, relația (16.14) va lua forma

$$[|\overline{\mathcal{F}}_m|\,b_m\cos\varphi\ -|\overline{\mathcal{F}}_r|\,b_r\cos\varphi - \mu' r_b(|\overline{\mathcal{F}}_r| \pm |\overline{\mathcal{F}}|)]\delta\varphi = 0, \tag{16.16}$$

rezultînd de aici, după simplificări și reduceri, următoarea expresie pentru *raportul de transformare al pîrghiei* :

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathcal{F}}_r|}{|\overline{\mathcal{F}}_m|} = \frac{b_m\cos\varphi \mp \mu' r_b}{b_r\cos\varphi + \mu' r_b}}, \tag{16.17}$$

cu semnificațiile precizate pentru cele două semne din fața termenului $\mu' r$ de la numărătorul expresiei.

Pentru poziţia iniţială a pîrghiei, ($\varphi = 0$), acest raport ia valoarea

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\bar{\mathcal{F}}_r|}{|\bar{\mathcal{F}}_m|} = \frac{b_m \mp \mu' r_b}{b_r + \mu' r_b}} \tag{16.18}$$

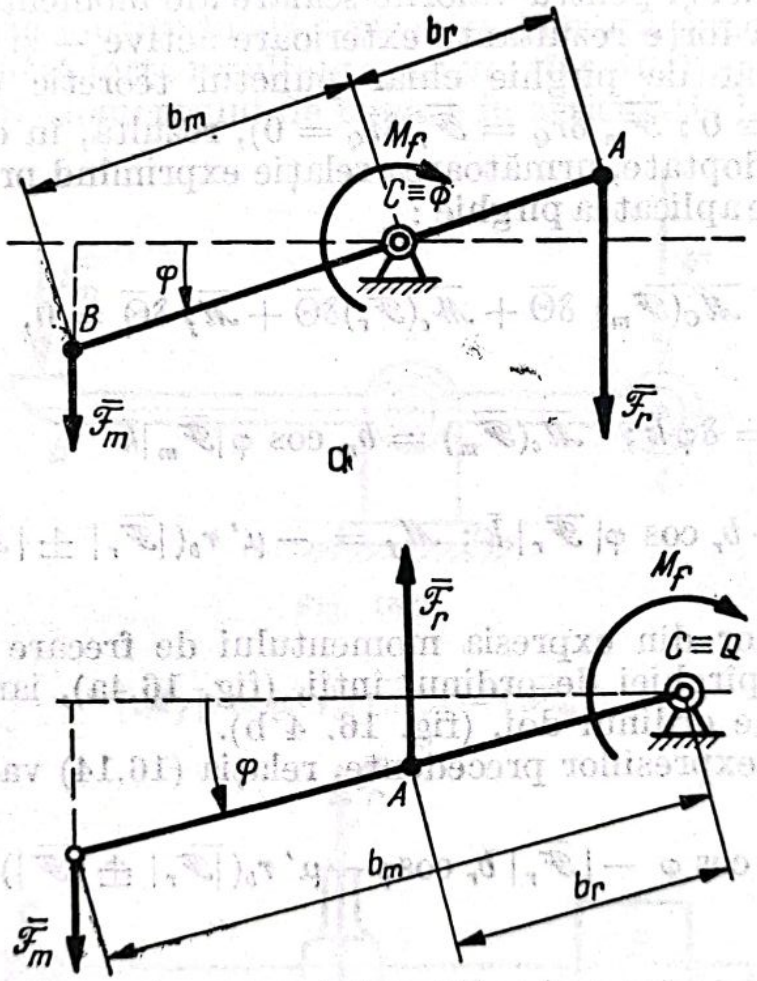


Fig. 16.4

iar în cazul cînd se poate neglija momentul de frecare în articulaţie, ($\mu' = 0$), raportul de transformare capătă aceeaşi valoare

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\bar{\mathcal{F}}_r|}{|\bar{\mathcal{F}}_m|} = \frac{b_m}{b_r}}, \tag{16.19}$$

pentru abmele tipuri de pîrghii.

Observînd apoi că pentru lucrurile mecanice ale celor două forţe rezultante exterioare active, corespunzătoare unui interval finit de timp, în care pîrghia s-a rotit de un unghi $0 < \varphi < \pi/2$, rezultă valorile

$$\mathscr{L}_m = \int_0^{\varphi} \bar{\mathscr{M}}_c(\bar{\mathscr{F}}_m)\, d\bar{\Theta} = b_m |\bar{\mathscr{F}}_m| \int_0^{\varphi} \cos\varphi\, d\varphi = b_m |\bar{\mathscr{F}}_m| \sin\varphi, \tag{16.20}$$

respectiv

$$\mathscr{L}_u = \left| \int_0^{\varphi} \bar{\mathscr{M}}_c(\bar{\mathscr{F}}_r)\, d\bar{\Theta} \right| = b_r |\bar{\mathscr{F}}_r| \int_0^{\varphi} \cos\varphi\, d\varphi = b_r |\bar{\mathscr{F}}_r| \sin\varphi, \tag{16.21}$$

se obţine următoarea expresie şi pentru *randamentul pîrghiei* :

$$\boxed{\eta = 100 \frac{b_r}{b_m} \cdot \frac{|\bar{\mathscr{F}}_r|}{|\bar{\mathscr{F}}_m|} \% = 100\, \rho_t \frac{b_r}{b_m} \%}, \tag{16.22}$$

cu valoarea particulară — practic însă irealizabilă — de

$$\boxed{\eta = 100\ \%} \tag{16.23}$$

în cazul cînd se neglijează frecările.

În aplicaţiile tehnice se întîlnesc curent sisteme de pîrghii legate între ele prin fire, sau tije rigide.

Un asemenea sistem poate fi întîlnit la *balanţa zecimală*, formată din pîrghia de ordinul întîi $AOBC$, (fig. 16.5), cu dimensiunile

$$\overline{OA} = a\ (\mathrm{m})\,;\ \overline{OB} = b\ (\mathrm{m})\,;\ \overline{OC} = c\ (\mathrm{m}), \tag{16.24}$$

de care atîrnă în A platanul cu greutatea etalon $\bar{p}(N)$ şi care este legată prin tijele BD şi CH de pîrghiile de ordinul doi DE — pe care se aşează corpul de cîntărit, (S), de greutate $\bar{P}\,(N)$ — şi HK — pe care se sprijină, în I, pîrghia DE; toate frecările în articulaţii se presupun neglijabile.

Scanned with CamScanner

O asemenea balanţă trebuie să îndeplinească următoarele condiţiuni :

— cîntărirea să fie independentă de poziţia corpului (S) pe pîrghia DF ;

— raportul dintre mărimile greutăţilor etalonului şi corpului (S) să fie de 1/10.

Forţele exterioare active acţionînd asupra sistemului mecanic fiind reprezentate prin greutatea etalon $\bar{p}$ — jucînd rol de forţă motoare —, precum şi prin greutatea corpului de cîntărit $\bar{P}$ — ju-

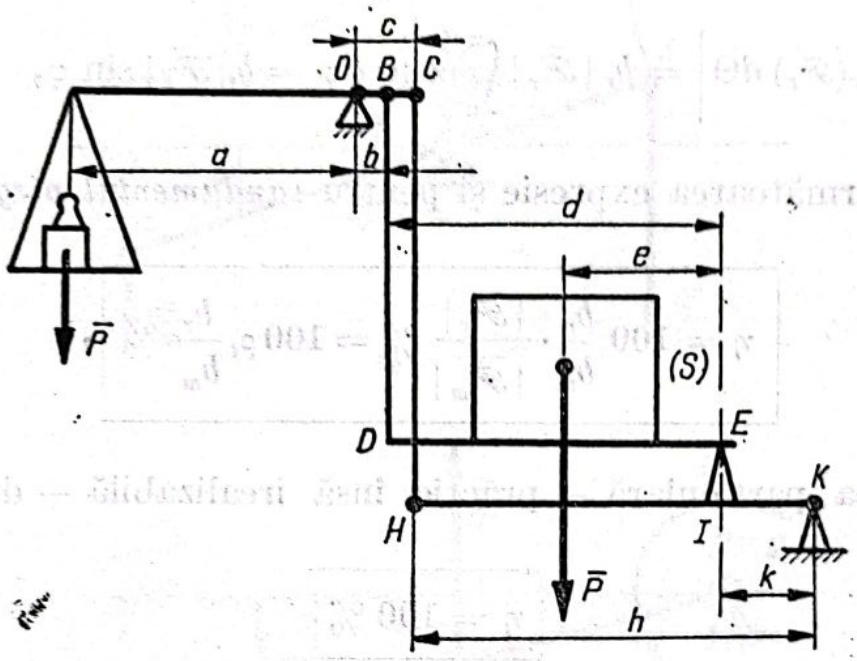


Fig. 16.5

cînd rolul de forţă rezistentă —, prima fiind aplicată pîrghiei $AOBC$, în care se ia drept pol punctul teoretic de articulaţie O, ($Q_1 = 0$; $\delta\bar{r}_{Q1} \equiv 0$; $\bar{p}\,\delta\bar{r}_{Q1} = 0$), iar a doua fiind aplicată pîrghiei DE, în care drept pol se ia punctul E, ($Q_2 \equiv E$; $\delta\bar{r}_{Q2} = \delta\bar{r}_E$), (fig. 16.6), va rezulta următoarea formă concretă pentru relaţia exprimînd principiul deplasărilor virtuale în cazul acestui sistem mecanic

$$\bar{\mathcal{M}}_0(\bar{p})\delta\bar{\Theta}_1 + \bar{P}\delta\bar{r}_E + \bar{\mathcal{M}}_E(\bar{P})\delta\bar{\Theta}_2 = 0, \tag{16.25}$$

cu

$$\bar{\mathcal{M}}_0(\bar{p}) = a\,|\bar{p}\,|\bar{k}\,;\ \bar{P} = -\,|\bar{p}\,|\bar{j}\,;\ \bar{\mathcal{M}}_E(\bar{P}) = e\,|\bar{P}\,|\bar{k} \tag{16.26}$$

şi

$$\delta\bar{\Theta}_1 = \delta\varphi_1\bar{k}\,;\quad \delta\bar{r}_E = \overline{EE'}\,\bar{j}\,;\quad \delta\bar{\Theta}_2 = \delta\varphi_2\bar{k}. \tag{16.27}$$

Sistemul mecanic fiind cu un singur grad de libertate, deplasările virtuale $\bar{r}\delta_E$ și $\delta\bar{\Theta}_2$ vor trebui exprimate în funcție de deplasarea virtuală $\delta\varphi_1$, aceste relații putînd fi stabilite cu ajutorul figurii 16.6 :

$$\delta\bar{\Theta}_3 = \delta\varphi_3\,\bar{k} = -\frac{\overline{HH'}}{\overline{HK}}\,\bar{k} = -\frac{\overline{CC'}}{\overline{HK}}\,\bar{k} = -\frac{\overline{OC}\cdot\delta\varphi_1}{\overline{HK}}\,\bar{k} = -\frac{c}{h}\,\delta\varphi_1\bar{k}\,; \tag{16.28}$$

$$\delta\bar{r}_E = \overline{EE'}\bar{j} = \overline{II'}\bar{j} = \overline{IK}\cdot|\delta\varphi_3|\,\bar{j} = \frac{ck}{h}\,\delta\varphi_1\,\bar{j} \tag{16.29}$$

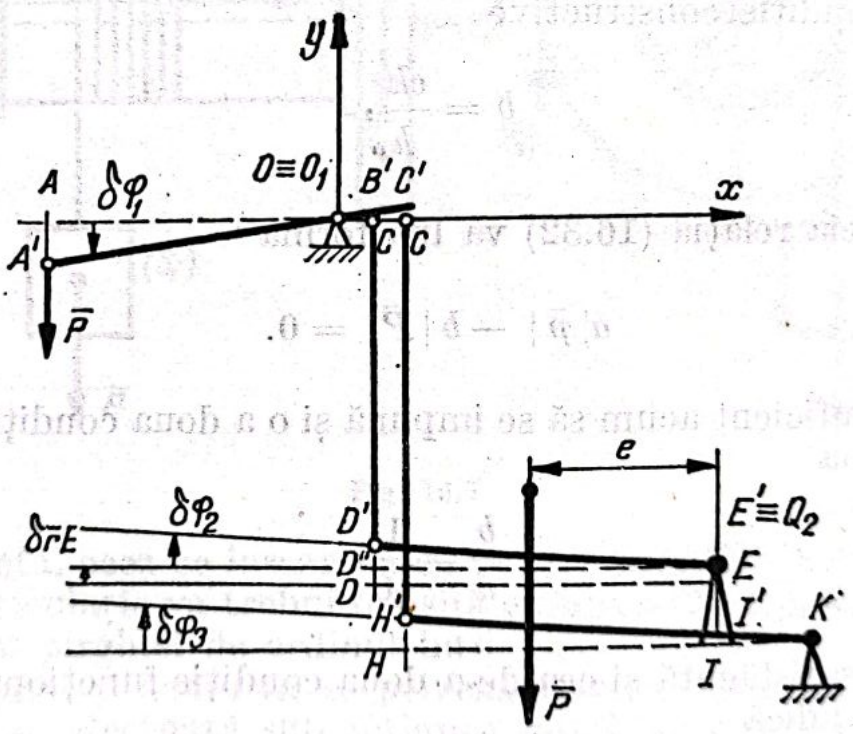


Fig. 16.6

și

$$\delta\bar{\Theta}_2 = \delta\varphi_2\,\bar{k} = -\frac{\overline{D''D'}}{\overline{DE}}\,\bar{k} = -\frac{\overline{DD'}-\overline{DD''}}{\overline{DE}}\,\bar{k} = -\frac{\overline{BB'}-\overline{EE'}}{\overline{DE}}\bar{k} =$$

$$= -\frac{1}{d}\left(b-\frac{ck}{h}\right)\bar{k}. \tag{16.30}$$

În baza expresiilor precedente, relaţia (16.25) va lua forma

$$\left[a|\bar{p}| - |\bar{P}|\frac{ck}{h} - \frac{e}{d}\left(b - \frac{ck}{h}\right)|\bar{P}|\right]\delta\varphi_1 = 0, \tag{16.31}$$

cu consecinţa

$$a|\bar{p}| - \left[|\bar{P}|\frac{ck}{h} + \frac{e}{d}\left(b - \frac{ck}{h}\right)\right]|\bar{P}| = 0 \tag{16.32}$$

Condiţia de independenţă a operaţiei de cîntărire de poziţia pe panou a corpului de cîntărit, deci de distanţa e (fig. 16.6), implică realizarea condiţiei constructive

$$b = \frac{ck}{h}, \tag{16.33}$$

în baza căreia relaţia (16.32) va lua forma

$$a|\bar{p}| - b|\bar{P}| = 0. \tag{16.34}$$

Este suficient acum să se impună şi o a doua condiţie constructivă, de forma

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{10}, \tag{16.35}$$

pentru a fi satisfăcută şi cea de-a doua condiţie funcţională a balanţei zecimale, adică

$$\boxed{|\bar{p}| = \frac{1}{10}|\bar{P}|}, \tag{16.36}$$

2°. Troliul

Troliul sau *vîrtejul*, se compune din două discuri solidare coaxiale — *tamburul* (*Tb*) de raza egală cu r (m) şi *şaiba* (*Sb*) de rază R(m) — ultima putînd fi înlocuită uneori printr-o manivelă OM,

trasată punctat în fig. 16.7, sistemul rotindu-se în jurul articulației cilindrice fixe din O. Pe tambur se înfășoară un lanț, sau un cablu, de greutate liniară p (N/m), de care atîrnă sarcina (Sc), de greutate P(N), ce urmează a fi ridicată în regim permanent.

În cele ce urmează, se va considera numai cazul cînd forța motoare acționează tangențial la periferia șaibei și are același sens cu

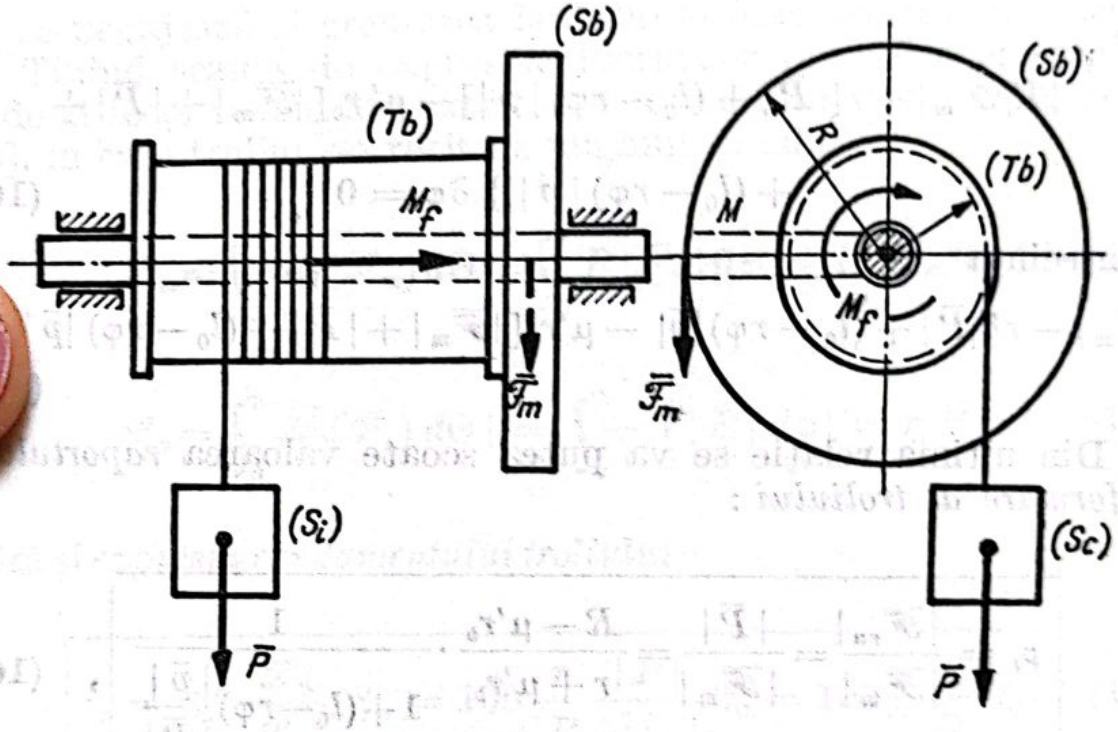


Fig. 16.7

forța rezistentă, ceea ce înseamnă că pentru modulul momentului de frecare în articulație va trebui folosită expresia (16.12), adică aceeași ca și în cazul pîrghiei de ordinul întîi.

Convenind și acum să se privească troliul dinspre partea din care rotația sa, efectuată sub acțiunea forței motoare, se efectuează în sens direct și alegînd ca pol invariabil legat de troliu punctul teoretic de articulație, ($Q \equiv 0$; $\delta\bar{r}_Q \equiv 0$; $\bar{\mathcal{F}}_m \delta\bar{r}_Q = \bar{\mathcal{F}}_r \delta\bar{r}_Q = 0$), se va putea scrie, ținînd seama și de faptul că forța rezistentă totală va fi formată acum din forța rezistentă utilă $\bar{\mathcal{F}}_{ru} = \bar{P}$ și din greutatea $(l_0 - r\varphi)\bar{p}$ a lanțului desfășurat de pe tambur — unde l_0 este lungimea inițială a porțiunii de lanț de care atîrnă sarcina —, următoarea relație exprimînd principiul deplasărilor virtuale aplicat la troliu :

$$\bar{\mathcal{M}}_0(\bar{\mathcal{F}}_m)\delta\bar{\Theta} + \bar{\mathcal{M}}_0(\bar{\mathcal{F}}_r)\,\delta\bar{\Theta} + \bar{\mathcal{M}}_f\,\delta\bar{\Theta} = 0, \qquad (16.37)$$

cu

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{M}}_0(\bar{\mathcal{F}}_m) &= R\,|\,\bar{\mathcal{F}}_m\,|\,\bar{k}\,;\\
\bar{\mathcal{M}}_0(\bar{\mathcal{F}}_r) &= -\,r[\,|\,\bar{P}\,|+(l_0-r\varphi)\,|\,\bar{p}\,|\,]\,\bar{k}\,;\\
\bar{\mathcal{M}}_f &= -\,\mu'\,r_b[\,|\,\bar{\mathcal{F}}_m\,|+|\,\bar{P}\,|+(l_0-r\varphi)\,|\,\bar{p}\,|\,]\,\bar{k},
\end{aligned} \tag{16.38}$$

adică

$$\{R|\,\bar{\mathcal{F}}_m\,|-r[\,|\,\bar{P}\,|+(l_0-r\varphi)\,|\,\bar{p}\,|\,]-\mu'\,r_b[\,|\,\bar{\mathcal{F}}_m\,|+|\,\bar{P}\,|+$$

$$+(l_0-r\varphi)\,|\,\bar{p}\,|\,]\}\,\delta\varphi=0 \tag{16.39}$$

cu consecința

$$R|\,\bar{\mathcal{F}}_m\,|-r[\,|\bar{P}\,|+(l_0-r\varphi)|\bar{p}|\,-\mu'r_b[\,|\,\bar{\mathcal{F}}_m\,|+|\,\bar{P}\,|+(l_0-r\varphi)\,|\bar{p}\,|\,]=0 \tag{16.40}$$

Din ultima relație se va putea scoate valoarea *raportului de transformare al troliului* :

$$\boxed{\rho_t=\frac{|\,\bar{\mathcal{F}}_{ru}\,|}{|\,\bar{\mathcal{F}}_m\,|}=\frac{|\,\bar{P}\,|}{|\,\bar{\mathcal{F}}_m\,|}=\frac{R-\mu'r_b}{r+\mu'r_b}\cdot\frac{1}{1+(l_0-r\varphi)\dfrac{|\,\bar{p}\,|}{|\,\bar{P}\,|}}}, \tag{16.41}$$

cu formele particulare

$$\boxed{\rho_t=\frac{|\,\bar{P}\,|}{|\,\bar{F}_m\,|}=\frac{R-\mu'\,r_b}{r+\mu'\,r_b}}, \tag{16.42}$$

dacă se neglijează greutatea lanțului, $\left((l_0-r\varphi)\dfrac{(\bar{p})}{(\bar{P})}\approx 0\right)$, respectiv

$$\boxed{\rho_t=\frac{|\,\bar{P}\,|}{|\,\bar{\mathcal{F}}_m\,|}=\frac{R}{r}\,\frac{1}{1+(l_0-r\varphi)\,\dfrac{|\,\bar{p}\,|}{|\,\bar{P}\,||}}} \tag{16.43}$$

dacă se neglijează frecarea în articulație, ($\mu' \approx 0$) și

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\bar{P}|}{|\bar{\mathscr{F}}_m|} = \frac{R}{r}} \tag{16.44}$$

dacă se neglijează și greutatea lanțului și frecarea în articulație.

Ținînd seama de expresiile lucrurilor mecanice efectuate de cele două forțe rezultante exterioare active într-un interval de timp [0, t], în care troliul s-a rotit de unghiul φ, adică

$$\mathscr{L}_m = \int_0^{\varphi} \bar{M}_0(\bar{\mathscr{F}}_m)\, d\Theta = \int_0^{\varphi} R\,|\bar{\mathscr{F}}_m|\, d\varphi = R|\bar{\mathscr{F}}_m|\varphi \tag{16.45}$$

și

$$\mathscr{L}_u = \left|\int_0^{\varphi} \bar{M}_0(\bar{\mathscr{F}}_r)\, d\Theta\right| = \left|\int_0^{\varphi} -r\,|\bar{P}|\, d\varphi\right| = r|\bar{P}|\varphi, \tag{16.46}$$

rezultă și *expresia randamentului troliului*

$$\boxed{\eta = 100\,\frac{\mathscr{L}_u}{\mathscr{L}_m}\,\% = 100\,\frac{r}{R}\,\frac{|\bar{P}|}{|\bar{\mathscr{F}}_m|}\,\% = 100\,\rho_t\,\frac{r}{R}\,\%} \tag{16.47}$$

în care se va ține seama de expresia (16.41) a lui ρ_t; în cazul neglijării greutății lanțului, randamentul troliului ia valoarea

$$\boxed{\eta = 100\,\frac{r}{R}\,\frac{R - \mu' r_b}{r + \mu' r_b}}, \tag{16.48}$$

respectiv valoarea — practic irealizabilă — de

$$\boxed{\eta = 100\,\%} \tag{16.49}$$

dacă se neglijează și frecarea în articulație.

3°. Scripetele

Se numește *scripete fix*, un disc circular de raza r (m), în rotație în jurul axului său fix și prezentînd un șanț periferic prin care trece un cablu, sau o funie, la extremitățile căruia acționează, în lungul firelor considerate paralele, cele două forțe rezultante exterioare active, forța motoare $\overline{F}_m$ și forța rezistentă $\overline{F}_r$, (fig. 16.6).

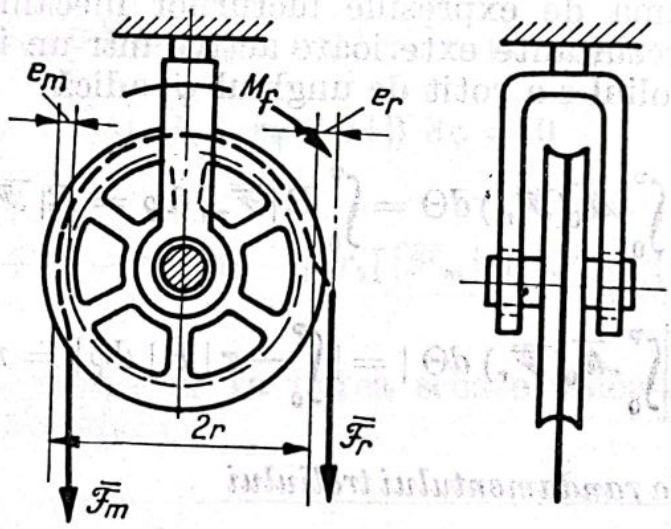


Fig. 16.8

Experiența a stabilit că datorită rigidității, firul dinspre partea forței motoare se apropie de axul scripetului cu o distanță e_m numită *excentrivitate la forța motoare*, în timp ce firul dinspre partea forței rezistente se îndepărtează de axul scripetelui cu distanța e_r numită *excentricitate la forța rezistentă*; datorită acestor excentricități, brațele celor două forțe în raport cu punctul teoretic de articulație O iau valorile

$$b_m = r_m - e\,; \qquad b_r = r + e_r. \tag{16.50}$$

Convenind și de astă dată să se privească scripetele dinspre partea din care rotația sa, efectuată sub acțiunea forței motoare, se produce în sens direct, (fig. 16.8) și alegînd ca pol invariabil legat de scripete punctul teoretic de articulație O, ($Q \equiv 0\,;\ \delta\bar{r}_Q \equiv 0\,;\ \overline{F}_m \delta\bar{r}_Q = \overline{F}_r \delta\bar{r}_Q = 0$), relația exprimînd principiul deplasărilor virtuale apli-

cat la scripete va lua următoarea formă concretă

$$\overline{\mathscr{M}}_0(\overline{\mathscr{F}}_m)\,\delta\overline{\Theta} + \overline{\mathscr{M}}_0(\overline{\mathscr{F}}_r)\,\delta\overline{\Theta} + \overline{\mathscr{M}}_f\,\delta\overline{\Theta} = 0, \tag{16.51}$$

cu

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{M}}_0(\overline{\mathscr{F}}_m) &= (r - e_m)\,|\overline{\mathscr{F}}_m|\,\bar{k};\\ \overline{\mathscr{M}}_0(\overline{\mathscr{F}}_r) &= -(r + e_r)\,|\overline{\mathscr{F}}_r|\,\bar{k};\\ \overline{\mathscr{M}}_f &= -\mu' r_b\,(|\overline{\mathscr{F}}_r| + |\overline{\mathscr{F}}_m|)\,\bar{k},\end{aligned} \tag{16.52}$$

adică

$$[(r - e_m)\,|\overline{\mathscr{F}}_m| - (r + e_r)\,|\overline{\mathscr{F}}_r| - \mu' r_b\,(|\overline{\mathscr{F}}_r| + |\overline{\mathscr{F}}_m|)]\delta\varphi = 0 \tag{16.53}$$

cu consecința

$$(r - e_m)\,|\overline{\mathscr{F}}_m| - (r + e_r)\,|\overline{\mathscr{F}}_r| - \mu' r_b\,(|\overline{\mathscr{F}}_r| + |\overline{\mathscr{F}}_m|) = 0 \tag{16.54}$$

Din ultima relație va rezulta următoarea expresie pentru raportul modulilor celor două forțe exterioare active:

$$\rho_t = \frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|} = \frac{r - e_m - \mu' r_a}{r + e_r + \mu' r_b} = \frac{1}{\dfrac{r + e_r + \mu' r_b}{r - e_m - \mu' r_b}},$$

sau încă, adăugînd și scăzînd la numărătorul fracției reprezentînd numitorul expresiei lui ρ_t, suma $(e_m + \mu' r_b)$, mai rezultă

$$\rho_t = \frac{1}{1 + \dfrac{e_r + e_m + 2\mu' r_b}{r - e_m - \mu' r_b}}, \tag{16.55}$$

Folosind aproximarea

$$r - e_m - \mu' r_b \approx r,$$

acceptabilă datorită valorilor foarte mici ale mărimilor e_m și μ' și introducînd și notația

$$\frac{e_r + e_m}{r} = \lambda \tag{16.56}$$

— acest raport, determinat experimental, variind proporțional cu patratul diametrului firului, cu coeficientul de proporționalitate depinzînd de natura firului —, rezultă următoarea expresie finală pentru *raportul de transformare al scripetelui* :

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_n|} = \frac{1}{1 + \lambda + 2\mu' \dfrac{r_b}{r}} = \frac{1}{k}}. \tag{16.57}$$

Coeficientul

$$k = 1 + \lambda + 2\mu' \frac{r_b}{r} > 1, \tag{16.58}$$

depinzînd de natura firului și de raza scripetelui, poartă numele de *coeficient de reducere* și se determină experimental ; pentru scripeții întîlniți în mod obișnuit în practică, manipulați cu ajutorul funiilor de cînepă, se ia obișnuit valoarea

$$k \doteq 1,1 \tag{16.59}$$

Deși pentru scripetele fix nu este satisfăcută condiția $\rho_t > 1$, el este considerat totuși mașină simplă, pe de o parte, datorită faptului că intră în componența unor sisteme mecanice funcționînd efectiv ca mașini simple, adică cu condiția $\rho_t > 1$, și, pe de altă parte, ca urmare a faptului că este flosit chiar și singur în diferite muncii, pentru schimbarea direcției și sensului forței motoare.

În condițiile funcționării în regim permanent, lucrurile mecanice ale celor două forțe exterioare active, corespunzătoare unei rotații de unghiul φ a scripetelui, vor avea expresiile

$$\mathscr{L}_u = \left| \int_0^{\varphi} \overline{\mathscr{M}}\,(\overline{\mathscr{F}}_r)\, d\overline{\Theta} \right| = -\int_0^{\varphi} (r + e_r)\,|\overline{\mathscr{F}}_r|\, d\varphi \Big| = (r + e_r)\,|\overline{\mathscr{F}}_r|\,\varphi, \tag{16.60}$$

respectiv

$$\mathscr{L}_m = \int_0^{\varphi} \overline{M}_0 (\overline{\mathscr{F}}_m) \, \mathrm{d}\overline{\Theta} = \int_0^{\varphi} (r - e_m) \, |\overline{\mathscr{F}}_m| \, d\varphi = (r - e_m) \, |\overline{\mathscr{F}}_m| \, \varphi, \tag{16.61}$$

rezultînd astfel următoarea valoare pentru raportul lor procentual

$$\eta = 100 \frac{\mathscr{L}_u}{\mathscr{L}_m} \% = 1 \cdot 0 \frac{r + e_r}{r - e_m} \frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|} \% = \tag{16.62}$$

$$= 100 \rho_t \frac{r + e_r}{r - e_m} \% = 100 \frac{r + e_r}{r - e_m} \frac{1}{k} \%,$$

aproximată obișnuit cu valoarea

$$\boxed{\eta = 100 \frac{\mathscr{L}_u}{\mathscr{L}_m} \% = 100 \frac{1}{k} \%} \tag{16.63}$$

a *randamentului scripetelui.*

În aplicațiile tehnice sînt folosite frecvent sisteme de scripeți, constituite din unul sau mai mulți scripeți ficși și din unul sau mai mulți scripeți mobili, cu axele de rotație deplasîndu-se prin translații rectilinii, numite *palane.*

Cele mai des întîlnite tipuri de palane sînt :

— *Palanul exponențial,* constituit din scripetele fix (Scf) și dintr-un număr oarecare $n \geqslant 1$ de scripeți mobili de aceeași rază r, înfășurarea firelor făcîndu-se ca în fig. 16.9.

Forțele active care acționează asupra acestui palan sînt reprezentate prin forța rezistentă $\overline{\mathscr{F}}_r$ acționînd în axul scripetelui mobil (Scm_n) și forța motoare $\overline{\mathscr{F}}_m$, acționînd în lungul firului ce trece peste scripetele fix (Scf).

Pentru a stabili expresia raportului de transformare în cazul acestui sistem de scripeți se va demonstra, mai întîi, valabilitatea și

pentru scripeții mobili a rapoartelor de transformare date de relația (16.57). Într-adevăr, separînd unul din acești scripeți din sistem — de ex., scripetele (Scm_i), (fig. 16.10), se vede imediat că tensiunea $\bar{T}'_i$

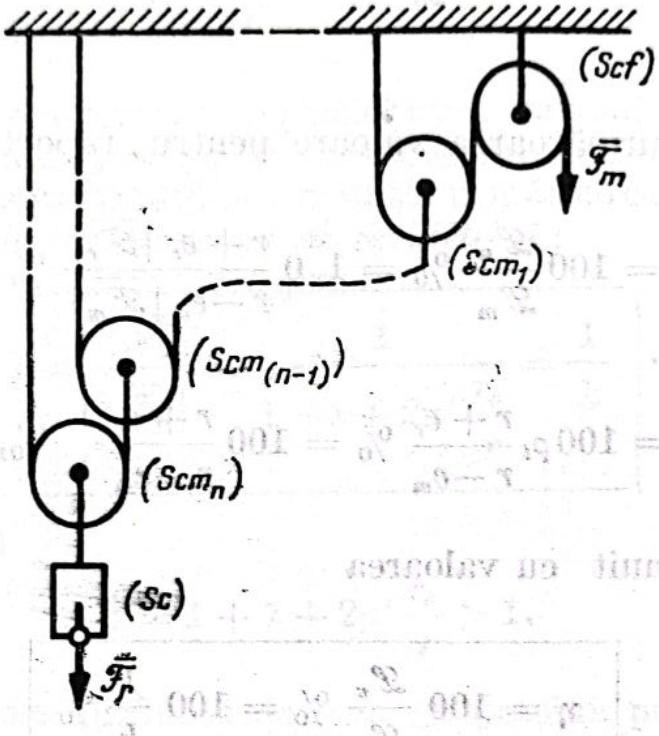


Fig. 16,9

va juca rolul forței motoare, tensiunea $\bar{T}_i$ rolul forței rezistente, iar tensiunea $\bar{N}_i$ rolul reacțiunii articulației, cu

$$|\bar{N}_i| = |\bar{T}_i| + |\bar{T}'_i| . \tag{16.64}$$

În consecință, va rezulta și acum raportul

$$\frac{|\bar{T}_i|}{|\bar{T}'_i|} = \frac{1}{k} , \ (i = 1,2, \ldots n),$$

putîndu-se scrie deci relațiile succesive

$$|\bar{N}_i| = \frac{k+1}{k} |\bar{T}'_i| = \frac{k+1}{k} |\bar{N}_{i-1}| = \frac{(k+1)^2}{k^2} |\bar{T}'_{i-1}| = \ldots \tag{16.65}$$

Plecînd de la ultimul scripete ($i = n$, cu $\overline{N}_n = \overline{\mathscr{F}}_r$), rezultă următorul şir de relaţii :

$$|\overline{\mathscr{F}}_r| = \frac{k+1}{k}|\overline{T}'_n| = \frac{(k+1)^2}{k^2}|\overline{T}'_{n-1}| = \ldots = \frac{(k+1)^n}{k^n}|\overline{T}'_1|. \tag{16.66}$$

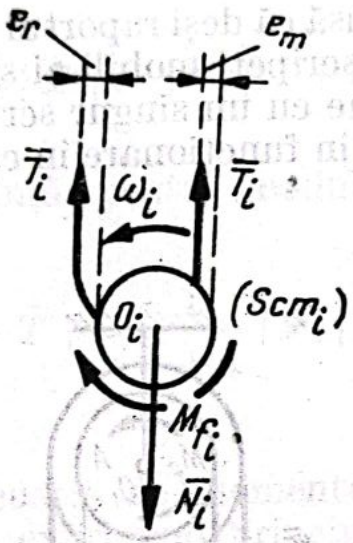


Fig. 16.10

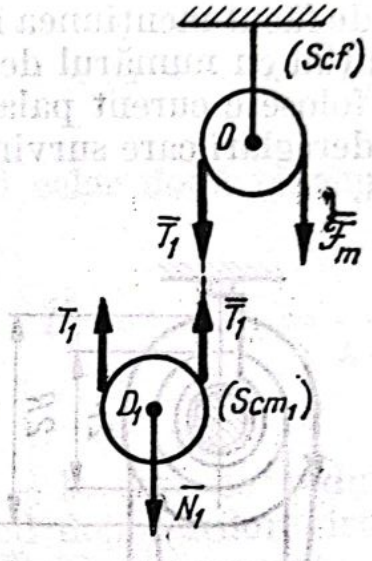


Fig. 16.11

Pe de altă parte, pentru scripetele fix (Scf), (fig. 16.11), va putea fi scrisă, de asemenea, relaţia

$$\frac{|\overline{T}'_1|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|} = \frac{1}{k},$$

în baza căreia egalitatea formată din primul şi ultimul membru al relaţiilor (16.66) va putea fi scrisă sub forma

$$|\overline{\mathscr{F}}_r| = \frac{(k+1)^n}{k^{n+1}}|\overline{\mathscr{F}}_m|,$$

rezultînd astfel următoarea exresie pentru raportul de transformare căutat :

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|} = \frac{(k+1)^n}{k^{n+1}}.} \tag{16.67}$$

Dacă se negijează atît frecările, cît şi rigiditatea firului, ($k=1$), atunci expresia precedentă a raportului de transformare ia forma simplificată

$$\boxed{\rho_t = 2^n} \tag{16.68}$$

justificînd denumirea de *palan exponenţială* dată acestui sistem de scripeţi.

Trebuie de făcut menţiunea însă că deşi raportul de transformare creşte exponenţial cu numărul de scripeţi mobili ai sistemului, totuşi în practică se folosesc curent palane cu un singur scripete mobil, datorită deselor dereglări care survin în funcţionare în cazul mai multor scripeţi mobili.

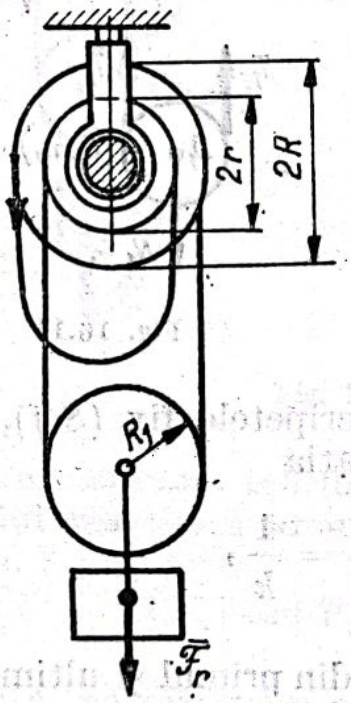


Fig. 16.12

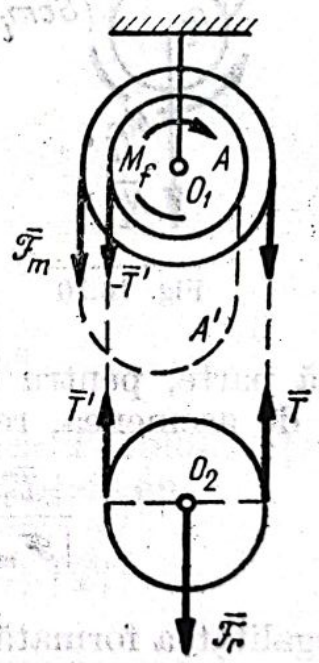


Fig. 16.13

— *Palanul diferenţial* se compune dintr-un bloc de doi scripeţi ficşi coaxiali, solidar legaţi între ei, de raze r (m) şi $R > r$ (m) şi dintr-un scripete mobil (Scm), de rază $R_1 = \frac{1}{2}(R+r)$ pe care se înfăşoară, ca în fig. 16.12) un fir fără sfîrşit, sau, dacă e cazul de ridicat sarcini mari, un lanţ, în ultima situaţie scripeţii fiind prevăzuţi cu dinţi periferici care pătrund în zalele lanţului.

Separînd cele două elemente ale palanului — blocul cu scripeți ficși și celcu scripeți mobili (fig. 16.13) și introducînd tensiunile din firele active secționate—porțiunea AA' de fir nu este activă — , se observă imediat că la scripetele mobil tensiunea $\overline{T}'$ joacă rolul de forță motoare, tensiunea $\overline{T}$ rolul de forță rezistentă și forța exterioară $\overline{\mathscr{F}}_r$ rolul de reacțiune a articulației, putîndu-se scrie deci pentru acest scripete relațiile

$$|\overline{T}| = k\,|\overline{T}'|\,; \quad |\overline{\mathscr{F}}_r| = |\overline{T}| + k\,|\overline{T}'| = (k+1)\,|\overline{T}'|\,. \tag{16.69}$$

În consecință, pentru modulii celor două tensiuni vor rezulta valorile

$$|\overline{T}'| = |-\overline{T}'| = \frac{1}{k+1}\,|\overline{\mathscr{F}}_r|\,; \quad |\overline{T}| = |-\overline{T}| = \frac{k}{k+1}\,|\overline{\mathscr{F}}_r|. \tag{16.70}$$

Scriind ecuația de momente — la care se reduce, în această situație, relația exprimînd principiul deplasărilor virtuale — pentru blocul de scripeți ficși, cu forțele $\overline{T}$ și $-\overline{T}$ cunoscute, rezultă relația

$$R\,|\overline{\mathscr{F}}_m| - R\,\frac{k}{k+1}\,|\overline{\mathscr{F}}_r| + r\,\frac{1}{k+1}\,|\overline{\mathscr{F}}_r| - \mu' r_b\,[|\overline{\mathscr{F}}_r| + |\overline{\mathscr{F}}_m|] = 0, \tag{16.71}$$

din care se deduce imediat valoarea raportului de transformare căutat

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|} = \frac{(R-\mu' r_b)\,(k+1)}{[R\,k - r + \mu' r_b (k+1)]}}\,. \tag{16.72}$$

În cazul cînd se neglijează rigiditățile firelor și toate frecările ($k = 1\,;\ \mu = 0$), expresia precedentă ia forma simplificată

$$\boxed{\rho_t = \frac{2R}{R-r}}\,, \tag{16.73}$$

justificînd denumirea de *palan diferențial* dată acestui sistem de scripeți.

— *Palanul cu mufle* este constituit din două blocuri identice de scripeți, numite *mufle*, fiecare din ele avînd același număr n de scripeți, dispuși fie pe același ax (fig. 16.14, a) în care situația razele

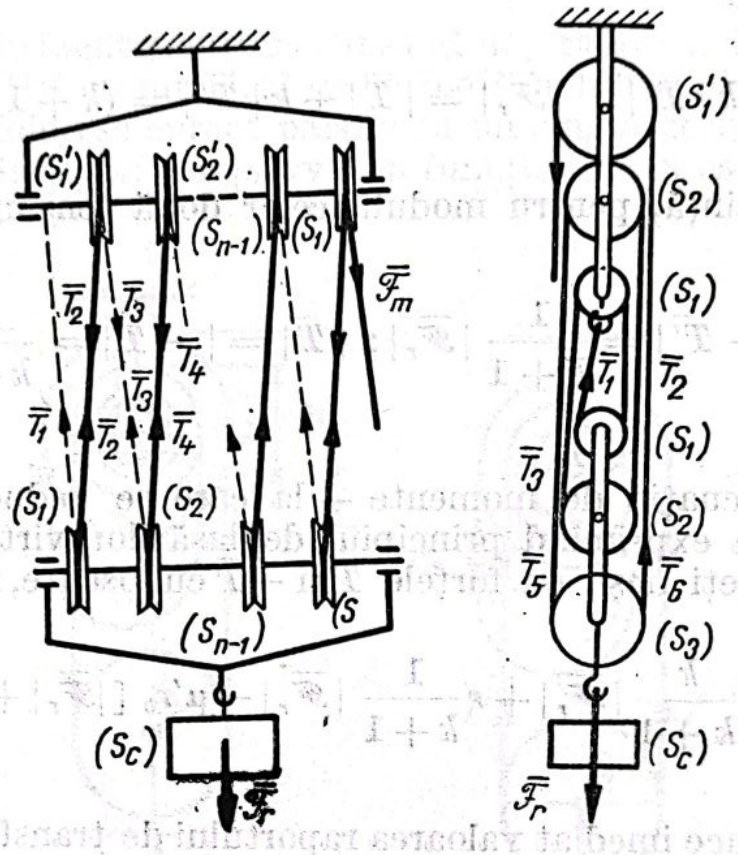


Fig. 16.14

tuturor scripeților sînt egale, fie pe axe paralele (fig. 16.14, b) cînd razele scripeților din fiecare bloc sînt diferite.

Una din mufle este fixă, iar cealaltă mobilă, furca ultimei fiind prevăzută cu un cîrlig de care se atîrnă sarcina de ridicat. Înfășurarea firelor se face ca în figură.

În ipoteza — acceptată de la început — că se neglijează greutățile proprii ale elementelor sistemului mecanic, forțele care acționează asupra blocului mobil, considerat separat din sistem, sînt cele $2n$ tensiuni din firele de legătură și sarcina $\overline{F}_r$, forțe considerate, toate, paralele în ambele tipuri de palane, putîndu-se scrie, în consecință,

relaţia

$$|\bar{\mathcal{F}}_r| = \sum_{i=1}^{n} [|\bar{T}_{2i-1}| + |\bar{T}_{2i}|]. \tag{16.74}$$

Pe de altă parte, dacă se consideră o pereche de scripeţi în direct legătură, (S_i) din mufla mobilă şi (S'_i) din mufla fixă, (fig. 16.15),

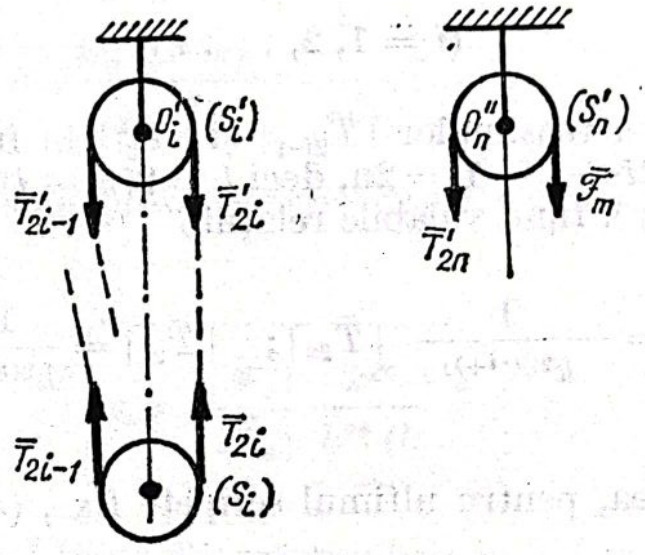


Fig. 16.15

se vede imediat că pentru scripetele mobil (S_i) tensiunea $\bar{T}_{2i-1}$ joacă rolul de forţă rezistentă, iar tensiunea $\bar{T}_{2i}$ rolul de forţă motoare, putîndu-se scrie relaţiile

$$|\bar{T}_{2i-1}| = \frac{1}{k}|\bar{T}_{2i}| = \frac{1}{k}|\bar{T}'_{2i}|, \tag{16.75}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

iar pentru scripetele fix (S'_i), în care tensiunea $\bar{T}'_{2i+1}$ joacă rolul de forţă motoare, iar tensiunea $\bar{T}'_{2i}$ rolul e forţă rezistentă, vor fi valabile relaţiile

$$|\bar{T}_{2i}| = |\bar{T}'_{2i}| = \frac{1}{k}|\bar{T}'_{2i+1}| = \frac{1}{k}|\bar{T}_{2i+1}|, \tag{16.76}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Scanned with CamScanner

Sînt evidente deci şirurile de relaţii

$$|\bar{T}_{2i-1}| = \frac{1}{k}|\bar{T}_{2i}| = \frac{1}{k^2}|\bar{T}_{2i+1}| = \ldots = \frac{1}{k^l}|\bar{T}_{2i+l-1}|;$$

$$|\bar{T}_{2i}| = \frac{1}{k}|\bar{T}_{2i+1}| = \frac{1}{k^2}|\bar{T}_{2i+2}| = \ldots = \frac{1}{k^l}|\bar{T}_{2i+l}|,$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{16.77}$$

pentru exprimarea tensiunilor $|\bar{T}_{2i-1}|$ şi $|T_{2i}|$ în funcţie de ultimul termen din şir, $(2i + l - 1 = 2n$, deci $l = 2(n - i) + 1$ şi $2i + l = 2n$, deci $l = 2(n - i)$), fiind valabile relaţiile

$$|\bar{T}_{2i-1}| = \frac{1}{k^{2(n-i+1)}}|\bar{T}_{2n}|; \quad |\bar{T}_{2i}| = \frac{1}{k^{2(n-i)}}|\bar{T}_{2u}| \tag{16.78}$$

De asemenea, pentru ultimul scripete fix , (S'_n), se poate scrie relaţia

$$|\bar{T}'_{2n}| = |\bar{T}_{2n}| = \frac{1}{k}|\bar{\mathscr{F}}_m|, \tag{16.79}$$

în baza cărora expresiile (16.78) vor lua formele

$$|\bar{T}_{2i-1}| = \frac{1}{k^{2(n-l)+2}}|\bar{\mathscr{F}}_m|; \quad |\bar{T}_{2i}| = \frac{1}{k^{2(n-l)+1}}|\bar{\mathscr{F}}_m|. \tag{16.80}$$

Folosind aceste expresii în relaţia (16.74), se obţine egalitatea

$$|\bar{\mathscr{F}}_r| = |\bar{\mathscr{F}}_m| \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{k^{2(n-l)+2}} + \frac{1}{k^{2(n-l)+1}} \right] =$$

$$= |\bar{\mathscr{F}}_m| \left[\frac{1}{k^{2n}} + \frac{1}{k^{2n-1}} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} \right], \tag{16.81}$$

termenii din paranteza dreaptă formînd o progresie geometrică de rație $q = k > 1$, primul termen al progresiei fiind $a_1 = \frac{1}{k^{2n}}$ iar ultimul $a_{2n} = \frac{1}{k}$. Ținînd seama de expresia sumei celor 2n termeni ai progresiei, adică

$$S_{2n} = \frac{a_{2n}\, q - a_1}{q-1} = \frac{1 - \frac{1}{k^{2n}}}{k-1} = \frac{k^{2n}-1}{k^{2n}(k-1)},$$

rezultă următoarea expresie pentru raportul de transformare al palanului cu mufle

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\bar{\mathcal{F}}_r|}{|\bar{\mathcal{F}}_m|} \frac{k^{2n}-1}{k^{2n}(k-1)}}. \tag{16.82}$$

În cazul cînd se neglijează frecările în acticualții și rigiditatea firelor , ($k = 1$), expresia (16.82), după simplificarea prin $(k-1)$, forma simplficată

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\bar{\mathcal{F}}_r|}{|\bar{\mathcal{F}}_m|} = 2n}. \tag{16.83}$$

16.2.2. Mașini simple constituite din rigide rezemate

În cazul acestei categorii de mașini simple, care folosesc obișnuit deplasarea prin alunecare a corpulrilor pe un plan de reazem înclinat pentru aplicarea principiului deplasărilor virtuale va trebui găsită, în prelabil, expresia reacțiunii normale a planului înclinat asupra corpului deplasat, definită prin relația

$$\bar{N} = \Sigma\, \Delta \bar{N}\,, \tag{16.84}$$

în care suma va trebui extinsă la toate porțiunile de arie de contact ale corpului cu planul de rezemare ; în baza ipotezelor de lucru adoptate la începutul paragrafului, expresia reacțiunii rezultante va fi obținută prin proiectarea relației vectoriale

$$\overline{\mathscr{F}}_m + \overline{\mathscr{F}}_r + (\Sigma \Delta \overline{N}) + (\Sigma \Delta \overline{\Phi}) = 0 \qquad (16.85)$$

pe o direcție convenabil aleasă în fiecare caz studiat, în funcție de orientarea forței motoare, ecuația de proiecție permițînd apoi să se determine mărimea $|\overline{N}| = |\Sigma\Delta\overline{N}|$ și deci și modulul forței de frecare la alunecare $|\overline{\Phi}| = \mu\,|\Sigma\Delta\overline{N}|$.

Din această de-a doua categorie de mașini simple fac parte următoarele tipuri mai importante :

1°. Planul înclinat

Planul înclinat de unghiul α față de planul orizontal este folosit, de regulă, la ridicarea corpurilor grele la anumite înălțimi, operația de ridicare efectuîndu-se, în general, prin alunecare. Forța rezistentă este reprezenată, în această situație, prin greutatea corpului, aplicată în centrul de greutate G al acestuia, despre acest centru adoptîndu-se ipoteza că se deplasează rectiliniu, după o paralelă la linia de cea mai mare pantă a planului înclinat ; forța motoare $\overline{\mathscr{F}}_m$, considerată situată în același plan vertical în care se găsește și forța rezistentă $\overline{\mathscr{F}}_r$ și care conține și linia de cea mai mare pantă a planului înclinat după care se deplasează punctul teoretic de rezemare, formează un unghi β cu planul înclinat, (fig. 16.16).

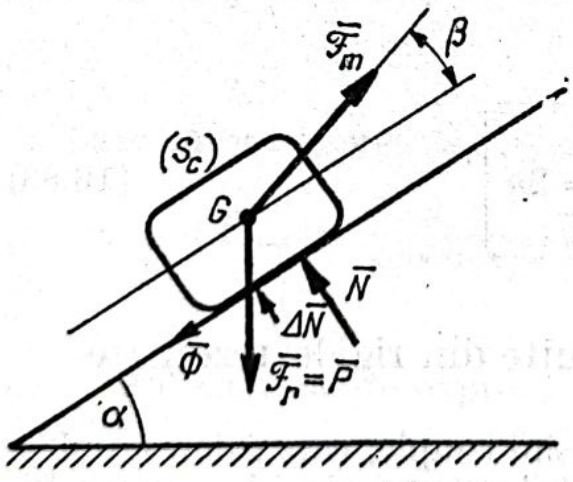


Fig. 16.16

În condițiile menționate mai sus, este avantajos să se proiecteze ecuația vectorială (16.85) pe direcția normalei la planul înclinat, obținîndu-se din această ecuație de proiecție modulul reacțiunii nor-

male a planului

$$|\overline{N}| = |\Sigma \Delta \overline{N}| = |\overline{\mathscr{F}_r}| \cos\alpha - |\overline{\mathscr{F}_m}| \sin\beta > 0 \qquad (16.86)$$

şi deci şi modulul forţei de frecare la alunecare

$$|\overline{\Phi}| = \mu |\Sigma\Delta\overline{N}| = \mu [|\overline{\mathscr{F}_r}| \cos\alpha - |\overline{\mathscr{F}_m}| \sin\beta], \qquad (16.87)$$

ultima forţă putînd fi considerată în continuare ca solicitare exterioară cunoscută.

Alegînd drept pol invariabil legat de sarcina de ridicat chiar centrul său de masă ($\delta\bar{r}_G = \delta x_G\, i$; $\delta\overline{\Theta} = 0$), va rezulta următoarea formă concretă pentru relaţia exprimînd principiul deplasăriior virtuale aplicat mişcării de regim a sarcinii:

$$(\overline{\mathscr{F}_m} + \overline{\mathscr{F}_r} + \overline{\Phi})\delta\bar{r}_G = 0, \qquad (16.88)$$

sau încă, exprimînd analitic relaţia în raport cu reperul fix, mai rezultă

$$(|\overline{\mathscr{F}_m}| \cos\beta - |\overline{\mathscr{F}_r}| \sin\alpha - |\overline{\Phi}|)\, \delta x_G = 0, \qquad (16.89)$$

cu consecinţa

$$(|\overline{\mathscr{F}_m}| \cos\beta - |\overline{\mathscr{F}_r}| \sin\alpha - |\overline{\Phi}|) = 0,$$

sau încă, ţinînd seama şi de expresia (16.87) a lui $|\Phi|$, mai rezultă

$$|\overline{\mathscr{F}_m}| \cos\beta - |\overline{\mathscr{F}_r}| \sin\alpha - \mu [|\overline{\mathscr{F}_r}| \cos\alpha - |\overline{\mathscr{F}_m}| \sin\beta] = 0 \qquad (16.90)$$

Din ultima relaţie se va putea scoate expresia *raportului de transformare* în cazul planului înclinat:

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathscr{F}_r}|}{|\overline{\mathscr{F}_m}|} = \frac{\cos\beta + \mu \sin\beta}{\sin\alpha + \mu \cos\alpha} = \frac{\cos(\beta - \varphi_{al})}{\sin(\alpha + \varphi_{al})}}, \qquad (16.91)$$

cu

$$\varphi_{al} = \operatorname{arctg} \mu$$

Observînd apoi că cele două lucruri mecanice — util și motor — au, în cazul de față, expresiile

$$\mathcal{L}_u = \left| \int_{x_G^0}^{x_G} \overline{\mathcal{F}}_r \, d\bar{r}_G \right| = \left| -\int_{x_G^0}^{x_G} |\overline{\mathcal{F}}_r| \sin\alpha \, dx_G \right| = |\overline{\mathcal{F}}_r \sin\alpha \, (x_G - x_G^0), \tag{16.92}$$

respectiv

$$\mathcal{L}_m = \int_{x_G^0}^{x_G} \overline{\mathcal{F}}_m \, d\bar{r}^{\mathcal{D}} = \int_{x_G^0}^{x_G} |\overline{\mathcal{F}}_m| \cos\beta \, dx_G = |\overline{\mathcal{F}}_m| \cos\beta \, (x_G - x_G^0), \tag{16.93}$$

rezultă și expresia *randamentului planului înclinat*:

$$\boxed{\eta = 100 \frac{\mathcal{L}_u}{\mathcal{L}_m} \% = 100 \frac{|\overline{\mathcal{F}}_r|}{|\overline{\mathcal{F}}_m|} \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \% = 100 \frac{\sin\alpha \cos(\beta - \varphi_{al})}{\cos\beta \sin(\alpha + \varphi_{al})} \%}. \tag{16.94}$$

În cazul cînd se neglijează frecarea de alunecare ($\mu = 0$; $\varphi_{al} = 0$), relațiile (16.91) și (16.94) capătă formele

$$\boxed{\rho_l = \frac{|\overline{\mathcal{F}}_r|}{|\overline{\mathcal{F}}_m|} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}}, \tag{16.95}$$

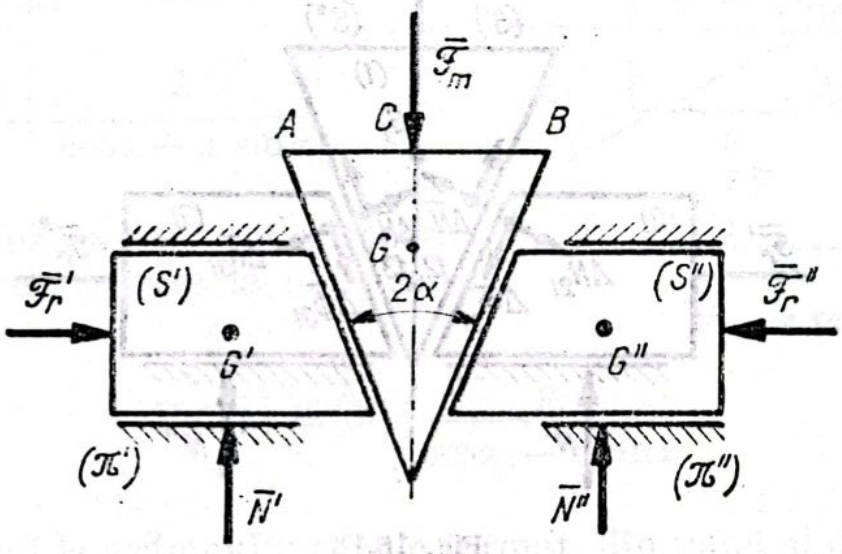
respectiv

$$\boxed{\eta = 100 \ \%}. \tag{16.96}$$

Scanned with CamScanner

2°. Pana

Pana este un rigid, avînd forma unei prisme triunghiulare cu baza, obișnuit, un triunghi isoscel și servind, ca mașină simplă, la îndepărtarea corpurilor (S') și (S'') între care este introdusă și împreună cu care formează iun sistem mecanic, (fig. 16.17); ca urmare



Eig. 16.17

a reazemelor exterioare pe planele (Π') și (Π''), cele două corpuri îndepărtate prin pană au posibilitatea să se deplasezem prin translații rectilinii, numai în direcție normală la planul de simetrie longitudinală a penei, plan a cărui urmă pe planul figurii 28.17, este dreapta OC.

De regulă, în cazul acestui sistem mecanic sînt neglijate greutățile proprii ale elementelor sistemului, precum și frecările î reazemele exterioare aplicate rigidelor (S') și (S''); în consecință, solicitările la care va fi considerat supus sistemul meanic reprzentat în fig. 16.17 vor fi reprezentate, în cazul introducerii penei, prin:

— forța motoare $\bar{F}_m$, acționînd asupra feței prismei opusă *unghiului de atac* — egal cu 2α radiani — al prismei, suportul acestei forțe coincizînd cu urma *OC* a planului de simetrie longitudinală al penei;

— forțele rezistente $\bar{F}_r'$ și $\bar{F}_r''$, aplicate corpurilor (S') și (S''), cu direcții normale la planul de simetrie longitudinală al penei și cu modulii egali, din motive de simetrie:

$$|\bar{F}_r'| = |\bar{F}_r''| = |\bar{F}_r| \qquad (16.97)$$

— reacţiunile reazemelor exterioare pe planele (Π′) şi (Π″), reduse, în condiţiile neglijării frecărilor, numai la reacţiunile rezultante normale $\bar{N}'$ şi $\bar{N}''$, (gfig. 16.18);

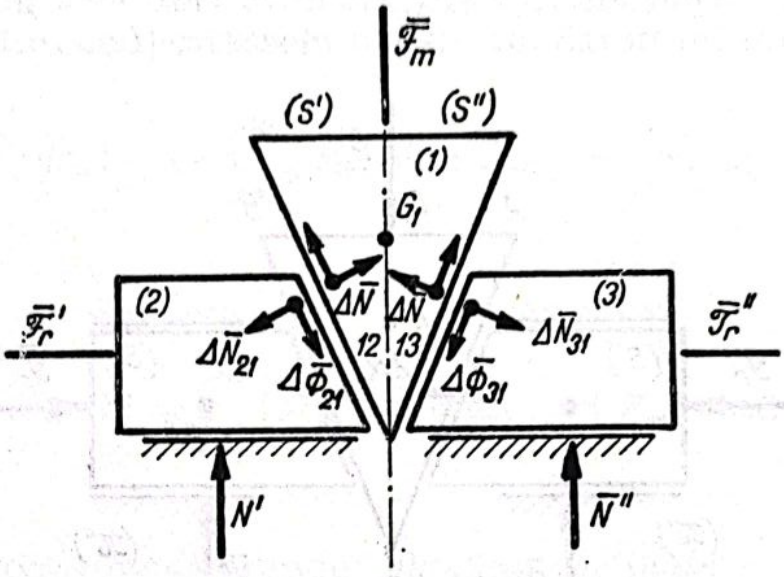


Fig. 16.18

— reacţiunile reazemelor interioare ale penei pe feţele oblice ale celor două corpuri îndepărtate prin pană (fig. 16.18), pentru modulii componentelor acestor reacţiuni fiind valabile, datorită simetriei penei şi simetriei şi a distribuţiei solicitărilor active, relaţiile

$$|\Sigma\Delta\bar{N}_{12}| = |\Sigma\Delta\bar{N}_{21}| = |\Sigma\Delta\bar{N}_{13}| = |\Sigma\Delta\bar{N}_{31}| = |\Sigma\Delta\bar{N}|;$$
$$|\Sigma\Delta\bar{\Phi}_{12}| = |\Sigma\Delta\bar{\Phi}_{21}| = |\Sigma\Delta\bar{\Phi}_{13}| = |\Sigma\Delta\bar{\Phi}_{31}| = |\Sigma\Delta\bar{\Phi}|, \tag{16.98}$$

cu

$$|\Sigma\Delta\bar{\Phi}| = \mu\,|\Sigma\Delta\bar{N}|. \tag{16.99}$$

Scriind ecuaţia de echilibru dinamic corespunzătoare deplasării prin translaţie în regim permanent — deci cu forţe de inerţie zero — a corpului (S'), (fig. 16.19), rezultă relaţia

$$\bar{\mathcal{F}}_r + \bar{N}' + \Sigma\Delta\bar{N}_{21} + \Sigma\Delta\bar{\Phi}_{21} = 0, \tag{16.100}$$

din care, prin proiectare pe direcţia forţei rezistente $\bar{\mathscr{F}}_r$ — luată şi ca direcţie a axei Ox — , se obţine egalitatea

$$|\bar{\mathscr{F}}_r| - |\Sigma \Delta N_{21}| \cos\alpha + \mu |\Sigma \Delta N_{21}| \sin\alpha = 0, \tag{16.101}$$

rezultînd de aici mărimea

$$|\Sigma \Delta \bar{N}_{21}| = |\Sigma \Delta \bar{N}| = \tag{16.102}$$

$$= |\bar{\mathscr{F}}_r| \frac{1}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha}$$

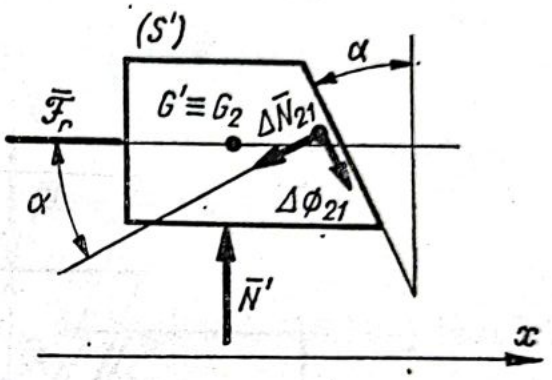


Fig. 16.19

şi deci şi valoarea comună a modulilor forţelor de frecare la alunecare interioare

$$|\Sigma \Delta \bar{\Phi}| = |\bar{\mathscr{F}}_r| \frac{\mu}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}. \tag{16.103}$$

Revenind la sistemul mecanic format din pană şi din cele două rigide îndepărtate prin ea, se observă imediat, (fig. 16.20), că ecuaţiile de legătură interioară corespunzătoare celor două reazeme ale penei pe feţele înclinate ale corpurilor îndepărtate, au formele

$$y_{G_1} - y^0_{G_1} = \operatorname{ctg}\alpha\,(x_{G_2} - x^0_{G_2}); \quad y_{G_1} - y^0_{G_1} = -\operatorname{ctg}\alpha\,(x_{G_3} - x^0_{G_3}),$$

rezultînd de aici următoarele expresii ale deplasărilor virtuale δx_{G_2} şi δx_{G_3} ale celor două corpuri în translaţii rectilinii în lungul axei Ox în funcţie de deplasarea virtuală δ_{G_1} a penei, efectuată în lungul axei Oy

$$\delta x_{G_2} = \operatorname{tg}\alpha\, \delta y_{G_1}; \qquad \delta x_{G_3} = -\operatorname{tg}\alpha\, \delta y_{G_1} \tag{16.105}$$

Aplicînd principiul deplsărilor virtuale acestu sistem mecanic cu mişcare în regim permanent, ţinîndu-se seama însă şi de forţele de frecare la alunecare interioare cu modulii determinaţi prin relaţiile (16.103), va rezulta egalitatea

$$[\bar{\mathscr{F}}_m + \Sigma \Delta \bar{\Phi}_{12} + \Sigma \Delta \bar{\Phi}_{13}]\, \delta \bar{r}_{G_1} + [\bar{\mathscr{F}}'_r + \Sigma \Delta \bar{\Phi}_{21}] \delta \bar{r}_{G_2} +$$

$$+ [\bar{\mathscr{F}}''_r + \Sigma \Delta \bar{\Phi}_{31}] \delta \bar{r}_{G_3} = 0,$$

cu următoarea expresie analitică în raport cu reperul fix Oxy:

$$[-|\overline{\mathscr{F}}_m| + |[\Sigma\Delta\overline{\Phi}_{12}|\cos\alpha + |\Sigma\Delta\overline{\Phi}_{13}|\cos\alpha]\,\delta y_{G_1} + [|\overline{\mathscr{F}}'_r| + |\Sigma\Delta\overline{\Phi}_{21}|\sin\alpha\,|\delta x_{G_2} + [-|\overline{\mathscr{F}}''_r| - |\Sigma\Delta\overline{\Phi}_{31}\sin\alpha]\,\delta x_{G_3} = 0. \tag{16.106}$$

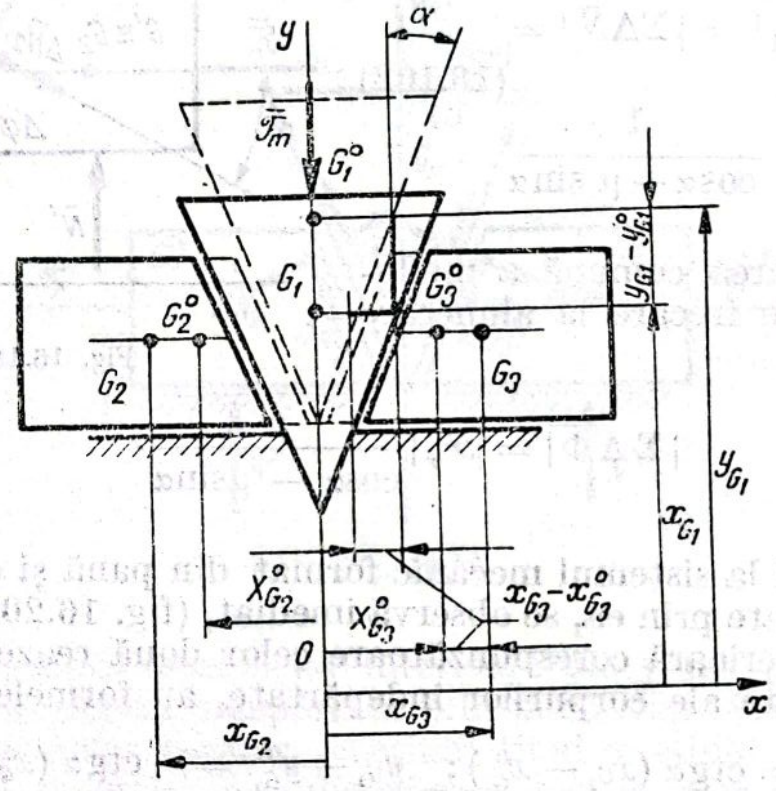


Fig. 16.20

Dacă se mai ține seama acum de relațiile (16.103), precum și de expresiile (16.105) ale deplasărilor virtuale δx_{G_2} și δx_{G_3}, se obține, după simplificare prin δy_{G_1} și reducerea termenilor asemenea, relația

$$-|\overline{\mathscr{F}}_m| + 2\,|\overline{\mathscr{F}}_r|\,\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = 0, \tag{16.107}$$

din care va rezulta expresia căutată a *raportului de transformare al penei*:

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|} = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{1}{2}\,\operatorname{ctg}(\alpha + \varphi_{at})} \tag{16.108}$$

Trecînd la calculul lucrurilor mecanice ale celor două categorii de solicitări exterioare active — motoare și rezistente — , se va observa că lucrul mecanic util efectuat de forțele rezistente într-un interval oarecare de timp $[0, t]$, este dat de relația

$$\mathscr{L}_u = \left| \int_0^t (\overline{\mathscr{F}}'_r \, d\bar{r}_{G_3} + \overline{\mathscr{F}}''_r d\bar{r}_{G_3}) \right| = \left| \int_0^t (|\overline{\mathscr{F}}'_r| \, dx_{G_2} - \right.$$

$$\left. - |\overline{\mathscr{F}}''_r \, dx_{G_3}]| = |\overline{\mathscr{F}}_r| \left| \int_0^t (dx_{G_2} - dx_{G_3}) \right| \right.,$$

sau încă, remarcînd că în baza ecuațiilor de legătură (16.104) rezultă relația

$$dx_{G_2} - dx_{G_3} = 2 \operatorname{tg}\alpha \cdot dy_{G_1},$$

se mai poate scrie

$$\mathscr{L}_u = 2 \left| \overline{\mathscr{F}}_r | \operatorname{tg}\alpha | \int_{y_{G_1}}^{y_{G_1}} dy_{G_1} \right| = 2 | \overline{\mathscr{F}}_r | \operatorname{tg}\alpha [y^0_{G_1} - y_{G_1}), \quad (16.109)$$

iar lucrul mecanic motor va fi dat de relația

$$\mathscr{L}_m = \int_0^t \overline{\mathscr{F}}_m \, d\bar{r}_{G_1} = -\int_{y_{G_1}}^{y_{G_1}} | \overline{\mathscr{F}}_m | \, dy_{G_1} = - | \overline{\mathscr{F}}_m | \int_{y_{G_1}}^{y_{G_1}} \mathrm{d}y_{G_1} =$$

$$= | \overline{\mathscr{F}}_m | (y^0_{G_1} - y_{G_1}), \quad (16.110)$$

$y^0_{G_1}$ fiind ordonata centrului de greutate G_1 al penei corespunzătoare momentului inițial al duratei de introducere a ei între cele două rigide îndepărtate prin pană.

În baza ultimelor două relații, rezultă următoarea expresie pentru *randamentul penei*

$$\eta = 100 \frac{\mathscr{L}_u}{\mathscr{L}_m} \% = 100 \rho_t \cdot 2 \operatorname{tg}\alpha \% = 100 \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_{al})}. \quad (16.111)$$

În cazul cînd se neglijează frecările în reazemele interioare, ($\mu = 0$; $\varphi_{al} = 0$), expresiile (16.108) și (16.111) ale raportului de transformare și randamentului penei iau formele particulare

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathcal{F}}_r|}{|\overline{\mathcal{F}}_m|} = \frac{1}{2\mathrm{tg}\alpha}}, \tag{16.112}$$

respectiv

$$\boxed{\eta = 100\ \%}. \tag{16.113}$$

Un raționament absolut analog celui folosit la stabilirea relațiilor (16.108) și (16.111) poate permite determinarea raportului de transformare și în cazul scoaterii penei din lăcașul ei, deci în cazul apropierii corpurilor (S') și (S''), cu observația că în această ultimă situație intervin următoarele modificări în distribuția solicitărilor aplicate sistemului mecanic considerat:

— se inversează sensurile forțelor de frecare la alunecare, $\Delta\overline{\Phi}_{12} = -\Delta\overline{\Phi}_{21}$ și $\Delta\overline{\Phi}_{13} = -\Delta\overline{\Phi}_{31}$, (fig. I6.21);

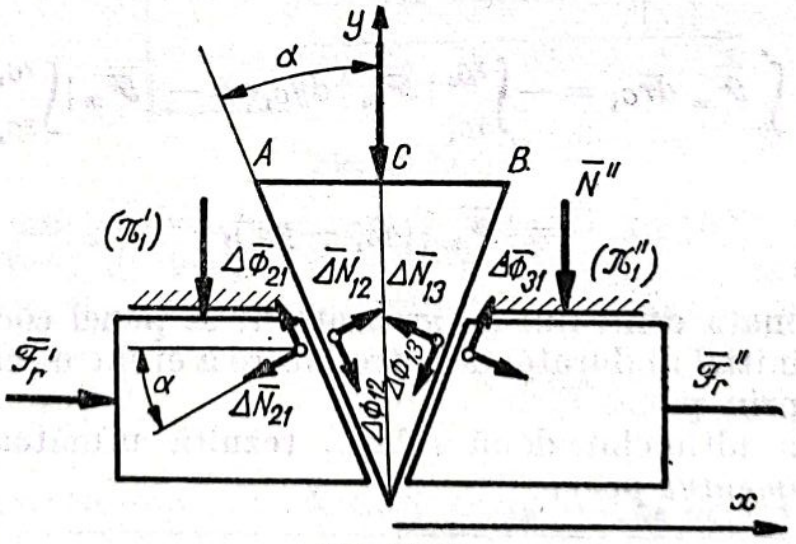


Fig. 16.21

— se inversează sensurile reacțiunilor normale $\overline{N}'$ și $\overline{N}''$, ca urmare a faptului că la scoaterea penei rezemarea exterioară a corpurilor (S') și (S'') se face pe planele (Π'_1) și (Π''_1), (fig. 16.21);

— forța motoare poate avea sensul invers sensului obligatoriu la introducerea penei, după cum poate avea însă și sensul din situația precedentă, adică pana ar putea ieși din lăcaș chiar cu o forță de apăsare exercitată asupra ei.

Din ecuația vectorială (16.100), valabilă și în această situație, va rezulta acum următoarea valoare comună pentru modulii reacțiunilor normale interioare

$$|\Sigma\Delta\overline{N}| = |\overline{\mathscr{F}}_r| \frac{1}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} \tag{16.114}$$

și deci următoarea valoare comună a modulilor forțelor rezultante de frecare al alunecare în reazemele interioare

$$|\Sigma\Delta\overline{\Phi}| = |\overline{\mathscr{F}}_r| \frac{\mu}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \tag{16.115}$$

Notînd, în continuare, cu $\mathscr{F}_m$ valoarea scalară-raportată la versorul $\overline{\jmath}$ al axei Oy — a forței motoare, relației vectoriale exprimînd principiul deplasărilor virtuale aplicat sistemului mecanic considerat în noua situație, îi va corespunde acum următoarea expresie analitică în raport cu reperul fix Oxy :

$$\begin{aligned}&[\mathscr{F}_m - |\Sigma\Delta\overline{\Phi}_{12}|\cos\alpha - |\Sigma\Delta\overline{\Phi}_{13}|\cos\alpha]\,\delta y_{G_1} + \\ &+ [|\overline{\mathscr{F}}_r| - |\Sigma\Delta\Phi_{21}|\sin\alpha]\,\delta x_{G_2} + \\ &+ [-|\overline{\mathscr{F}}_r| + |\Sigma\Delta\overline{\Phi}_{31}|\sin\alpha]\,\delta x_{G_3} = 0,\end{aligned} \tag{16.116}$$

rezultînd de aici, după utilizarea din nou a relațiilor (16.105) și considerarea expresiilor (15.115) ale forțelor de frecare la alunecare, următoarea relație între valoarea scalară a forței motoare și între modulul, comun. al celor două forțe rezistente :

$$\boxed{\mathscr{F}_m = -2|\overline{\mathscr{F}}_r| \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 2|\overline{\mathscr{F}}|\,\mathrm{tg}(\alpha - \varphi_{al})}. \tag{16.117}$$

Ultima relație permite să se tragă unele concluzii importante pentru aplicațiile tehnice privind condițiile în care o pană poate ieși din lăcașul ei, (fig. 16.22), concluzii care vor rezulta din examinarea următoarelor trei situații:

Cazul I, caracterizat prin condiția

$$\alpha > \varphi_{al} \tag{16.118}$$

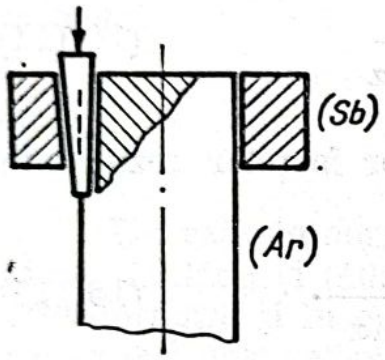


Fig. 16.22

cu consecința imediată, rezultînd din relația (16.117):

$$\mathscr{F}_m < 0, \tag{16.119}$$

adică:

„În cazul cînd semiunghiul de atac al penei este mai mare decît unghiul de frecare la alunecare corespunzător reazemelor interioare. pentru asigurarea stabilității penei în lăcașul în care a fost introdusă este absolut necesară exercitarea unei forțe de apăsare asupra penei, cu modulul dat de relația (16.117)".

Cazul II, caracterizat prin condiția

$$\alpha = \varphi_{al}, \tag{16.120}$$

pentru care relația (16.117) conduce la valoarea

$$\mathscr{F}_m = 0 \tag{16.121}$$

pentru forța motoare necesară asigurării echilibrului penei în lăcașul ei, adică:

„În cazul cînd semiunghiul de atac al penei este egal cu unghiul de frecare la alunecare corespunzător reazemelor interioare, stabilitatea penei în lăcașul ei este asigurată fără nici o forță de apăsare exercitată asupra ei".

Cazul II, corespunzător condiției

$$\alpha < \varphi_{al} \tag{16.122}$$

cu următoarea consecință rezultînd din relația (16.117):

$$\mathscr{F}_m > 0, \tag{16.123}$$

adică :

„În cazul cînd semiunhiul de atac al penei este mai mic decît unghiul de frecare la alunecare corespunzător reazemelor interioare, stabilitatea penei este asigurată nu numai fără nici o forță de apăsare exercitată asupra ei, ci chiar și atunci cînd este acționată de o forță activă orientată astfel încît să scoată pana din lăcaș, cu condiția ca mărimea acestei forțe să nu depășească valoarea (16.117)".

Se spune, în acest ultim caz, că pana este *stabil autofixată.*

3°. Cricul

Mașina simplă denumită *cric*, folosită în tehnică pentru ridicarea — sau coborîrea — pe distanțe mici a unor sarcini foarte mari, este alcătuită dintr-un *șurub de forță* (*Șb*), cu profil, de regulă, dreptunghiular și care este rotit cu ajutorul unei manivele *ON*, solidară cu șurubul, în jurul axei sale (Δ), imprimîndu-i-se astfel o mișcare elicoidală în raport cu piulița fixă (*Bc*), (fig. 16.23).

Și în cazul acestei mașini simple se neglijează, obișnuit, greutatea proprie a șurubului, astfel că solicitările la care va fi considerat supus cricul în timpul ridicării sarcinii vor fi reprezentate prin :

— forța motoare $\overline{\mathcal{F}}_m$, acționînd la extremitatea M a manivelei, considerată în permanență normală atît la axa șurubului, cît și la axa manivelei și cu modulul constant, ordinul lui de mărime fiind acela al forței dezvoltate de un om în condiții normale de lucru ;

— forța rezistentă $\overline{\mathcal{F}}_r$, reprezentată prin greutatea sarcinii ridicate, drept suport al acestei forțe fiind considerat, în permanență, axa șurubului ;

— reacțiunile reazemului feței inferioare a filetului șurubului pe fața superioară a filetului piuliței — această legătură fiind echivalentă cu un reazem pe un plan înclinat de unghiul α față de planul orizontal, α fiind unghiul de înfășurare a elicei care generează filetul —, reacțiuni de forma

$$\Delta\overline{R} = \Delta\overline{N} + \Delta\overline{\Phi}, \tag{16.124}$$

cu componentele $\Delta\overline{N}$ normale la fața inferioară a filetului șurubului și cu componentele $\Delta\overline{\Phi}$ situate în planul tangent la aceeași față a filetului și totodată și în planul tangent la cilindrul circular drept avînd ca axă axa șurubului și ca rază distanța punctului de contact

în care a fost considerată reacţiunea $\Delta\bar{R}$, la axa şurubului, (fig. 16.24).

Pentru mişcarea de ridicare în regim permanent a cricului va rezulta deci următoarea ecuaţie de echilibru dinamic

$$\bar{\mathcal{F}}_m + \bar{\mathcal{F}}_r + \Sigma\Delta\bar{N} + \Sigma\Delta\bar{\Phi} = 0. \qquad (16.125)$$

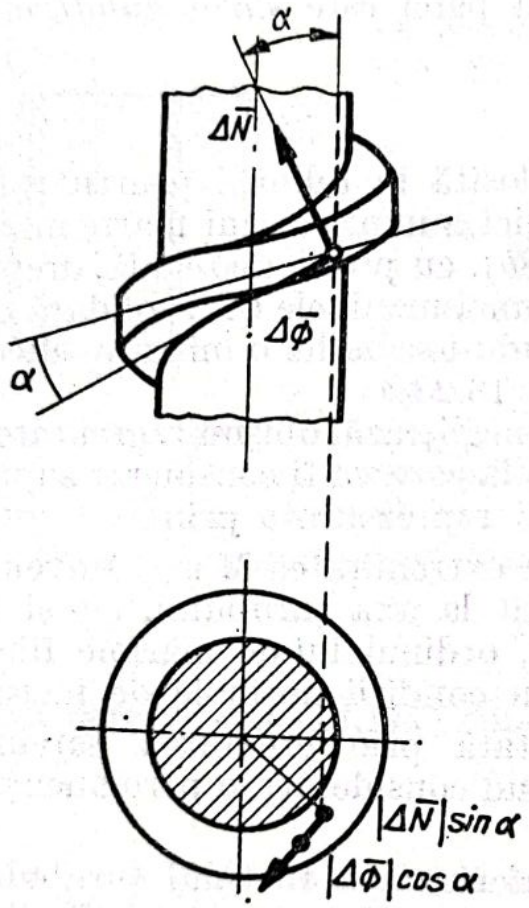


Fig. 16.23

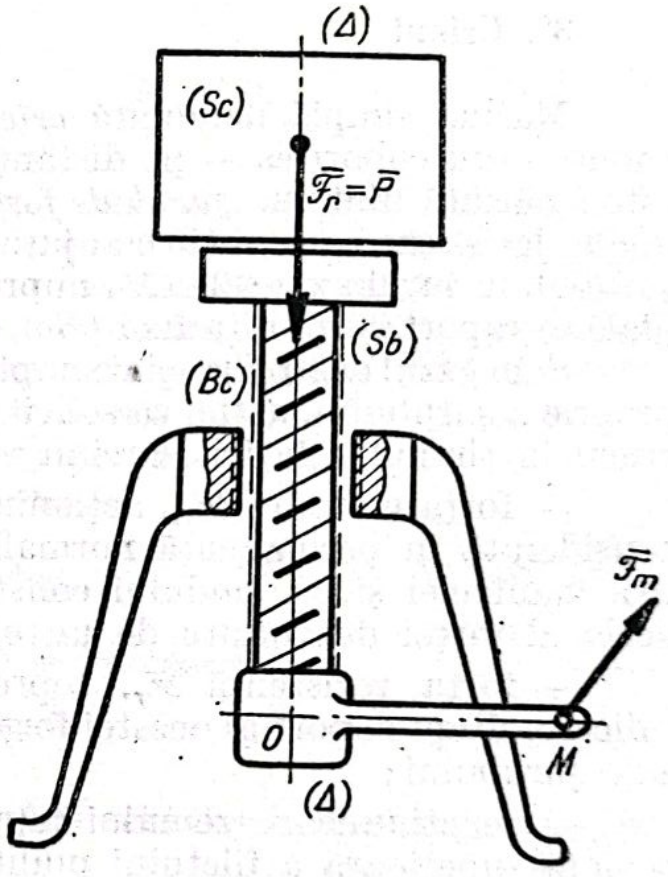


Fig. 16.24

Proiectînd ultima relaţie pe axa şurubului consuderată ca axă *Oz* şi observînd, (fig. 16.24), că toate reacţiunile normale $\Delta\bar{N}$ formează cu această axă unghiul α şi că toate forţele de frecare la alunecare $\Delta\bar{\Phi}$ formează, cu aceeaşi axă, unghiul $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă relaţia

$$-|\bar{\mathcal{F}}_r| + (\Sigma\,|\Delta\bar{N}|)\cos\alpha - \mu\,(\Sigma\,|\Delta\bar{N}|)\sin\alpha = 0, \qquad (16.126)$$

din care se va scoate mărimea

$$\Sigma|\Delta\overline{N}| = |\overline{\mathscr{F}}_r| \cdot \frac{1}{\cos\alpha - \mu \sin\alpha} \cdot \tag{16.127}$$

Alegînd ca pol invariabil legat de şurub un punct Q, arbitrar, situat pe axa şurubului ($\overline{\mathscr{F}}_m \delta\bar{r}_Q = 0$, $\overline{\mathscr{M}}_Q(\overline{\mathscr{F}}_r) = 0$) şi aplicînd principiul deplasărilor virtuale mişcării în regim permanent a acestuia, se va putea scrie relaţia

$$(\overline{\mathscr{F}}_r + \Sigma\overline{\Delta\Phi})\ \delta\bar{r}_Q + [\overline{\mathscr{M}}_Q(\overline{\mathscr{F}}_m) + \Sigma\overline{\mathscr{M}}_Q(\Delta\overline{\Phi})]\ \delta\overline{\Theta} = 0'$$

sau încă, exprimată analitic — primul grup de termeni în raport cu reperul fix, iar următorul în raport cu reperul legat de şurub — , mai rezultă

$$[-|\overline{\mathscr{F}}_r| + \Sigma\Delta\Phi_z]\ \delta z_Q + [\mathscr{M}'_{Qz}(\overline{\mathscr{F}}_m) + \Sigma\mathscr{M}'_{Qz}(\Delta\Phi)]\ \delta\varphi = 0. \tag{16.128}$$

Observînd, pe de o parte, că din ecuaţia de legătură corespunzătoare mişcării de şurub, adică

$$z_Q = p_s\,\varphi = \frac{h}{2\pi}\,\varphi = r\,\mathrm{tg}\alpha \cdot \varphi,$$

rezultă următoarea relaţie între deplasările virtuale δz_Q şi $\delta\varphi$

$$\delta z_Q = r\mathrm{tg}\alpha \cdot \delta\varphi \tag{16.129}$$

şi că pentru proiecţiile pe axa Oz ale solicitărilor ce figurează în relaţia (1a.128) pot fi scrise, (fig. 16.24), expresiile

$$\begin{aligned}
&\Sigma\Delta\Phi_z = -\Sigma|\Delta\overline{\Phi}|\sin\alpha = -(\Sigma|\Delta\overline{N}|)\,\mu\sin\alpha;\\
&\mathscr{M}'_{Qz}(\overline{\mathscr{F}}_m) = \mathscr{M}_m = |\overline{\mathscr{F}}_m|\,l;\\
&\Sigma\mathscr{M}'_{Qz}(\overline{\Delta\Phi}) = -(\Sigma|\Delta\overline{\Phi}|)\,r\cos\alpha = -(\Sigma|\Delta\overline{N}|)\mu r\cos\alpha,
\end{aligned} \tag{16.130}$$

Scanned with CamScanner

unde prin l s-a notat lungimea manivelei, iar prin r distanța medie la axa șurubului a elementelor de arie de contact între filetele șurubului și piuliței, mai rezultă următoarea formă pentru relația (16.128):

$$\left[-|\overline{\mathscr{F}}_r| \, r \operatorname{tg}\alpha + |\overline{\mathscr{F}}_m| \, l - (\Sigma |\Delta \overline{N}|) \frac{r\mu}{\cos\alpha} \right] \delta\varphi = 0, \tag{16.131}$$

cu consecința

$$|\overline{\mathscr{F}}_m| \, l - |\overline{\mathscr{F}}_r| \, r \operatorname{tg}\alpha - (\Sigma |\Delta \overline{N}|) \frac{r\mu}{\cos\alpha} = 0, \tag{16.132}$$

sau încă, ținînd seama și de relația (16.127), mai rezultă egalitatea

$$|\overline{\mathscr{F}}_m| \, l - |\overline{\mathscr{F}}_r| \, r \, \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = 0, \tag{16.133}$$

din care se va putea deduce expresia *raportului de transformare al cricului*:

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|} = \frac{l}{r} \, \frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{l}{r} \, \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_{al})}} \cdot \tag{16.134}$$

Observînd, în continuare, că pentru cele două lucruri mecanice efectuate de solicitările exterioare active, motoare și rezistente, într-un interval oarecare de timp [0, t] al mișcării în regim permanent pot fi scrise expresiile

$$\mathscr{L}_u = \left| \int_0^t \overline{\mathscr{F}}_r \, d\overline{r}_Q \right| = \left| -\int_{z_Q^0}^{z_Q} |\overline{\mathscr{F}}_r| \, dz_Q \right| = |\overline{\mathscr{F}}_r| \left| \int_{z_Q^0}^{z_Q} dz \right| = |\overline{\mathscr{F}}_r| (z_Q - z_Q^0), \tag{16.135}$$

respectiv

$$\mathscr{L}_m = \int_0^t \overline{\mathscr{M}}_Q (\overline{\mathscr{F}}_m) \, d\overline{\Theta} = \int_{\varphi^0}^{\varphi} \mathscr{M}_Q (\overline{\mathscr{F}}_m) \, d\varphi =$$

$$= |\overline{\mathscr{F}}_m| \, l \left(\int_{\varphi^0}^{\varphi} d\varphi \right) = |\overline{\mathscr{F}}_m| \, l \, (\varphi - \varphi^0), \tag{16.136}$$

Scanned with CamScanner

se poate stabili acum și expresia *randamentului cricului*, aceasta avînd forma

$$\eta = 100\,\frac{\mathscr{L}_u}{\mathscr{L}_m}\,\% = 100\,\frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|}\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{z_Q - z_Q^0}{\varphi - \varphi^0}\,\% =$$

$$= 100\,\frac{1}{r}\,\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_{al})}\cdot\frac{z_R - z_Q^0}{\varphi - \varphi^0}\,\%,$$

sau încă, ținînd seama și aici de ecuația de legătură corespunzătoare mișcrii de șurub, care permite să se scrie

$$z_Q - z_Q^0 = r\operatorname{tg}\alpha\,(\varphi - \varphi^0),$$

mai rezultă

$$\boxed{\eta = 100\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi_{al})}\,\%}\,. \qquad (16.137)$$

În cazul cînd se neglijează frecarea de alunecare între filetele șurubului și piuliței, ($\mu = 0$; $\varphi_{al} = 0$), relațiile (16.134) și (16.137) vor lua formele particulare

$$\boxed{\rho_t = \frac{|\overline{\mathscr{F}}_r|}{|\overline{\mathscr{F}}_m|} = \frac{l}{r\operatorname{tg}\alpha}}\,, \qquad (16.138)$$

respectiv

$$\boxed{\eta = 100\,\%}\,. \qquad (16.139)$$

Un raționament absolut identic celui folosit pentru determinarea raportului de transformare la ridicarea cricului permite stabi-

lirea acestui raport și în cazul coborîrii lui, observîndu-se numai că în această nouă situație se produc următoarele modificări în distribuția solicitărilor aplicate șurubului :

— forțele de frecare la alunecare vor avea acum sensurile inversate, (fig. 16.25), ceea ce înseamnă că proiecțiile lor și ale momentelor lor pe axele Oz, respectiv Oz', vor fi pozitive la coborîre ;

— forța motoare $\overline{\mathscr{F}}_m$ poate să aibă același sens ca și în cazul ridicării șurubului — se înțelege că va avea altă mărime decît cea considerată la ridicare — , sau poate avea chiar sensul contrar, adică coborîrea poate avea loc sub acțiunea unui moment exterior activ $\overline{\mathscr{M}}_m = \overline{\mathscr{M}}_O(\overline{\mathscr{F}}_m)$ orientat în lungul axei șurubului, cu oricare din cele două sensuri posibile pe această axă.

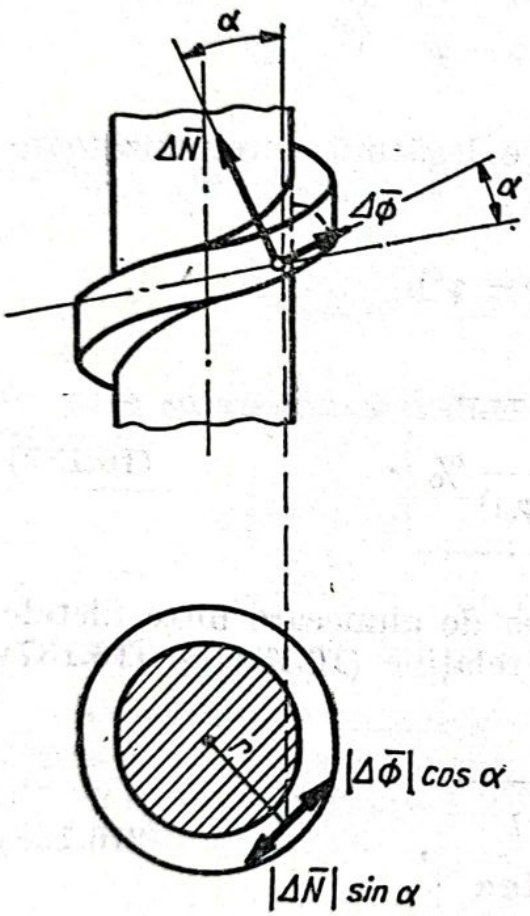


Fig. 16.25

Ținînd seama de observațiile precedente și proiectînd pe axa Oz cuația vectorială (16.125), valabilă și în cazul coborîrii șurubului, va rezulta acum următoarea valoare a mărimii $(\Sigma|\Delta\bar{N}|)$:

$$(\Sigma|\Delta\bar{N}|) = |\overline{\mathscr{F}}_r| \frac{1}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}. \tag{14.140}$$

De asemenea, notînd cu $\overline{\mathscr{M}}_m$ valoarea scalară, raportată la versorul $\bar{k}'$ al axei șurubului, a momentului forței motoare, condiția (16.132), rezultînd din aplicarea principiului deplasărilor virtuale mișcării în regim permanent a șurubului, va lua, în cazul coborîrii lui, forma

$$\mathscr{M}_m - |\overline{\mathscr{F}}_r| \, r \operatorname{tg}\alpha + (\Sigma|\Delta\bar{N}|) \frac{\mu r}{\cos\alpha} = 0, \tag{16.141}$$

din ultima relaţie, obţinîndu-se, ţinînd seama şi de relaţia (16.140), următoarea relaţie între mărimile $\mathcal{M}_m$ şi $|\mathcal{F}_r|$:

$$\boxed{\mathcal{M}_m = |\overline{\mathcal{F}}_r|\, r\, \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = |\overline{\mathcal{F}}_r|\, r\,\mathrm{tg}(\alpha - \varphi_{al})}\,. \tag{16.142}$$

În aplicaţiile practice este necesar ca odată efectuată ridicarea corpului, cricul să rămînă în poziţia respectivă, fără a coborî ; în această situaţie, tendinţa de coborîre fiind evidentă, ecuaţia de echilibru corespunzătoare acestei poziţii va coincide cu ecuaţia (16.143). stabilită pentru coborîrea în regim permanent, ea permiţînd să se tragă următoarele concluzii în îegătură cu cele trei cazuri care pot interveni în practică :

Cazul I, caracterizat prin condiţia

$$\alpha > \varphi_{al} \tag{16.143}$$

cu următoarea consecinţă rezultînd din relaţia (16.142)

$$\mathcal{M}_m > 0, \tag{16.144}$$

adică :

„În cazul cînd unghiul de înfăşurare al elicei generatoare a fiietului şurubului este mai mare decît unghiul de frecare la alunecare dintre filetele şurubului şi piuliţei, pentru asigurarea poziţiei de echilibru a sarcinii ridicate este absolut necesară acţionarea şurubului cu un moment activ orientat în sensul ridicării sarcinii şi cu modulul dat de relaţia (16.142)".

Cazul II, corespunzător condiţiei

$$\alpha = \varphi_{al}\,, \tag{16.145}$$

pentru care relaţia (16.142) furnizează următoarea valoare a momentului activ

$$\mathcal{M}_m = 0, \tag{16.146}$$

putîndu-se trage astfel concluzia :

„În cazul cînd unghiul de înfășurare al elicei generatoare a filetului șurubului este egal cu unghiul de frecare la alunecare dintre șurub și piuliță, echilibrul șurubului este asigurat fără a necesita acționarea sa cu un moment exterior activ".

Se spune, în această situație, că șurubul este *autofixat*.

Este ușor de înțeles însă că orice modificare survenită în repartiția solicitărilor aplicate cricului în acest condițiuni va putea provoca coborîrea șurubului, aceasta putînd fi împiedicată numai prin mijloace speciale de oprire (clicheți).

Cazul III, caracterizat prin condiția

$$\alpha < \varphi_{al} , \tag{16.147}$$

cu următoarea consecință rezultînd din relația (16.142)

$$\mathcal{M}_m < 0, \tag{16.148}$$

care permite să se tragă concluzia :

„În cazul cînd unghiul de înfășurare al elicei generatoare a filetului este mai mic decît unghiul de frecare la alunecare dintre filetele șurubului și piuliței, echilibrul șurubului se menține chir și atunci cînd asupra lui ar acționa un moment de desșurubare, cu condiția ca mărimea lui să nu depășească valoarea dată de relația (16.142)

Se spune, în ultimul caz, că șurubul este *stabil autofixat*.

§ 17. Mecanica sistemelor articulate

Se numesc *sisteme articulate*, sistemele de bare rectilinii omogene, de secțiuni transversale constante și cu dimensuni neglijabile în raort cu lungimile barelor, cu extremitățile acestora supuse la legături pasive interioare și, unele din ele, și la legături pasive exterioare.

Legăturile pasive interioare pot fi :

— *Legături mobile*, realizate prin articulații sferice, sau — cel mai adesea — cilindrice, cu frecare neglijabilă, care permit celor două bre cuplate prin ele să efectueze rotații relative în jurul punctului teoretic de articulație, (fig. 17.1, a), reprezentarea schematică a unor asemenea bare articulate, (S_i) și (S_{i+1}), făcîndu-se ca în fig. 17.1, b) ;

Scanned with CamScanner

— *Îmbinări rigide*, realizate fie prin nituie, (fig. 17.2, a), fie prin sudură, (fig. 17.2 b), fie prin bolțuri, (fig. 17.2, c), fie, în fine, prin continuitate materială, (fig. 17.2, d), primele două soluții tehnice fiind folosite în cazul barelor metalice, cea de-a treia în cazul barelor de lemn, iar ultimul procedeu fiind utiliat în cazul sistemelor de bare confecționate din beton armat; reprezentarea schematică a unei asemenea îmbinări se face, indiferent de modul de realizare tehnică a ei, ca în fig. 17.2, e, ca puncte teoretice de îmbinare fiind considerate punctele de intersecție a axelor longitudinale ale barelor îmbinate, puncte purtînd numele de *noduri*.

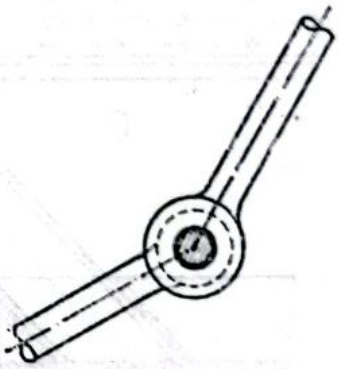


Fig. 17.1

Legăturile pasive exterioare sînt realizate prin cuple cinematice de clase inferioare — fire (cabluri, lanțuri), reazeme și articulații —, aplicate totdeauna la extremitățile barelor, punctele teoretice de legătură exterioară putînd coincide deci cu unele din punctele teoretice de legătură interioară, respectiv cu unele noduri din sistemele articulate; execuția tehnică a acestor cuple cinematice poate avea însă forme specifice la unele tipuri de sisteme articulate

Cu excepția greutăților proprii, care sînt de cele mai multe ori neglijate, toate solicitările exterioare active la care sînt supuse sistemele articulate — de regulă, forțe concentrate — sînt aplicate tot în extremitățile barelor, deci în punctele de articulație dintre ele, respectiv în noduri.

Sistemele articulate se numesc *spațiale* atunci cînd sînt solicitate de forțe exterioare active cu orientări și poziții oarecari în spațiu și *plane* atunci cînd toate forțele exterioare active care acționează asupra sistemului de bare se găsesc în același plan, în care se consideră situate și punctele de legătură pasivă, exterioară și interioară.

În cele ce vor urma, se va lua în considerație numai cazul plan al problemelor de mecanica sistemelor articulate.

În funcție de modul în care se realizează legăturile interioare, sistemele articulate se pot împărți în următoarele două tipuri principale:

— *poligoane articulate*, atunci cînd fiecare bară are extremitățile articulate cu cîte o singură altă bară a sistemului, denumirea dată acestor sisteme articulate fiind justificată de faptul că în aceste condițiuni configurația sistemului este aceea a unei linii poligonale, cu

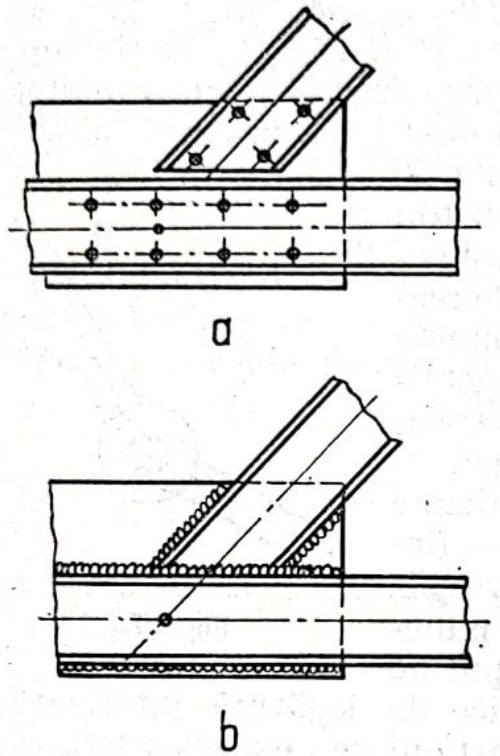


Fig. 17.2

laturile reprezentate prin axele longitudinale ale barelor și cu vîrfurile reprezentate prin punctele teoretice de legătură interioară;

— *grinzi cu zăbrele*, atunci cînd cel puțin unele dintre bare au extremitățile legate cu mai multe bare — minimum două bare de o extremitate — ale sistemului mecanic.

Aceste din urmă sisteme articulate se găsesc, de regulă, în echilibru, fapt care va jusifica reducerea studiului mecanic al lor numai la aspectele statice.

Principalele probleme legate de mecanica acestor două tipuri de sisteme articulate vor fi expuse în continuare.

17.1. *Mecanica poligoanelor articulate*

17.1.1. Dinamica pendulelor fizice n-uple (Problema Bradistilov-Mangeron)

Pendulul fizic n-uplu este un poligon articulat plan, format din n bare (S_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$ articulate cap la cap, primul element, (S_1), fiind îegat cu exteriorul printr-o articulație cilindrică, O, de asemenea cu frecare neglijabilă, iar ultimul element, (S_n), avînd o extremitate liberă, (fig. 17.3).

Pentru simplificarea calculelor se va considera că toate barele au aceași lungime și aceeași masă, adică

$$l_i = 2a; \quad M_i = M, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.1}$$

dar calculele vor puta fi cu ușurință refăcute pentru cazul mai general, cînd aceste mărimi ar avea valori diferite pentru fiecare bară a sistemului mecanic.

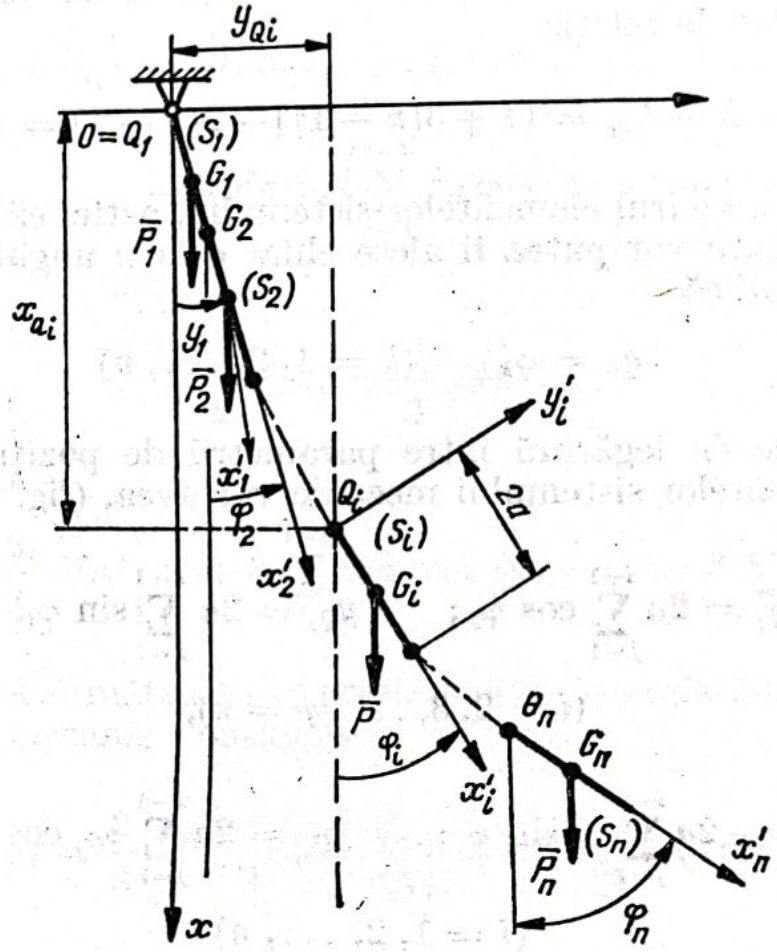


Fig. 17.2

Alegînd reperul fix Oxy și reperele $Q_ix_i'y_i'$ atașate invariabil elementelor sistemului articulat considerat ca în figură, vor rezulta următoarele valori pentru numerele parametrilor de poziție variabili în timp ai elementelor sistemului

$$p_1 = 1\,; \quad p_i = 3, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{17.2}$$

acești parametri de poziție fiind reprezentați prin mărimile φ_1 și x_{Q_i}, y_{Q_i}, φ_i, $(i = 2, 3, \ldots, n)$, precum și următorul număr total de ecuații de legătură interioară introduse de cele $(n-1)$ articulații

cilindrice interioare :

$$l_{int} = 2(n-1) \tag{17.3}$$

Sistemul mecanic considerat va avea deci un număr de grade de libertate dat de relaţia

$$p = N - l_{int} = [1+3(n-1)] - 2(n-1) = n, \tag{17.4}$$

adică egal cu numărul elementelor sistemului, astfel că drept coordonate generalizate vor putea fi alese chiar cele n unghiuri de rotaţie instantanee, adică

$$q_k = \varphi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.5}$$

Ecuaţiile de legătură între parametrii de poziţie variabili în timp ai elementelor sistemului mecanic vor avea, (fig. 17.3), formele

$$x_{Q_i} = 2a \sum_{j=1}^{i-1} \cos \varphi_j ; \qquad y_{Q_i} = 2a \sum_{j=1}^{i-1} \sin \varphi_j,$$

$$(i = 2, 3, \ldots, p = n), \tag{17.6}$$

cu

$$\dot{x}_{Q_i} = -2a \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_j \sin \varphi_j ; \qquad y_{Q_i} = 2a \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_{Q_j} \cos \varphi_j.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.7}$$

În timp ce expresia energiei cinetice a primului element va fi redusă numai la termenul datorat rotaţiei, adică

$$\mathscr{E}_1 = \frac{1}{2} J_1 \bar{\omega}_1^2 = \frac{2}{3} Ma^2 \dot{\varphi}_1^2, \tag{17.8}$$

energia cinetică a elementului (S_i), $(i = 2, 3, \ldots, n)$, determinată prin relaţia

$$\mathscr{E}_i = \frac{1}{2} M_i \bar{v}_{Q_i}^2 + M_i \bar{v}_{Q_i} (\bar{\omega}_i \times \bar{r}'_{G_i}) + \frac{1}{2} J_i \bar{\omega}_i^2, \tag{17.9}$$

cu

$$\frac{1}{2} M_i \bar{v}_{Q_i}^2 = \frac{1}{2} M(\dot{x}_{Q_i}^2 + \dot{y}_{Q_i}^2) = 2 Ma^2 \sum_{=1}^{i=1} \dot{\varphi}_j^2 ; \tag{17.10}$$

$$M_i \bar{v}_{Q_i}(\bar{\omega}_i \times \bar{r}'_{G_i}) = M(\dot{x}_{Q_i} \bar{i} + \dot{y}_{Q_i} \bar{j})(\dot{\varphi} \bar{k}'_i \times a \bar{i}'_i) =$$

$$= 2Ma^2 \dot{\varphi}_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right) \tag{17.11}$$

şi

$$\frac{1}{2} J_i \bar{\omega}_i^2 = \frac{2}{3} Ma^2 \dot{\varphi}_i^2, \tag{17.12}$$

va avea expresia

$$\mathscr{E}_i = \frac{2}{3} Ma^2 \left[\dot{\varphi}_i^2 + 3 \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + 3 \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_j^2 \right], \tag{17.13}$$

rezultînd astfel următoarea expresie pentru energia cinetică a întregului sistem mecanic considerat :

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 + \sum_{i=2}^{n} \mathscr{E}_i = \frac{2}{3} Ma^2 \left\{ \dot{\varphi}_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \left[\dot{\varphi}_i^2 + 3 \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3 \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_j^2 \right\} = \frac{2}{3} Ma^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \dot{\varphi}_i^2 + 3 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=}^{i-1} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 3 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_j^2 \right\}, \right. \tag{17.14}$$

sau încă, observînd că poate fi scrisă relaţia

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_j^2 = \dot{\varphi}_1^2 + (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + \ldots + (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \ldots + \dot{\varphi}_{n-1}^2) =$$

$$= (n-1)\dot{\varphi}_1^2 + (n-2)\dot{\varphi} + \ldots + (n-k)\dot{\varphi}_k^2 + \ldots + \dot{\varphi}_{n-1}^2, \tag{17.15}$$

Scanned with CamScanner

mai rezultă

$$\mathscr{E} = \frac{2}{3} Ma^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \dot{\varphi}_i^2 + 3[(n-1)\,\dot{\varphi}_1^2 + \ldots + (n-k)\dot{\varphi}_k^2 + \ldots + \dot{\varphi}_{n-1}^2] + \right.$$

$$\left. + 3 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) \right\}. \tag{17.16}$$

Întrucît parametrii lagrangeieni ai sistemului mecanic figurează numai în ultimul grup de termeni ai expresiei precedente, derivatele parţiale ale energiei cinetice în raport cu coordonatele generalizate vor avea expresiile

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \varphi_k} = -2Ma^2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \sin(\varphi_i - \varphi_j) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_k} +$$

$$+ 2Ma^2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_j \sin(\varphi_i - \varphi_j) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \varphi_k}, \tag{17.17}$$

sau încă, observînd că întrucît unghiurile de rotaţie sînt independente între ele, sînt vlabile condiţiile

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_k} \begin{cases} = 1 & \text{pentru} \quad i = k; \\ = 0 & \text{pentru} \quad i \neq k, \end{cases} \tag{17.18}$$

adică, în sumele după i şi j rămîn numai termenii pentru care $i = k$, respectiv $j = k$, mai rezultă

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \varphi_k} = 2Ma^2 \left[\sum_{i=2}^{n} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_k \sin(\varphi_i - \varphi_k) - \sum_{j=1}^{k=1} \dot{\varphi}_k \dot{\varphi}_j \sin(\varphi_k - \varphi_j) \right].$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.19}$$

De asemenea, în baza condiţiilor

$$\frac{\partial \dot{\varphi}_i}{\partial \dot{\varphi}_k} \begin{cases} = 1 & \text{pentru} \quad i = k \\ = 0 & \text{pentru} \quad i \neq k \end{cases} \tag{17.20}$$

Scanned with CamScanner

vor rezulta şi următoarele expresii ale derivatelor parţiale ale energiei cinetice a sistemului mecanic în raport cu vitezele generalizate :

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{\varphi}_k} = \frac{2}{3} Ma^2 \left\{ [6(n-k)+2]\,\dot{\varphi}_k + 3 \sum_{j=1}^{k-1} \dot{\varphi}_j \cos(\varphi_k - \varphi_j) + \right.$$

$$\left. + 3 \sum_{i=k+1}^{n} \dot{\varphi}_i \cos(\varphi_i - \varphi_k) \right\} \cdot$$

$$(k = 1, 2, \ldots p) \qquad (17.21)$$

Trecînd la calculul forţelor generalizate ale greutăţilor — singurele solicitări exterioare active la care sînt supuse elementele sistemului mecanic considerat P , se va scrie

$$Q_{a_k} = \bar{\mathscr{M}}_{Q_1}(\bar{P}_1) \frac{\partial \bar{\Theta}_1}{\partial \varphi_k} + \sum_{i=2}^{n} \left[\bar{P}_i \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial \varphi_k} + \bar{\mathscr{M}}_{Q_i}(\bar{P}_i) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial \varphi_k} \right] =$$

$$= - Ma\,g \sin \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_k} + \sum_{i=2}^{n} \left[Mg \frac{\partial x_{Q_i}}{\partial \varphi_k} - Mag \sin \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_k} \right],$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (17.22)$$

sau încă, avînd în vedere condiţiile (1718) şi observînd că se poate scrie relaţia

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\partial x_{Q_i}}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\sum_{i=2}^{n} x_{Q_i} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(2a \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \cos \varphi_j \right) =$$

$$= 2a \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \left(\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \cos \varphi_j \right) = 2a \frac{\partial}{\partial \varphi_k} [\cos \varphi_1 + (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + \ldots$$

$$\ldots + (\cos \varphi_1 + \ldots + \cos \varphi_{n-1})] = 2a \frac{\partial}{\partial \varphi_k} [(n-1) \cos \varphi_1 + \ldots$$

$$+ (n-k) \cos \varphi_k - \ldots + \cos \varphi_{n-1}] = - 2a(n-k) \sin \varphi_k,$$

$$(17.23)$$

Scanned with CamScanner

mai rezultă

$$Q_{a_k} = -Mag\,[2(n-k)+1]\sin\varphi_k],$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.24}$$

În baza relațiilor (17.19), (17.21) și (17.24), se pot scrie următoarele ecuații Lagrange de specia a doua corespunzătoare sistemului mecanic articulat considerat :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{2}{3}Ma^2\,[6[(n-k)+2]\,\dot{\varphi}_k + 2Ma^2\sum_{j=1}^{k-1}\dot{\varphi}_j\cos(\varphi_k-\varphi_j) + \right.$$
$$+2Ma^2\sum_{i=k+1}^{n}\dot{\varphi}_i\cos(\varphi_i-\varphi_k) - 2Ma^2\left[\sum_{i=2}^{n}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_k\sin(\varphi_i-\varphi_k) - \right.$$
$$\left.\left. - \sum_{j=1}^{k-1}\dot{\varphi}_k\dot{\varphi}_j\sin(\varphi_k-\varphi_j)\right] - -Mag[2(n-k)+1]\sin\varphi_k.\right.$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.25}$$

Efectuînd derivarea în raport cu timpul, simplificînd prin Ma și reducînd termenii asemenea, se obține sistemul final de ecuații diferențiale ale mișcării pendulului fizic n-uplu :

$$\frac{2}{3}a[6(n-k)+2]\ddot{\varphi}_k + 2a\left[\sum_{j=1}^{k-1}\ddot{\varphi}_j\cos(\varphi_k-\varphi_j) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=k+1}^{n}\ddot{\varphi}_j\cos(\varphi_i-\varphi_k)\right] + 2a\left[\sum_{j=1}^{k-1}\dot{\varphi}_j^2\sin(\varphi_k-\varphi_j) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=k+1}^{n}\dot{\varphi}_i^2\sin(\varphi_i-\varphi_k)\right] - 2a\sum_{i=2}^{k}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_k\sin(\varphi_i-\varphi_k) =$$
$$= -g[2(n-k)+1]\sin\varphi_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.26}$$

Pentru pendulul fizic dublu ($n = p = 2$), vor rezulta următoarele ecuații diferențiale ale mișcării

$$\begin{aligned}
&\frac{16}{3} a\ddot{\varphi}_1 + 2a\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 2a\,\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = -3g \sin \varphi_1 ; \\
&\frac{4}{3} a\ddot{\varphi} + 2a\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + 2a\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = -g \sin \varphi_2
\end{aligned} \tag{17.27}$$

care au fost integrate de către G. Bradistilov.

În cazul micilor oscilații, adică în condițiile posibilității de acceptare a aproximațiilor

$$\begin{aligned}
&\sin(\varphi_i - \varphi_j \approx \varphi_k - \varphi_j ; \qquad \cos(\varphi_k - \varphi_j) \approx 1 ; \\
&\sin(\varphi_i - \varphi_k) \approx \varphi_i - \varphi_k ; \qquad \cos(\varphi_i - \varphi_k) \approx 1 ; \\
&\sin \varphi_k \approx \varphi_k ; \\
&(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{17.28}$$

sistemele de ecuații (17.26) și (17.27) vor lua formele simplificate

$$\begin{aligned}
&2a[6(n-k)+2]\ddot{\varphi}_k + 2a\left[\sum_{j=1}^{k-1} \ddot{\varphi}_j - \sum_{i=k+1}^{n} \ddot{\varphi}_i\right] + \\
&+ 2a\left[\sum_{j=1}^{k-1} \dot{\varphi}_j^2(\varphi_k - \varphi_j) - \sum_{i=k+1}^{n} \dot{\varphi}_i^2(\varphi_i - \varphi_k)\right] - \\
&- 2a \sum_{i=2}^{k} \dot{\varphi}_i \dot{\varphi}_k (\varphi_i - \varphi_k) = -g[2(n-k)+1]\varphi_k \\
&(k = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} , \tag{17.29}$$

respectiv

$$\left.\begin{aligned} &\frac{16}{3}\,a\ddot{\varphi}_1 + 2a\ddot{\varphi}_2 - 2a\dot{\varphi}_2^2(\varphi_2 - \varphi_1) = -3g\varphi_1\,; \\ &\frac{4}{3}\,a\ddot{\varphi}_2 + 2a\ddot{\varphi}_1 + 2a\dot{\varphi}_1^2(\varphi_2 - \varphi_1) = -g\varphi_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (17.30)$$

observîndu-se că sistemele continuă să rămînă neliniare; cu unele noi aproximări se pot face unele liniarizări ale acestor ecuaţii.

17.1.2. Statica poligoanelor articulate

Se consideră un poligon articulat format din n bare rectilinii omogene (S_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, articulate cap la cap, cu extremităţile $A \equiv A_1$ şi $B \equiv A_{n+1}$ ale primului şi ultimului element legate prin articulaţii cu mediul exterior; în punctele teoretice de articulaţie interioară A_i, $(i = 2, 3, \ldots, n)$ sînt aplicate sarcinile concentrate verticale $\bar{P}_i$, $(i = 2, 3, \ldots, n)$, sub acţiunea cărora sistemul mecanic rămîne în echilibru, (fig. 17.4).

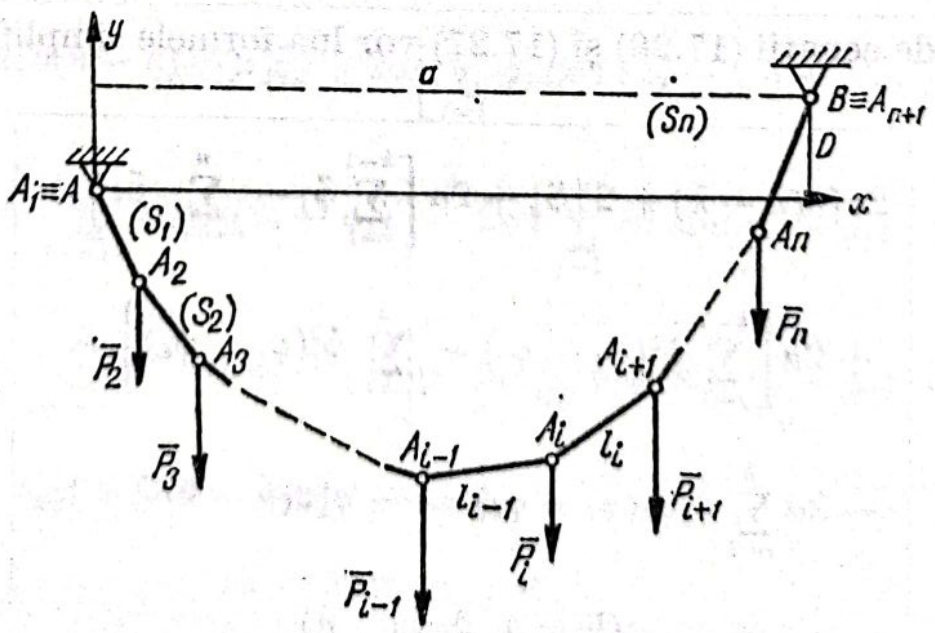


Fig. 17.4

Rezolvarea problemei de statica unui asemenea sistem articulat — adică, determinarea configurației de echilibru și a solicitărilor de legătură exterioară și interioare — se face în următoarele ipoteze simplificatoae de lucru :

1) Existența unui raport neglijabil între dimensiunile secțiunilor transversale ale barelor și între lungimile lor.

2) Considerarea tuturor articulațiilor, exterioare și interioare, aplicate sistemului mecanic, ca fiind foarte mici și cu frecare neglijabilă.

3) Neglijarea totală a greutăților barelor.

Adoptarea acestor ipoteze de lucru, precum și considerarea faptului că toate solicitările active exterioare sînt reprezentate numai prin forțe concentrate aplicate în noduri, permite să se asimileze poligonul articulat considerat cu un sistem de puncte materiale — reprezentate prin noduri — , legate între ele prin tije rigide, o asemenea modelare mecanică permițînd să se reducă problema de statica poigoanelor articulate la problema determinării configurației sistemului celor $n+1$ puncte materiale A_i, $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ și a eforturilor din tije.

Considerînd un asemenea nod A_i dintre elementele (S_i) și (S_{i+1}), (fig. 17.5), el se va afla deci în echilibru sub acțiunea sarcinii

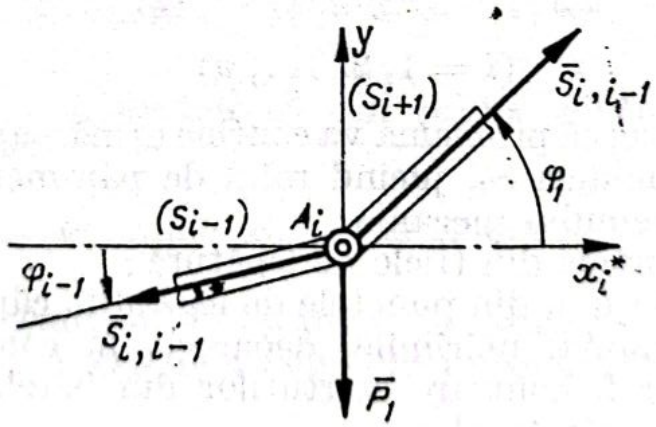


Fig. 17.5

concentrate verticale P din acest nod și a eforturilor $\bar{S}_{i,i-1}$ și $S_{i,i+1}$ din tijele care îl leagă de nodurile vecine, A_{i-1} și A_{i+1}, fiind valabilă deci, la echilibru, condiția

$$\bar{S}_{i,i-1}+\bar{S}_{i,i+1}+\bar{P}_i=0 \qquad (17.31)$$

Scanned with CamScanner

Relaţia recedentă, care exprimă condiţia de coplanaritate a celor trei forţe — deci a axelor barelor (S_i) şi (S_{i+1}) şi a verticalei ce trece prin punctul A_i — permite, extinsă şi la punctele vecine, să se tragă concluzia că toate punctele A_i sînt situate în acelaşi plan vertical, adică concluzia că este plană configuraţia pligonului articulat.

Alegînd, în consecinţă, un sistem de referinţă plan Oxy, cu originea O în nodul A_1 $(0 \equiv A_1)$, cu axa Ox orizontală şi situată în planul poligonului articulat şi cu axa Oy orientată pe verticală şi în sus, (fig. 17.4), poziţiile punctelor extreme ale poligonului vor fi determinate prin coordonatele

$$A \equiv A_1(0\,;\ 0)\,; \qquad B \equiv A_{n+1}(a\,;\ b), \tag{17.32}$$

cu a şi b consideraţi cunosèuţi, iar poziţia unui element (S_i) al poligonului va fi determinată prin parametrii de poziiţie x_{A_i}, y_{A_i} şi φ_i, φ_i fiind unghiul format de axa A_iA_{i+1} a barei cu axa de coordonate Ox, (fig. 17.4), unghi considerat orientat ca şi în mişcarea plan-paralelă a rigidului; se observă cu uşurinţă cu primii doi parametri de poziţie pot fi exprimaţi în funcţie de unghiurile φ_i ale elementelor sistemului care preced elementul (S_i), în baza relaţiilor evidente

$$x_{A_i} = \sum_{h=1}^{i-1} l_h \cos \varphi_h\,; \qquad y_{A_i} = \sum_{h=1}^{i-1} l_h \sin \varphi_h.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.33}$$

Rezultă de aici că problema va conţine următoarele necunoscute:

— cele n unghiuri φ_i, jucînd rolul de parametri de poziţie independenţi ai sistemului mecanic;

— cele n eforturi din tijele de legătură;

— cele 2 reacţiuni din punctele de legătură, cărora va trebui să li se determine numai mărimile, deoarece, în condiţiile precizate, orientările lor vor fi contrare eforturilor din barele (S_1), respectiv (S_n), adică, un număr total de

$$s = 2n + 2 \tag{17.34}$$

de elemente necunoscute; scriind ecuaţiile de echilibru pentru fiecare din cele $(n + 1)$ noduri, va rezulta şi un număr de

$$e = 2(n + 1) = s \tag{17.35}$$

ecuaţii, rezultînd deci că problema este static determinată.

Proiectînd ecuaţia vectorială (17.31) pe axele reperului $A_i x_i^* y_i^*$, paralele la axele reperului fix Oxy, (fig. 17.5), vor rezulta următoarele ecuaţii scalare de echilibru

$$\begin{cases} -S_{i,i-1}\cos\varphi_{i-1} + S_{i,i+1}\cos\varphi_i = 0\,; \\ -S_{i,i-1}\sin\varphi_{i-1} + S_{i,i+1}\sin\varphi_i - P_i = 0. \end{cases} \tag{17.36}$$

Scriind aceste ecuaţii pentru toate cele (n + 1) noduri, cu

$$P_1 = P_{n+1} = 0 \tag{17.37}$$

şi cu considerarea reacţiunilor $\bar{R}_A$ şi $\bar{R}_B$ din nodurile extreme $A_1 = A$ şi $A_{n+1} \equiv B$, se obţine sistemul celor $2(n+1)$ ecuaţii, care vor permite rezolvarea problemei.

Se poate înţelege însă, că pentru cazul general considerat, rezolvarea sistemelor (17.36) de ecuaţii de echilibru nu este deloc simplă.

Problema se simplifică în oarecare măsură dacă toate sarcinile concentrate au aceeaşi valoare, adică

$$P_i = P, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{17.38}$$

Într-adevăr, observînd că din prima dintre ecuaţiile (17.36) rezultă concluzia

$$S_{i,i-1}\cos\varphi_{i-1} = S_{i,i+1}\cos\varphi_i = S_x = \text{const} \tag{17.39}$$

valabilă, prin trecerea de la un punct la altul, pentru toate nodurile, se vor putea face, în cea de-a doua dintre ecuaţiile (17.36), înlocuirile

$$S_{i,i-1} = \frac{S_x}{\cos\varphi_{i-1}}\,; \qquad S_{i;i+1} = \frac{S_x}{\cos\varphi_i}, \tag{17.40}$$

în baza cărora această ecuaţie va lua, cu considerarea şi a condiţiei (17.38), forma

$$S_x(-\operatorname{tg}\varphi_{i-1} + \operatorname{tg}\varphi_i) - P = 0, \tag{17.41}$$

Scanned with CamScanner

rezultînd de aici relaţia

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \operatorname{tg}\varphi_{i-1} + \frac{P}{S_x} = \operatorname{tg}\varphi_{i-1} + \gamma, \tag{17.42}$$

care va fi valabilă, evident, pentru oricare dintre valorile lui $i = 2, 3, \ldots, n$, punctul A_i fiind ales arbitrar, adică se va putea scrie

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \operatorname{tg}\varphi_{i-1} + \gamma = \operatorname{tg}\varphi_{i-2} + (\gamma + \gamma) = \ldots = \operatorname{tg}\varphi_1 + \underbrace{(\gamma + \gamma + \ldots + \gamma)}_{(i-1)}$$

adică

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \operatorname{tg}\varphi_1 + (i-1)\gamma. \tag{17.43}$$

Ultima relaţie va permite exprimarea funcţiilor trigonometrice $\sin\varphi_i$ şi $\cos\varphi_i$ din relaţiile (17.33) în funcţie de parametrii $\operatorname{tg}\varphi_1$ şi γ, sau încă

$$\sin\varphi_i = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 + (i-1)\gamma}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}\varphi_1 + (i-1)\gamma]^2}} = \sin[\varphi_i(\operatorname{tg}\varphi_1; \gamma)]; \quad \cos\varphi_i =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg}\varphi_1 + (i-1)\gamma]^2}} \cos[\varphi_i(\operatorname{tg}\varphi_1; \gamma)] \cdot$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n). \tag{17.44}$$

În modul acesta, relaţiile (17.33) vor lua formele

$$x_{A_i} = \sum_{h=1}^{i-1} l_h \cos[\varphi_h(\operatorname{tg}\varphi_1; \gamma)]; \quad y_{A_i} = \sum_{h=1}^{i-1} l \sin[\varphi_h(\operatorname{tg}\varphi_1; \gamma)]$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n) \tag{17.45}$$

şi ele vor trebui să verifice şi coordonatele punctului $B \equiv A_{n+1}$, considerate cunoscute, adică vor putea fi scrise relaţiile

$$a = \sum_{h=1}^{n} l \cos[\varphi_h(\operatorname{tg}\varphi_1; \gamma)]; \quad b = \sum_{h=1}^{n} l_h \sin[\varphi_h(\operatorname{tg}\varphi_1; \gamma)] \tag{17.46}$$

Scanned with CamScanner

Rezolvînd acest sistem de ecuaţii în raport cu necunoscutele $\operatorname{tg}\varphi_1$ şi γ, va putea fi determinată, în baza relaţiilor (17.43), configuraţia poligonului, iar ecuaţiile de echilibru (17.36), cu funcţiile trigonometrice cunoscute acum, vor furniza şi eforturile în bare, precum şi reacţiunile legăturilor exterioare.

Relaţia (17.43) va permite să se rezolve şi o altă problemă a staticii poligoanelor articulate şi anume aceea de a determina, pentru o încărcare de forma (17.38), care trebuie să fie lungimile barelor pentru ca toate nodurile să fie situate la egală distanţă, pe orizontală, între ele.

Notînd cu e distanţa comună pe orizontală dintre noduri, se va observa că în acest caz pot fi scrise relaţiile

$$l_h \cos \varphi_h = e\,; \quad l_h \sin\varphi_h = l_h \cos \varphi_h \operatorname{tg} \varphi_h = e \operatorname{tg} \varphi_h$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n) \tag{17.47}$$

în baza cărora expresiile (17.33) ale coordonatelor nodurilor vor lua formele

$$x_{A_i} = (i-1)e\,; \qquad y_{A_i} = e \sum_{h=1}^{i-1} \operatorname{tg}\varphi_h. \tag{17.48}$$

Prima relaţie va permite să se determine, pentru o deschidere a dată şi pentru un număr determinat n de elemente, mărimea distanţei e dintre noduri; pentru a putea determina şi mărimile $\operatorname{tg}\varphi_1$ şi γ, la cea de-a doua dintre relaţiile (17.48) va mai trebui adăugată încă o relaţie între cele două necunoscute, aceasta putînd fi ordonata într-un alt nod, prestabilit, al poligonului; odată determinate mărimile e şi φ_1, lungimile elementelor vor fi date de relaţiile

$$l_i = \frac{e}{\cos \varphi_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17.49}$$

Relaţia (17.43) mai permite, în fine, să se tragă, în aceleaşi condiţii de încărcare uniformă şi echidistantă, unele concluzii privind configuraţia poligonului articulat.

Scanned with CamScanner

Într-adevăr, observînd că cea de-a doua dintre relațiile (17.48) mai poate fi scrisă sub forma

$$y_{A_i} = e \sum_{h=1}^{i-1} [\operatorname{tg} \varphi_1 + (h-1)\gamma] = e(i-1) \operatorname{tg} \varphi_1 + e\gamma \sum_{h=1}^{i-1} (h-1), \tag{17.50}$$

cu suma din membrul drept reprezentînd suma unui număr de $(i-1)$ termeni ai unei progresii aritmetice cu rația $r = 1$, cu primul termen egal cu zero și cu ultimul termen egal cu $(i = 2)$, adică

$$\sum_{h=1}^{i-1} (h-1) = \frac{(i-1)(i-2)}{2},$$

mai rezultă

$$y_{A_i} = e(i-1) \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{\gamma}{2} e(i-1)(i-2). \tag{17.51}$$

Este suficient să se utilizeze acum prima dintre relațiile (17.48) efectuîndu-se, în baza ei, și înloèuirea

$$i - 2 = \frac{x_{A_i}}{e} - 1,$$

pentru a se obține astfel următoarea relație între cele două coordonate ale punctului A_i :

$$y_{A_i} = x_{A_i} \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{\gamma}{2} x_{A_i} \left(\frac{x_{A_i}}{e} - 1 \right). \tag{17.52}$$

Cum pentru toate punctele A_i mărimile $\operatorname{tg}\varphi_1$, γ și e sînt aceleași, se poate trage concluzia că nodurile poligonului articulat se găsesc, în condițiile precizate, pe curba

$$\boxed{y = x \operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{\gamma}{2} x \left(\frac{x}{e} - 1 \right)}, \tag{17.53}$$

reprezentînd o parabolă care trece prin originea reperului Oxy și are concavitatea îndreptată în sus, axa parabolei fiind paralelă la axa Oy.

Scanned with CamScanner

17.2. *Statica grinzilor cu zăbrele*

Grinzile cu zăbrele, executate din metal — cel mai adesea — , din lemn, sau din beton armat, sînt folosite în practică fie sub forma unor construcţii independente — grinzi de poduri, ferme de acoperiş, stîlpi de susţinere etc, — , fie ca elemente constituitive ale unor construcţii mai complicate — cupole cu zăbrele, turnuri cu zăbrele etc.

O asemenea grindă este formată din două, trei, sau chiar mai multe bare principale de contur — purtînd, în cazul podurilor, denumirea de *tălpi* — , fie drepte, (de ex., barele AB, AC şi CB din grinda cu zăbrele reprezentată în fig. 17.6, a), fie curbe, (de ex., bara HJI din grinda reprezentată în fig. 17.6b), legate între ele printr-un număr oarecare de bare rectilinii cu secţiuni constante pe toată lungimea lor, purtînd numele de *montanţi* atunci cînd au poziţii verticale şi de *zăbrele* în general.

Îmbinările interioare dintre bare sînt realizate, aşa cum s-a mai precizat la începutul paragrafului, prin nituire, sudură, bolţuri, sau continuitate materială.

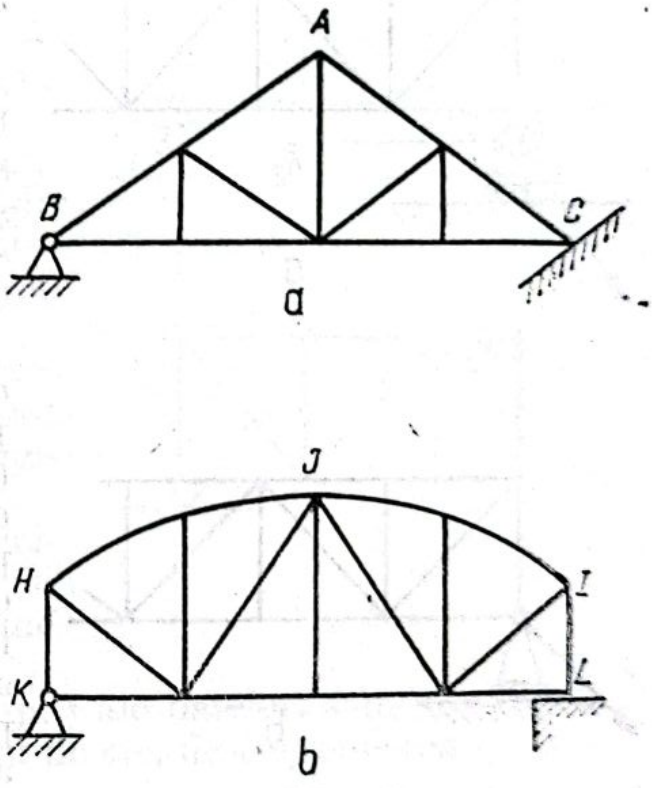


Fig. 17.6

Legăturile pasive exterioare aplicate unei grinzi cu zăbrele sînt realizate prin reazeme, articulaţii, fire (lanţuri şi cabluri) sau încastrări

Reazemele aplicate grinzilor cu zăbrele sînt astfel realizate încît să permită mici deplasări ale punctelor de sprijin la variaţiile lungimilor barelor sub influenţa variaţiilor de temperatură; după modul de realizare practică, razemele folosite la grinzile cu zăbrele se pot clasifica în :

— *Reazeme cu posibilităţi de deplasare bilaterală*, realizate cu ajutorul articulaţiei sferice O^*, montată pe role cilindrice, (fig. 17.7,a), ultimele permiţînd deplasarea grinzii în direcţia tangentei la suprafaţa de sprijin, orientată după normala la axele rolelor ; această posi-

bilitate de deplasare face să se anuleze componenta $\bar{R}_2$, trasată punctat în figură, a reacţiunii totale, celelalte două componente — $\bar{R}_1$ paralelă la axa rolelor şi $\bar{R}_3$ normală la suprafaţa de sprijin a rolelor — dînd o rezultantă care va reprezenta *reacţiunea reazemului cu posibilităţi de deplasare bilaterală*, situată în planul normal la direcţia de deplasare a centrului sferei de legătură.

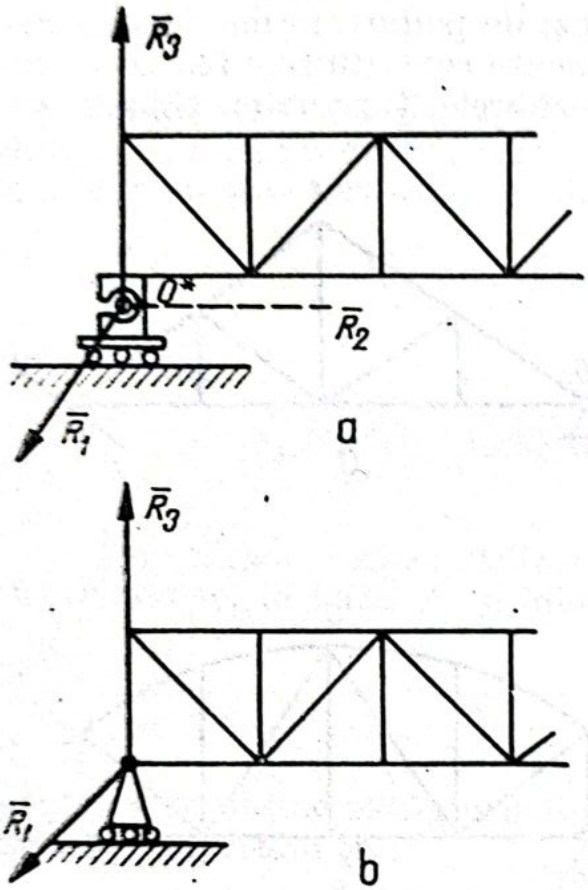


Fig. 17.7

Acest tip de reazem, reprezentat schematic în fig. 17.7, b, utilizat în deosebi în cazul grinzilor spaţiale, este folosit de multe ori şi în cazul grinzilor plane, în ultima situaţie anulîndu-se, evident, şi componenta $\bar{R}_1$.

— *Reazeme cu posibilităţi de deplasare multilaterală*, realizate prin intermediul sferei de legătură (Sf) în contact direct cu suprafaţa care reazemă, permiţînd deplasarea punctului de rezemare al grinzii în orice direcţie din planul tangent la suprafaţa de sprijin (fig. 17.8, a); această posibilitate multiplă de deplasare a punctului de rezemare anulează complet orice componentă situată în planul tangent la suprafaţa de sprijin a reacţiunii legăturii, reacţiunea totală reducîndu-se astfel numai la reacţiunea normală la suprafaţa de sprijin, ($\bar{R} = \bar{N}$). Reprezentarea schematică a unui asemenea tip de reazem, utilizat în deosebi în cazul grinzilor cu zăbrele saţiale, se face ca în fig. 17.8, b).

Articulaţiile fixe aplicate grinzilor cu zăbrele pot fi sferice, sau cilindice, după cum este vorba de o grindă spaţială, sau plană. Dacă se neglijează frecările — şi aceasta se întîmplă curent în statica grinzilor cu zăbrele — , atunci torsorii în punctele teoretice de legătură ai reacţiunilor articulaţiilor se reduc numai la reacţiunile rezultante, descompuse în componente ortogonale — de regulă orizontale şi verticale — şi anume în trei componente în cazul grinzilor spaţiale

și în două componente în cazul grinzilor plane ; reprezentările schematice ale acestor articulații se fac, în statica grinzilor cu zăbrele, ca în fig. 17.9, a pentru articulațiile spațiale și ca în fig. 17.9, b pentru articulațiile cilindrice.

În ceea ce privește legăturile prin fire și tije rigide, precum și cele realizate prin încastrare, ele nu se deosebesc cu nimic, ca realizare practică, de cele întîlnite în statica rigidului.

Calculul static al grinzilor cu zăbrele se efectuează în următoarele ipoteze simplificatoare :

1°. Considerarea tuturor legăturilor interioare dintre bare, indiferent de modul de realizare a îmbinărilor, drept articulații foarte mici, cu frecare neglijabilă.

2°. Existența unor rapoarte neglijabile între dimensiunile secțiunilor transversale ale barelor și între lungimile lor.

3° Considerarea tuturor solicitărilor exterioare, active și pasive, la care este supusă grinda, ca acționînd numai în noduri.

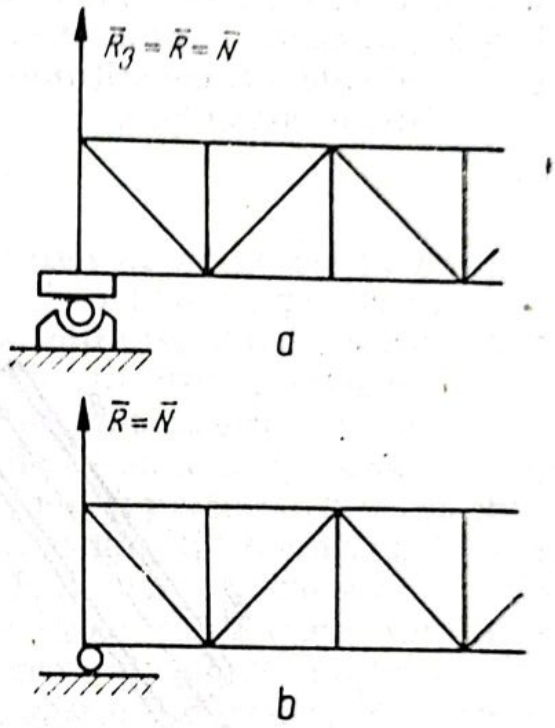


Fig. 17.8

4°. Neglijarea greutăților proprii ale barelor, sau, în cazul cînd este totuși necesar să se țină seama de ele, descompunerea lor în cîte

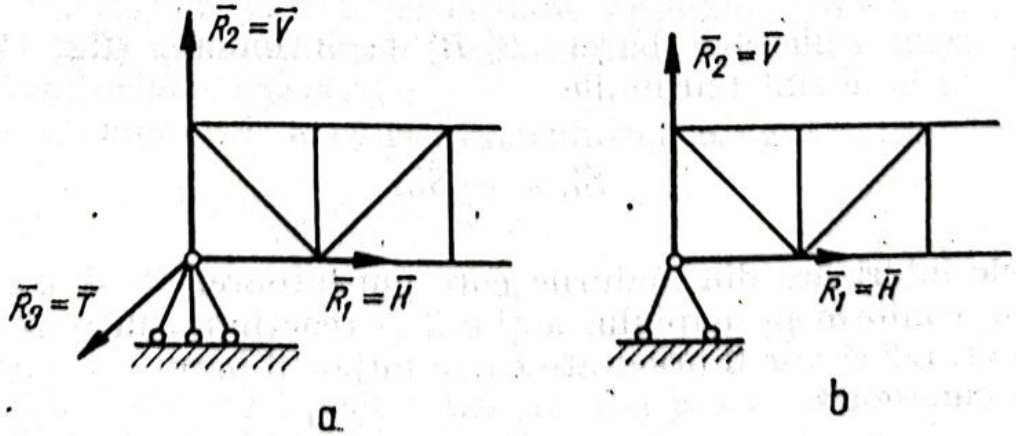


Fig. 17.9

două componente egale, considerate aplicate în cele două noduri de la extremităţile barelor respective.

Toate aceste ipoteze simplificatoare permit să se asimileze grinda cu zăbrele cu un sistem de puncte materiale — reprezentate şi aici prin noduri —, legate între ele prin tije rigide — reprezentate prin barele grinzilor — , eforturile în aceste tije, orientate după axele longitudinale ale lor, constituind forţele interioare corespunzătoare acestor sisteme articulate.

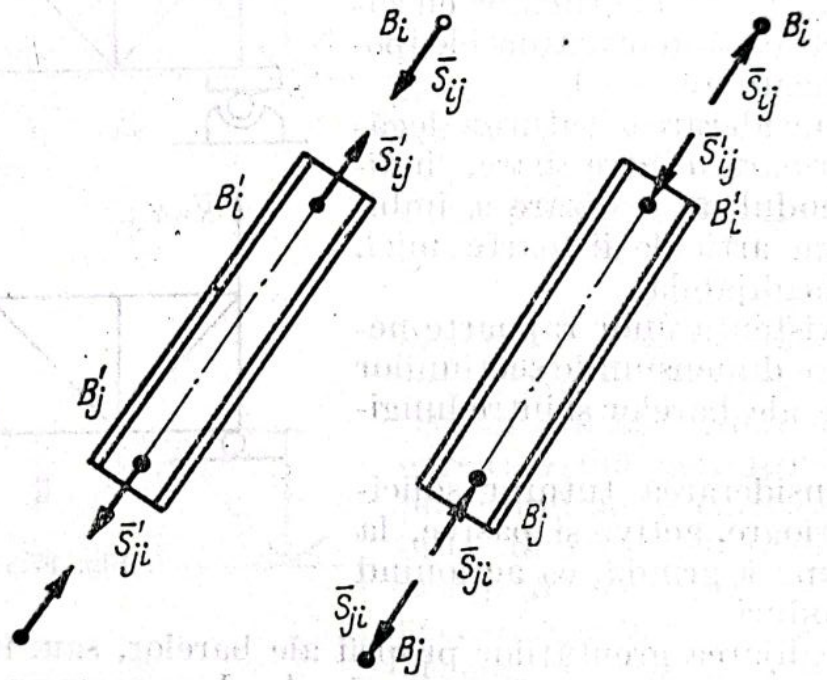


Fig. 17.10

În cazul solicitării barei $B'_i B'_j$ la întindere, (fig. 17.10, a), eforturile în bare sînt tensiunile

$$\bar{S}'_{ij} = -\bar{S}'_{ji}, \tag{17.54}$$

iar forţele interioare din nodurile corespunzătoare, B_i şi B_j, vor fi orientate, conform principiului acţiunii şi reacţiunii, în sens contrar tensiunilor, adică vor fi orientate către mijlocul barei, ele satisfăcînd condiţia cunoscută

$$\bar{S}_{ij} = -\bar{S}_{ji}. \tag{17.55}$$

S-a convenit ca în reprezentarea în schiţe a acestor forţe interioare — numite, după forţele care solicită bara, tot *tensiuni* — , punctele lor de aplicaţie să fie puse în noduri.

În cazul barei $B_i'B_j'$ solicitată la compresiune, (fig. 17.10, b), eforturile $\bar{S}_{ij}'$ şi $\bar{S}_{ji}' = -\bar{S}_{ij}'$ sînt compresiuni, iar forţele interioare din nodurile B_i şi B_j vor fi reprezentate cu sensurile inverse sensurilor primelor două solicitări, cu condiţia evidentă

$$\bar{S}_{ij} = -\bar{S}_{ji}, \tag{17.56}$$

convenindu-se totodată ca în reprezentarea în schiţe ele să fie figurate cu vîrfurile vectorilor reprezentativi în noduri, pentru a putea deosebi astfel aceste forţe interioare — numite, după forţele $\bar{S}_{ij}'$ şi $\bar{S}_{ji}'$, tot *compresiuni* — , de tensiunile din situaţia precedentă.

De regulă, în problemele concrete de statica grinzilor cu zăbrele nu pot fi precizate de la început modurile de solicitare a barelor — la întindere, sau la comprimare — , deci nu pot fi precizate de la început, de cele mai multe ori, nici sensurile eforturilor din noduri. De aceea, în aplicaţii, se atribuie eforturilor din bare sensuri arbitrare — obişnuit acela de tensiuni — , verificîndu-se apoi, după rezolvarea sistemului de ecuaţii de echilibru, sensurile reale ale eforturilor respective, în funcţie de semnele valorilor scalare, găsite din calcule, ale acestor eforturi, valori scalare raportate la sensurile fixate arbitrar pentru vectorii reprezentativi ai acestor eforturi.

Precizările făcute mai sus permit să se tragă concluzia că o problemă de statica grinzilor cu zăbrele va putea conţine următoarele neunoscute scalare :

— un număr de r mărimi scalare caracterizînd torsorii reacţiunilor legăturilor pasive exterioare aplicate grinzii, reprezentate, obişnut, prin moduli, sau valori scalare, ale componentelor reacţiunilor legăturilor respective :

— un număr de n eforturi necunoscute, egal cu numărul barelor grinzii,

rezultînd astfel un număr total de

$$s = n_b + r \tag{17.57}$$

necunoscute scalare.

Ţinînd seama că pentru fiecare nod pot fi scrise cîte trei ecuaţii de echilibru în cazul grinzilor spaţiale şi cîte două ecuaţii de echilibru în cazul grinzilor plane, rezultă că pentru rezolvarea unei probleme

de statica grinzilor cu tzăbrele se va dispune de un număr de

$$e = 3n \tag{17.58}$$

ecuaţii de echilibru scalare în cazul grinzilor spaţiale şi un număr de

$$e = 2n \tag{17.59}$$

ecuaţii scalare de echilibru în cazul grinzilor plane, n fiind numărul total de noduri.

Se înţelege că o primă condiţie necesară a fi satisfăcută pntru rezolvrea prblemei de satica grinzilor cu zăbrele este valabilitatea egalităţii

$$e = s \tag{17.60}$$

Întrucît, în condiţiile (17.60), sistemul de ecuaţii de echilibru formează un sistem de e ecuaţii algebrice liniare în cele $e = r + n$ elemente necunoscute, pentru a se putea rezolva problema de statică a unei grinzi cu zăbrele va mai trebui să fie satisfăcută şi *condiţia de compatibilitate* a sistemului de ecuaţii, exprimată prin egalitatea rangului ρ al matricei coeficienţilor cu rangul matricei sistemului — ultima fiind obţinută prin adăugarea coloanei termenilor liberi la matricea coeficienţilor — şi cu numărul e de ecuaţii.

În consecinţă, problemele de statica grinzilor cu zăbrele pentru care este satisfăcută condiţia

$$\boxed{\rho = e = r + n_b} \tag{17.61}$$

se vor numi *static determinate* şi numai ele vor fi luate în consideraţie în cadrul mecanicii; unele din problemele static nedeterminate sînt rezolvate în cadrul altor discipline, introducîndu-se noi ipoteze de lucru.

Metodele de rezolvare a problemelor de statica grinzilor cu zăbrele — probleme în care se cere, obişnuit, să se determine reacţiunile legăturilor pasive exterioare şi eforturile, fie în toate barele grinzii, fie numai în barele corespunzătoare unei anumite secţiuni

efectuată în grindă — corespund, datorită modului de modelare mecanică a grinzii — ca ansamblu rigid de puncte materiale legate prin tije — , metodelor generale ale staticii sistemelor mecanice, purtînd doar denumiri specifice în cazul grinzilor cu zăbrele.

Cele mai des folosite dintre metodele de rezolvare a problemelor de statica grinzilor cu zăbrele sînt următoarele :

17.2.1. Metoda izolării nodurilor

Corespunde metodei separării corpurilor din statica sistemelor de rigide, care constă în a scrie ecuațiile de echilibru de forțe pentru fiecare din nodurile B_i ale grinzii, considerat izolat din grindă, (fig. 17.11), în calcule intrînd atît forțele exterioare — active și de legătură — , cît și efotrurile corespunzătoare barelor care se articulează în nodul considerat.

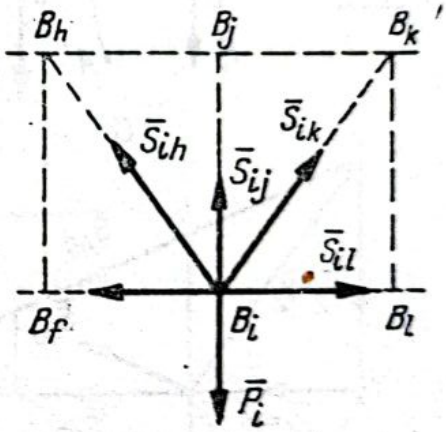


Fig. 17.11

Pentru ca rezolvarea sistemului, format din $3n$ ecuații — respectiv, $2n$ ecuații în cazul plan — scalare de echilibru să fie mai puțin laborioasă, se recomandă să se plece totdeauna de la nodul liber în care se întîlnesc numai trei bare în cazul grinzilor spațiale și numai două bare în cazul grinzilor plane, pentru ca primul subsistem de ecuații de echilibru să conțină astfel un număr de necunoscute — reprezentate prin eforturile în barele corespunzătoare acelui nod — egal cu numărul ecuațiilor de echilibru ; trecerea dela un nod la altul se va face apoi astfel încît, folosindu-se eforturile determinate anterior, pentru orice nod nou ales să nu intre, în ecuațiile de echilibru, decît trei — respectiv două în cazul plan — eforturi necunoscute de determinat.

Această metodă, în general foarte laborioasă datorită numărului mare de ecuații ce trebuiesc rezolvate, este folosită în deosebi în cazurile cînd se cere să se determine toate eforturile interioare.

17.2.2. Metoda secțiunilor (metoda Ritter)

Corespunde metodei echilibrului întregului sistem și al părților din statica sistemelor de rigide și constă în a scrie și aici, mai întîi, ecuațiile de echilibru pentru întreaga grindă considerată ca un rigid,

Scanned with CamScanner

determinîndu-se, obişnuit, din aceste ecuaţii elementele necunoscute din torsorii reacţiunilor legăturilor pasive exterioare aplicate grinzii. Se consideră apoi grinda secţionată în zona în care se cere determinarea eforturilor în bare, scriindu-se ecuaţiile de echilibru — atît cele de forţe, cît şi cele de momente — pentru una din cele două porţiuni obţinute prin secţionare, după introducerea în prealabil a eforturilor corespunzătoare barelor secţionate, (fig. 17.12); pentru ca noul sistem de ecuaţii să fie compatibil în raport cu noile necunoscute introduse prin secţionare, va trebui ca numărul de eforturi necunoscute din barele secţionate să fie egal cu numărul de ecuaţii scalare de echilibru ce pot fi scrise pentru porţiunea respectiv — adică, 6 bare în cazul grinzilor spaţiale şi 3 bare în cazul grinzilor plane — şi, în acelaşi timp, porţiunile secţionate să fie complet separate una de alta.

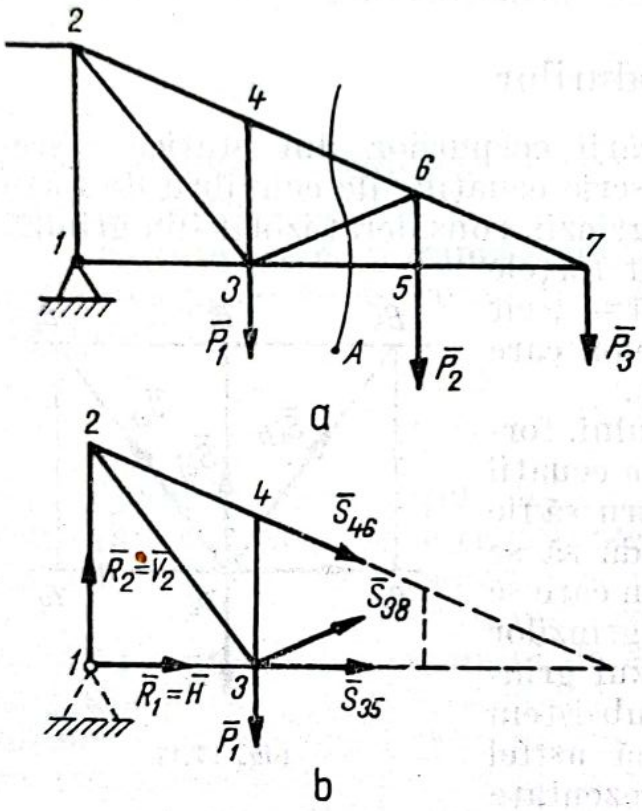


Fig. 17.12

Metoda este folosită, în deosebi, în cazurile cînd se cere să se determine eforturile în barele unei anumite secţiuni prin grindă.

Pentru a se lucra şi aici cu ecuaţii de echilibru cît mai simple, adică cu ecuaţii în care, în fiecare din ele, să figureze un număr cît mai mic de necunoscute — lucru posibil de realizat numai în ecuaţiile de momente axiale, prin alegerea convenabilă a polilor în raport cu care se scrie ecuaţiile de echilibru —, este recomandabil ca la scrierea ecuaţiilor de momente pentru porţiunile izolate din grindă să se aleagă ca poli punctele de intersecţie a cel puţin două din axele barelor secţionate, în acest mod momentele eforturilor necunoscute corespunzătoare acelor bare — egale cu zero în această situaţie — numai figurînd în ecuaţiile de echlibru de momente.

Scanned with CamScanner

17.2.3. Metoda deplasărilor virtuale

Utilizată pentru determinarea eforturilor în unele grinzi mai simple, constă în suprimarea barei în care trebuie determinat efortul (de ex., bara AB din grinda reprezentată în fig. 17.13) și înlocuirea efectului ei cu eforturile corespunzătoare, adică în exemplu considerat

$$\bar{S}_{AB} = -\bar{S}_{BA} = -\bar{S}, \tag{17.62}$$

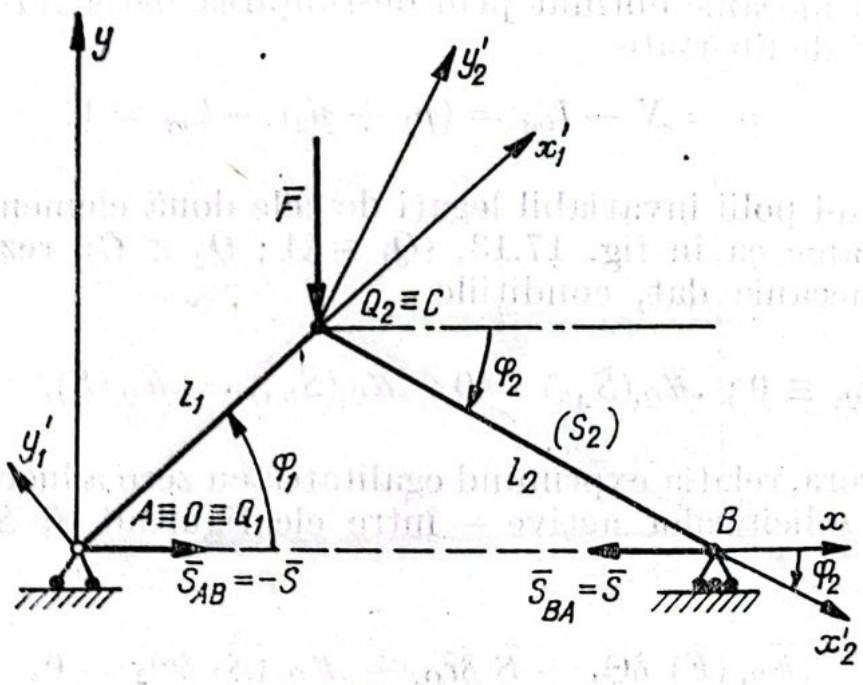


Fig. 17.13

considerate însă acum ca forțe exterioare necunoscute ce acționează asupra sistemului mecanic obținut din grindă prin secționarea barei menționate, sistem care, obișnuit, are un singur grad de libertate; egalarea cu zero a forței generalizate active — în calculul căreia va intra, evident, și efortul din bara secționată, considerat, așa cum s-a mai precizat, ca forță exterioară activă necunoscută — corespunzătoare acestui sistem mecanic, va furniza o ecuație, din care se va putea scoate valoarea efortului din bara desființată.

Astfel, în exemplul din fig. 17.13, prin desființarea barei AB s-a obținut un sistem mecanic format din următoarele elemente:

— bara AC care, datorită articulației cilindrice exterioare din A, are poziția determinată printr-un singur parametru de poziție

variabil în timp, acesta fiind unghiul de rotaţie φ_1, rezultînd astfel valoarea $p_1 = 1$;

— bara CB, în mişcare plan-paralelă, supusă la o singură legătură exterioară — reazemul pe suprafaţa de sprijin în punctul B — , exprimată prin o singură ecuaţie de legătură, ($y_0 \equiv 0$), în condiţiile alegerii reperului fix Oxy ca în figură), care reduce la valoarea $p_2=2$ numărul parametrilor de poziţie independenţi ai barei CB izolată din sistem.

Avînd în vedere că numărul ecuaţiilor de legtură interioară — reprezentată numai prin articulaţia din C, este de $l_{int} = 2$, rezultă că sistemul meèanic obţinut prin desfiinţarea barei AB va avea un singur grad de libertate

$$p = N - l_{int} = (p_1 + p_2) - l_{int} = 1. \tag{17.63}$$

Alegînd polii invariabil legaţi de cele două elemente ale sistemului mecanic ca în fig. 17.13, ($Q_1 \equiv A$; $Q_2 \equiv C$), rezultă, pentru sistemul mecanic dat, condiţiile

$$\delta\bar{r}_{Q_1} \equiv 0 \; ; \; \overline{\mathcal{M}}_{Q_1}(\bar{S}_{AB}) = 0 \; ; \; \overline{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{S}_{BA}) = \overline{\mathcal{M}}_{Q_2}(S), \tag{17.64}$$

în baza cărora, relaţia exprimînd egalitatea cu zero a lucrului mecanic virtual al solicitărilor active — între ele figurînd şi $\bar{S}_{AB} - \bar{S}_{BA}$ va lua forma

$$\overline{\mathcal{M}}_{Q_1}(\bar{F})\ \delta\bar{\Theta}_1 + \bar{S}\ \delta\bar{r}_{Q_2} + \overline{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{S})\ \delta\bar{\Theta}_2 = 0, \tag{17.65}$$

cu, ($\varphi_2 < 0$) :

$$\bar{S}\ \delta\bar{r}_{Q_2} = -|\bar{S}|\ \delta x_{Q_2} ;$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{Q_1}(\bar{F})\ \delta\bar{\Theta}_1 = \overline{\mathcal{M}}_{Q_1}(\bar{F})\delta\varphi_1 = -l_1\cos\varphi_1|\bar{F}|\delta\varphi_1 ; \tag{17.66}$$

$$\overline{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{S})\ \delta\bar{\Theta}_2 = \overline{\mathcal{M}}_{Q_2}(\bar{S})\ \delta\varphi_2 = l_2 \sin\varphi_2\,|\bar{S}|\delta\varphi_2,$$

rezultînd astfel egalitatea

$$-|\bar{S}|\ \delta x_{Q_2} - l_1\cos\varphi_1|\bar{F}|\ \delta\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2\,|\bar{S}|\delta\varphi_2 = 0. \tag{17.67}$$

Scanned with CamScanner

Este suficient acum să se exprime, în baza ecuațiilor de legătură interioară, deplasările virtuaoe δx_{Q_2} și $\delta\varphi_2$ în funcție de coordonata generalizată $q = \varphi_1$ și de deplasarea virtuală generalizată $\delta\varphi_1$, pentru a se obține astfel, după simplificarea prin $\delta\varphi_1$, forța generalizată egalată cu zero corespunzătoare acestui sistem mecanic cu un grad de libertate, din care se va putea scoate valoarea efortului $\bar{S}$.

Dacă, în exemplul precedent, la calculul lucrului mecanic virtual s-ar fi ales centrele instantanee de rotație ale celor două elemente

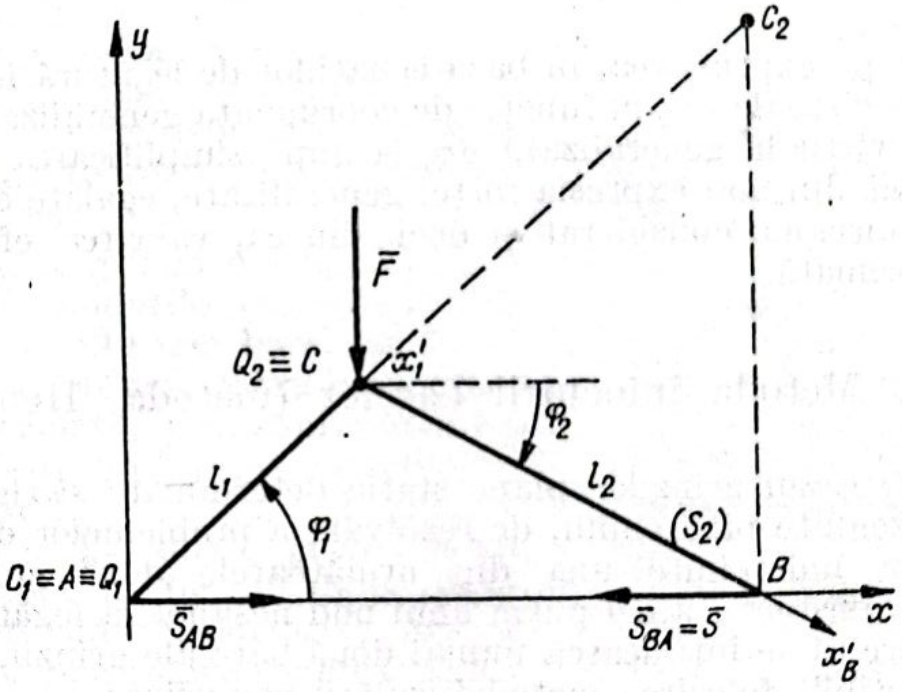


Fig. 17.14

ale sistemului mecanic drept poli, — punctul $C_1 \equiv Q_1 \equiv A$ în elementul (S_1) și punctul C_2, situat la intersecția prelungirii axei barei AC cu normala în B la direcția vitezei punctului B, în elementul (S_2) (fig. 17.14) —, atunci în locul relației (17.64) s-ar utiliza relația mai simplă

$$\overline{\mathcal{M}}_{C_1}(\bar{F})\,\delta\bar{\Theta}_1 + \overline{\mathcal{M}}_{C_2}(\bar{S})\,\delta\bar{\Theta}_2 = \overline{\mathcal{M}}_{C_1}(F)\,\delta\varphi_1 + \overline{\mathcal{M}}_{C_2}(\bar{S})\,\delta\varphi_2 = 0 \tag{17.68}$$

cu

$$\mathcal{M}_{C_1}(\bar{F})\,\delta\varphi_1 = -\,l_1\cos\varphi_1\,|\bar{F}|\,\delta\varphi_1\,; \tag{17.69}$$

$$\mathcal{M}_{C_2}(\bar{S})\,\delta\varphi_2 = -\,\overline{C_2B}\,|\bar{S}|\,\delta\varphi_2 = -\,\overline{AB}\,\mathrm{tg}\,\varphi_1\,|\bar{S}|\,\delta\varphi_2$$

Scanned with CamScanner

şi

$$\overline{AB} = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2, \tag{17.70}$$

adică relaţia

$$-l_1 \cos\varphi_1 |\bar{F}| \, \delta\varphi_1 - (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2) \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot |\bar{S}| \, \delta\varphi_2 = 0, \tag{17.71}$$

din care, după exprimarea, în baza ecuaţiilor de legătură interioară, a deplasării virtuale $\delta\varphi_2$ în funcţie de coordonata generalizată φ_1 şi de deplasarea virtuală generalizată $\delta\varphi_1$ şi după simplificarea prin $\delta\varphi_1$, ar fi rezultat din nou expresia forţei generalizate, egalate cu zero, a sistemului mecanic considerat şi deci, din ea, valoarea efortului $\bar{S}$ în bara suprimată.

17.2.4. Metoda înlocuirii barelor (metoda Henneberg).

Pentru cazul grinzilor plane static determinate şi rigide, metodele, prezentate pînă acum, de rezolvare a problemelor de statică presupuneau îndep.inite una din următoarele două condiţiuni:

— fie existenţa a cel puţin unui nod nesupus la legături exterioare în care să se întîlnească numai două bare ale grinzii, condiţie care face posibilă folosirea metodei izolării nodurilor;

— fie existenţa posibilităţii de efectuare a unei secţiuni a grinzii în două părţi complet separate una de alta şi care să taie un număr de trei bare neparalele, condiţie care permite utilizarea metodei secţiunilor.

În unele aplicaţii tehnice sînt folosite însă şi grinzi rigide static determinate care nu satisfac nici una din cele două condiţiuni menţionate mai sus şi pentru care deci nu poate fi folosită nici una din metodele expuse în subpuntele precedente.

Există însă uneori posibilitatea transformării unei asemenea grinzi static determinate în alte grinzi, tot static determinate, cu acelaşi număr de bare, dar prezentînd, după transformare, cel puţin un nod în care să se întîlnească numai două bare, astfel încît să li se poată aplica metoda izolării nodurilor pentru rezolvarea problemelor de statică.

Scanned with CamScanner

O asemenea transformare se poate realiza prin următoarele procedee :

— suprimarea unui număr de m bare, înlocuindu-se efectele lor prin eforturile corespunzătoare în nodurile extremităților lor , eforturi considerate însă, ca și în cazul utilizării metodei deplasărilor virtuale, forțe exterioare necunoscute ;

— adăugarea unui număr egal de m bare, astfel încît să se realizeze rigiditatea grinzii — distrusă prin suprimarea primelor bare — cu menținerea stării inițiale de echilibru, ceea ce înseamnă că eforturile în noile bare adăugate vor trebui considerate egale cu zero.

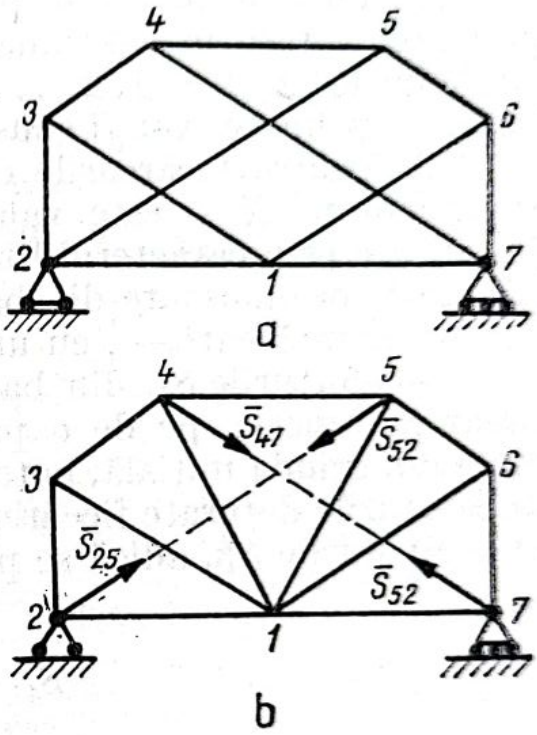


Fig. 17.15

Astfel, grinda din fig. 17.15, a, în care în nodurile (2), (3), . . ., (7) se întîlnesc cîte trei bare, iar în nodul (1) se întîlnesc patru bare, poate fi transformată, prin suprimarea barelor (2—5) și (7—4) și introducerea eforturilor $\bar{S}_{25} = -\bar{S}_{52} = \bar{X}_1$ și $\bar{S}_{74} = -\bar{S}_{74} = \bar{X}_2$, într-o grindă nouă, reprezentată în fig. 17.15, b, funcționînd în condiții identice, prin adăugarea, pentru menținerea rigidității, a barelor (1—4) și (1—5), cu eforturile în aceste noi bare satisfăcînd condițiile

$$\bar{S}_{14} = \bar{S}_{41} = \bar{S}_{15} = \bar{S}_{51} = 0. \tag{17.72}$$

Această posibilitate de transformare a permis elaborarea unei metode de rezolvare a problemelor de statică și pentru categoria de grinzi cu zăbrele menționate mai sus, această metodă, purtînd numele de *metoda înlocuirii barelor*, sau *metoda Henneberg*, bazîndu-se pe următoarele considerații :

1) Numărul m de bare ce urmează a fi suprimate și înlocuite cu altele trebuie astfel ales încît să permită utilizarea, pentru întreaga grindă transformată, a metodei izolării nodurilor, adică nu este suficient să se creeze un nod în care să se întîlnească numai două

bare, ci trebuie să poată exista și în continuare noduri în care, utilizîndu-se eforturile cunoscute din nodurile anterioare, să existe numai două bare cu eforturi necunoscute; se face menţiunea însă, că pentru foarte multe din grinzile cu zăbrele din această categorie folosite în practică, este suficient să se înlocuiască o singură bară, pentru a se putea aplica metoda lui Henneberg.

2) Forţele introduse pentru compensarea efectelor barelor suprimate, notate în continuare, într-o ordine absolută arbitrară, cu simbolurile $X_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ deşi vor reprezenta eforturile în barele suprimate, vor fi considerate încărcări exterioare necunoscute.

3) Pentru încărcările exterioare — și deci și pentru încărcările suplimentare X_k — este valabil principiul suprapunerii efectelor — justificate prin caracterul liniar al ecuaţiilor de echilibri în raport cu eforturile necunoscute din bare, deci prin dependenţa liniară a eforturilor de încărcării — , cu următoarele consecinţe :

— eforturile S_{ij} din barele grinzii transformate vor fi exprimate liniar în funcţie, pe de o parte, de eforturile datorate încărcărilor reale din grinda iniţială, notate cu simbolurile S_{ij}^0 și, pe de altă parte, de eforturile datorate fiecărei din încărcările suplimentare X_k, notate cu simbolurile S_{ij}^*, adică se poate scrie

$$S_{ij} = S_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{m} S_{ij}^*, \tag{17.73}$$

relaţie cate îşi va păstra valabilitatea, evident, și pentru eforturile din noile bare introduse, notate cu simbolurile S_{hl}^*, adică vor putea fi scrise și relaţiile

$$S_{hl}^* = S_{hl}^{*0} + \sum_{k=1}^{m} S_{hl}^{*k}; \tag{17.74}$$

— fiecare din eforturile suplimentare S_{ij}^k și S_{hl}^{*k} va fi proporţional cu încărcarea X_k, adică se vor putea scrie relaţiile

$$S_{ij}^k = s_{ij}^k X_k; \qquad S_{hl}^{*k} = s_{hl}^k X_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{17.75}$$

factorii de proporţionalitate s_{ij}^k și s_{hl}^{*k} numiţi în continuare *coeficienţi de încărcare*, putînd fi determinaţi prin aplicarea, pe rînd, a metodei izolării nodurilor grinzii transformate, considerată în echilibru numai

sub încărcarea

$$X_k = 1\,; \quad X_h = 0\,; \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m\,; \quad k \neq h) \tag{17.76}$$

și observîndu-se că în aceste condiţiuni vor fi valabile relaţiile

$$S_{ij}^{k} = s_{ij}^{k} \cdot 1\,; \quad S_{hl}^{*k} = s_{hl}^{*k} \cdot 1\,; \tag{17.77}$$

adică valorile acestor coeficienţi sînt date de valorile numerice ale eforturilor barelor corespunzătoare încărcărilor (17.76); se înţelege că pentru determinarea tuturor acestor coeficienţi de încărcare va trebui aplicată de m ori metoda izolării nodurilor, pentru toate încărcările unitare posibile de forma (17.76).

În baza relaţiilor (17.75), expresiile (17.73) şi (17.74) ale eforturilor în bare vor lua formele

$$\boxed{S_{ij} = S_{ij}^{0} + \sum_{k=1}^{m} s_{ij}^{k} X_k}\,, \tag{17.78}$$

respectiv

$$S_{hl}^{*} = S_{hl}^{*0} + \sum_{k=1}^{m} s_{ij}^{*k} X_k, \tag{17.79}$$

numărul ultimelor relaţii fiind egal, evident, cu numărul m al barelor înlocuite.

4) Menţinerea stării iniţiale de echilibru implică valori zero pentru eforturile din barele adăugate, deci valabilitatea sistemului de m ecuaţii

$$\boxed{S_{hl}^{*0} + \sum_{k=1}^{m} s_{hl}^{*k} X_k = 0} \tag{17.80}$$

în cele m necunoscute reprezentate prin eforturile X_k, $(k = 1, 2, \ldots m)$ prin rezolvarea, în condiţiile valorii diferite de zero a determinantului coeficienţilor necunoscutelor, adică

$$\Delta = \| s_{hl}^{*k} \| \neq 0, \tag{17.81}$$

Scanned with CamScanner

condiţie satisfăcută în cele mai multe din situaţii, va permite determinarea eforturilor necunoscute X_k şi deci, prin înlocuirea lor în relaţiile (17.87), vor rezulta şi eforturile din restul barelor grinzii.

Consideraţiile precedente permit să se precizeze şi etapele de lucru în rezolvarea problemelor de statica grinzilor cu zăbrele din categoria menţionată prin metoda înlocuirii barelor :

— Scrierea ecuaţiilor de echilibru pentru întreaga grindă iniţială, considerată ca un rigid în echilibru sub acţiunea încărcărilor exterioare şi a reacţiunilor legăturilor pasive exterioare aplicate ei ; rezolvarea acestui prim sistem de ecuaţii va permite determinarea — în mod obişnuit $r = 3$ — a reacţiunilor legăturilor exterioare, care vor fi considerate, în continuare, încărcări exterioare date :

— suprimarea numărului m necesar de bare şi adăugarea altor m bare, astfel încît să fie aplicabilă grinzii transformate metoda izolării nodurilor ; folosind ultima metodă numai pentru încărcările exterioare şi cele corespunzătoare reacţiunilor exterioare ale grinzii transformate — nu şi pentru încărcările X_k — , se vor determina, din ecuaţiile de echilibru, valorile S_{ij}^0 şi S_{ij}^{*0} ale eforturilor în bare ;

— determinarea, pentru fiecare din eforturile suplimentare X_k, tot prin metoda izolării nodurilor, a coeficienţilor de încărcare s_{ij}^k şi s_{hl}^{*k}, corespunzători încărcărilor unitare de forma (17.76) ;

— formarea sistemului (17.80) de ecuaţii şi rezolvarea lui în raport cu eforturile X_k, $(k = 1, 2, \ldots, m)$;

— determinarea, cu ajutorul relaţiilor (17.78) a eforturilor reale din barele netransformate ale grinzii cu zăbrele.

În aplicaţiile practice se obişnuieşte ca toate aceste date să fie trecute într-un tabel avînd forma de mai jos

S_{ij}	S_{ij}^0	s_{ij}^1	$\ldots$	s_{ij}^k	$\ldots$	s_{ij}^m	$s_{ij}^1 X_1$	$\ldots$	$s_{ij}^k X_k$	$\ldots$	$s_{ij}^m X_m$	$S_{ij} = S_{ij}^0 + \sum_{k=1}^{m} s_{ij}^k X_k$
S_{12}	S_{12}^0	s_{12}^1	$\ldots$	s_{12}^k	$\ldots$	s_{12}^m	$s_{12}^1 X_1$	$\ldots$	$s_{12}^k X_k$	$\ldots$	$s_{12}^m X_m$	$S_{12} = S_{12}^0 + \sum_{k=1}^{m} s_{12}^k X_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
S_{hl}^*	S_{hl}^{*0}	s_{hl}^{*1}	$\ldots$	s_{hl}^{*k}	$\ldots$	s_{hl}^{*m}	$s_{hl}^{*1} X_1$	$\ldots$	$s_{hl}^{*k} X_k$	$\ldots$	$s_{hl}^{*m} X_m$	$S_{hl}^* = S_{hl}^{*0} + \sum_{k=1}^{m} s_{hl}^{*k} X_k$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

cu coloanele $s_{ij}^{k} \cdot X_k$ din partea dreaptă a tabelului completate, evident după rezolvarea sistemului de ecuaţii (17.80); ultima coloană va furniza valorile reale ale eforturilor, cele ale barelor adăugate trebuind să capete, dacă calculele au fost corect efectuate, valori zero.

§ 18. Mecanica firelor

18.1. *Ecuaţiile generale ale mecanicii firelor*

18.1.1. Problema generală a mecanicii firelor

În mecanică, se numesc *fire*, corpurile solide avînd două dintre dimensiuni neglijabile în raport cu cea de-a treia — lungimea — şi prezentînd următoarele două proprietăţi caracteristice:

— *inextensibilitatea*, înţelegîndu-se prin aceasta că eventualele alungiri pe care le-ar căpăta asemenea corpuri atunci cînd sînt solicitate la întindere în lungul axei longitudinale sînt practic neglijabile;

— *flexibilitatea*, exprimînd proprietatea de a nu opune, practic, nici o rezistenţă la orice încercare de a li se modifica forma.

Aceste două proprietăţi ale firelor ar putea fi explicate considerîndu-se firul ca un sistem mecanic format dintr-un număr foarte mare de bare rectilinii, de lungimi foarte mici, articulate cap la cap, o imagine plastică a unui asemenea model mecanic constituind-o lanţul format din tije cuplate prin articulaţii sferice pentru firele spaţiale, (fig. 18.1, a), respectiv lanţul de bicicletă, cu elementele cuplate prin articulaţii cilindrice, pentru firele plane, (fig. 18.1, b).

Se înţelege însă că această modelare mecanică va corespunde riguros realităţii numai atunci cînd barele vor căpăta lungimi elementare, iar numărul lor va deveni infinit. Rezultă de aici că un fir va putea fi considerat ca un sistem mecanic format din bare articulate, cu un număr infinit de grade de libertate, o asemenea modelare mecanică îndreptăţind, de altfel, şi încadrarea mecanicii firelor în mecanica sistemelor de rigide.

Tot pe baza precizărilor făcute mai sus, se mai poate trage concluzia că un element al modelului mecanic al firului va fi reprezentat printr-un element de fir, de lungime elementară ds, forţelor interioare de separaţie a acestui element de restul firului corespunzîndu-le tensiunile de la extremităţile elementului de fir.

Scanned with CamScanner

Proprietatea de flexibilitate admisă pentru fir explică și orientarea, după tangenta la curba pe care o formează axa longitudinală a firului, a tensiunii într-un punct oarecare B, această tensiune reprezentînd forța interioară care trebuie introdusă la secționarea firului în acest punct, considerată ca acționînd asupra porțiunii de fir AB. (O forță de aceeași mărime și de sens contrar va acționa și în punctul B al porțiunii de fir BC, speparată de prima). Într-adevăr

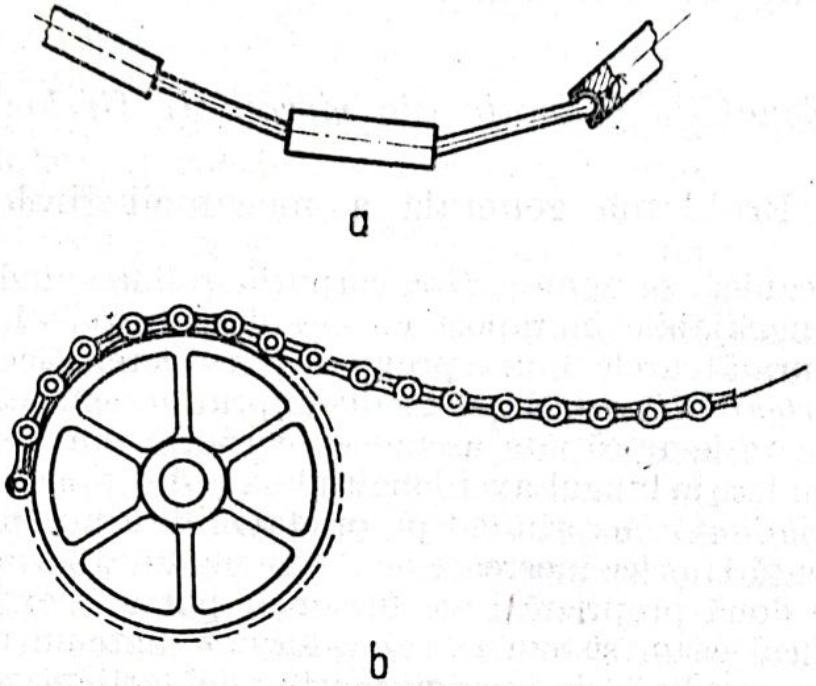


Fig. 18.1

existența oricărei componente normale la axa longitudinală a firului a acestei forțe interioare ar avea drept consecință imediată curbarea firului flexibil în direcția acestei componente (fig. 18.2), pînă la anularea ultimei.

În consecință, dacă $\bar{\tau}$ este versorul tangențial la curba după care se așează firul, într-un punct B al acesteia, atunci tensiuna în acest punct va avea expres a

$$\boxed{\bar{T} = T\tau} \tag{18.1}$$

În aplicațiile tehnice firele sînt întîlnite sub formă de funii, otgoane, sfori, cabluri, sîrme, lanțuri, curele etc.

În ceea ce privește problema generală a mecanicii firelor, ea poate fi formulată în modul următor:

„Fiind dat un fir de lungime determinată, L, solicitat de un sistem dat de forțe exterioare active — în general, repartizate pe

toată lungimea firului — și situat pe o suprafață (Σ), pe care se deplasează, sau, în particular, rămîne în repaus, se impune :

1) Stabilirea formei curbei pe care o ia firul pe suprafață în timpul deplasării lui, respectiv în poziția de echilibru.

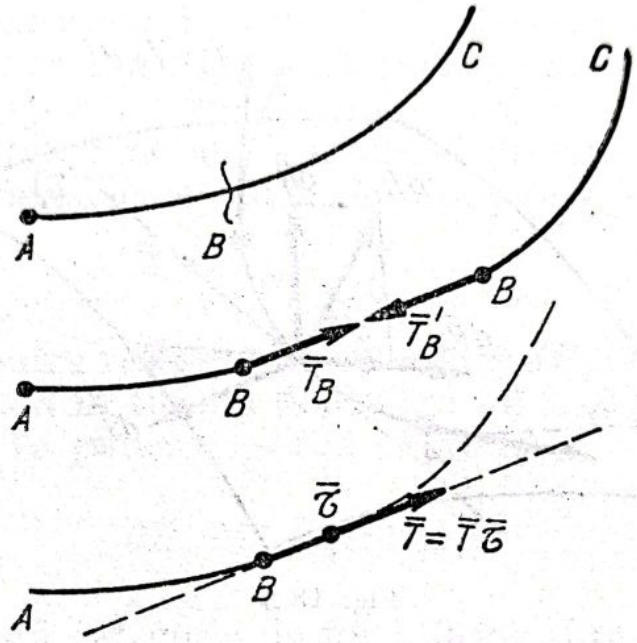


Fig. 18.2

2) Determinarea tensiunii într-un punct arbitrar al firului.

Posibilitatea de a răspunde la ambele chestiuni ale problemei generale a mecanicii firelor o va oferi — o *ecuație generală vectorială a mecanicii firelor*, care va fi stabilită în continuare.

18.1.2. Ecuația vectorială generală a mecanicii firelor

Considerînd un element de fir AB, de lungime ds, de masă

$$dm = \rho_l \, ds, \tag{18.2}$$

— ρ_l fiind densitatea liniară a firului — și care se deplasează în direcția determinată prin versorul $\bar{\tau}^*$, pe o suprafață (Σ), (fig. 18.3), în general aspră, determinată, în raport cu un reper cartezian fix $Oxyz$, la care este raportată și mișcarea firului, prin ecuația

$$f(x, y, z) = 0, \tag{18.3}$$

asupra acestui element de fir vor acționa, în general, următoarele categorii de forțe:

— *Forțe exterioare active*, distribuite, de regulă, de toată lungimea firului, cum sînt greutatea — atunci cînd nu e neglijabilă în

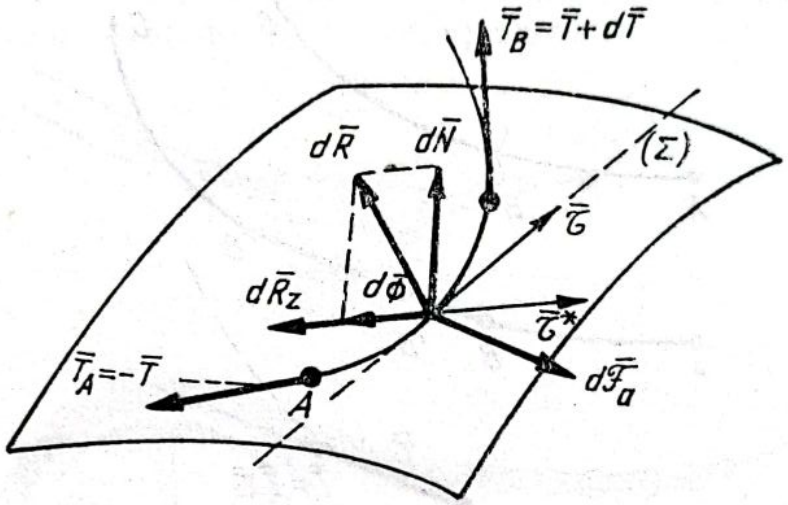


Fig. 18.3

raport cu celelalte forțe active — , diversele încărcări distribuite permanente (straturi de material izolant pe conductori electrici etc) sau accidentale (straturi de gheață formate iarna pe cablurile aeriene etc), forțe electromagnetice sau electrostatice ș.a.

În cazul acestor forțe distribuite se vor putea defini *forțe specifice*, funcții, în general, de punct, iar în cazul distribuțiilor uniforme, constante, forțe repartizate pe unitatea de lungime, măsurate în N/m.

În consecință, dacă se notează cu $\bar{p}$ *forța specifică rezultantă exterioară*, se va putea scrie următoarea expresie pentru rezultanta $d\bar{\mathcal{F}}_a$ a tuturor forțelor active ce acționează asupra elementului de fir AB:

$$d\bar{\mathcal{F}}_a = \bar{p}\, ds\,. \tag{18.4}$$

În cazul cînd unica forță exterioară activă este greutatea, forța specifică corespunzătoare ei va avea expresia

$$\bar{p} = \frac{\bar{P}}{L} = \frac{M}{L}\,\bar{g}, \tag{18.5}$$

L fiind lungimea firului, $\bar{P}$ greutatea lui, M masa sa, iar $\bar{g}$ reprezentînd acceleraţia greutăţii.

— *Forţe exterioare pasive*, repartizate, de asemenea, în cele mai multe situaţii, pe toată lungimea firului.

În această de a doua categorie de forţe intră, mai întîi, forţele de rezistenţă a mediului în care se deplasează firul — de regulă, aerul — , aceasta, evident, în cazul cînd ele nu pot fi neglijate. Întrucît şi în cazul acestor forţe se poate introduce o *forţă specifică de rezistenţă a mediului*, funcţie, se înţelege, de viteza punctului de pe fir în care se consideră elementul ds, notată $\varphi\,(v)$ şi satisfăcînd condiţia

$$\varphi(0) = 0, \tag{18.6}$$

este evident că pentru rezistenţa elementară $d\bar{R}_z$, pe care o întîmpină elementul de fir AB în timpul deplasării lui în direcţia determinată prin versorul $\bar{\tau}^*$, va putea fi scrisă expresia

$$d\bar{R}_z = -\varphi(v)\, ds\, \bar{\tau}^* \tag{18.7}$$

Tot în această categorie de forţe intră şi reacţiunea d$\bar{R}$, exercitată de suprafaţa de sprijin (Σ) asupra elementului de fir rezemat pe ea, reacţiune care, avînd în vedere faptul că suprafaţa (Σ) este aspră, va avea atît componenta normală d$\bar{N}$ cît şi componenta tangenţială, reprezentată prin forţa de frecare la alunecare elementară d$\bar{\Phi}$, putîndu-se scrie deci

$$d\bar{R} = d\bar{N} + d\bar{\Phi} \tag{18.8}$$

Deoarece şi aceste reacţiuni sînt distribuite pe toată lungimea firului — considerat în întregime rezemat pe suprafaţa (Σ) — , se va putea defini şi acum o *reacţiune normală specifică*, funcţie de punct, coliniară cu vectorul grad$f$ corespunzător centrului elementului de fir, această reacţiune normală specifică putînd fi notată şi acum λgrad, cu factorul de coliniaritate λ depinzînd însă de poziţia pe fir a punctului de rezemare. În consecinţă, ţinînd seama şi de legea lui Amonton-Coulomb, care dă mărimea forţei de frecare la alunecare în funcţie de mărimea reacţiunii normale, se vor putea scrie următoarele expresii pentru cele două componente ale reacţiunii suprafeţei (Σ) exercitată asupra elementului de fir AB:

$$d\bar{N} = \lambda\, \mathrm{grad}\, f\, ds, \tag{18.9}$$

respectiv

$$d\bar{\Phi} = -\mu\,(\lambda \operatorname{grad} f \mid ds\,\bar{\tau}^*. \tag{18.10}$$

În baza relațiilor (18.7), (18.8), (18.9) și (18.10), va putea fi scrisă acum următoarea expresie pentru rezultanta tuturor forțelor elementare exterioare pasive ce acționează asupra elementului de fir AB:

$$d\bar{\mathcal{F}}_p = d\bar{R}_z + d\bar{R} = -\varphi\,(v)\,ds\,\bar{\tau}^* +$$

$$+\lambda \operatorname{grad} f\,ds - \mu\,/\lambda \operatorname{grad} f/ds\,\bar{\tau}^*. \tag{18.11}$$

— *Forțe interioare*, reprezentate prin tensiunile $\bar{T}_A$ și $\bar{T}_B$ din punctele A și B de separație a elementului de fir considerat, de restul firului. Pentru aprecierea valorii rezultantei acestor două forțe, se va observa că în cazul cînd elementul de fir nu ar fi solicitat de nici o forță exterioară și s-ar afla în repaus sau în stare de mișcare rectilinie uniformă, atunci cele două tensiuni din punctele A și B ar trebui să formeze un sistem echivalent cu zero, adică, dacă tensiunea din A este

$$\bar{T}_A = -\bar{T},$$

atunci tensiunea din B ar trebui să aibă valoarea

$$\bar{T}_B = \bar{T}.$$

Existența forțelor exterioare elementare, care vor da o rezultantă tot elementară, precum și a forței elementare de inerție corespunzătoare elementului considerat de fir, impune însă o creștere geometrică — evident, tot elementară — a tensiunii din punctul B, pentru a compensa forțele elementare menționate mai sus, ceea ce înseamnă că tensiunea din punctul B va fi în realitate

$$\bar{T}_B = \bar{T} + d\bar{T}, \tag{8.11}$$

în comparație cu tensiunea din A, care are valoarea $\bar{T}_A = -\bar{T}$.

Scanned with CamScanner

În consecință, rezultanta forțelor interioare care acționează asupra elementului de fir — rezultanta tensiunilor din extremitățile firului AB — va avea valoarea

$$d\bar{\mathcal{F}}_{int} = d\bar{T}. \tag{18.13}$$

În baza principiului al doilea al dinamicii, aplicat elementului de fir în mișcare, se va putea scrie acum relația

$$\mathrm{dm}\,\bar{a} = d\bar{\mathcal{F}}_a + d\bar{\mathcal{F}}_p + d\bar{\mathcal{F}}_{int}, \tag{18.14}$$

sau încă, ținînd seama de expresiile stabilite mai sus pentru diversele forțe, precum și pentru masa elementară dm, se obține, după împărțirea prin ds și trecerea tuturor termenilor într-un singur membru, relația

$$\boxed{\frac{d\bar{T}}{ds} + (\bar{p} - \rho_l a) - \varphi(v)\,\bar{\tau}^* + \lambda\,\mathrm{grad}\,f - \mu\,|\,\mathrm{grad}\,f|\bar{\tau}^* = 0,} \tag{18.15}$$

reprezentînd *ecuația vectorială generală a mecanicii firelor.*

În cazul cînd firul ia forma unei geodezice a suprafeței de reazem, ceea ce înseamnă că vectorul grad f are aceeași direcție ca și versorul $\bar{\nu}$ al normale principale la curbă, putîndu-se scrie deci

$$\lambda\,\mathrm{grad}f = \lambda\,|\mathrm{grad}f|\bar{\nu} \tag{18.16}$$

— semnul scalarului λ urmînd să fie precizat în funcție de orientarea reacțiunii normaie în raport cu versorul $\bar{\nu}$ — și dacă alunecarea firului se face numai în lungul acestei geodezice, rezultînd astfel condiția

$$\bar{\tau}^* = \bar{\tau}\,, \tag{18.17}$$

atunci ecuația vectorială (18.15), în care, în aceste condiții, rezistența mediului devine, de regulă, neglijabilă ($\varphi(v) \approx 0$), iar primul termen poate fi exprimat, cu ajutorul primei formule a lui Frenet, sub forma

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{d}{ds}(T\,\bar{\tau}) = \frac{dT}{ds}\,\bar{\tau} + T\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{dT}{ds}\,\bar{\tau} + \frac{T}{\rho_c}\,\bar{\nu}, \tag{18.18}$$

va lua forma mai simplă

$$\boxed{\frac{dT}{ds}\bar{\tau} + \frac{T}{\rho_c}\bar{\nu} + (\bar{p} - \rho_i \bar{a}) + \lambda |\operatorname{grad} f| \bar{\nu} - \mu |\lambda \operatorname{grad} f| \bar{\tau} = 0} \tag{18.19}$$

purtînd numele de *ecuația vectorială a mecanicii firelor situate pe geodezice și alunecînd în lungul lor.*

Din ultima ecuație, prin proiectare pe axa binormalei, rezultă condiția

$$p_\beta = 0, \tag{18.20}$$

care scoate în evidență faptul că firul va lua forma unei geodezice a suprafeței de sprijin numai atunci cînd, în condițiile precizate mai înainte, forța activă specifică care îl solicită se va găsi în permanență în planul osculator al geodezicei respective.

Ecuații.e generale (18.15) și (18.19) capătă următoarele forme particulare :

1°. Ecuațiile vectoriale ale dinamicii firelor libere

pentru condiția

$$\lambda = 0, \tag{18.21}$$

rezultînd astfel

$$\boxed{\frac{d\bar{T}}{ds} + (\bar{p} - \rho_i \bar{a}) - \varphi(v)\bar{\tau}^* = 0,} \tag{18.22}$$

respectiv

$$\boxed{\frac{dT}{ds}\tau + \frac{T}{\rho_c}\bar{\nu} + (\bar{p} - \rho_i \bar{a}) = 0,} \tag{18.23}$$

Scanned with CamScanner

ultima reprezentînd *ecuația vectorială a dinamicii firelor libere sub forma intrinsecă.*

2°. Ecuațiile vectoriale ale staticii firelor rezemate pe suprafețe

Corespund condițiilor

$$\bar{v} \equiv 0\,; \qquad \bar{a} \equiv 0, \tag{18.24}$$

pentru care rezultă

$$\boxed{\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p} + \lambda\,\mathrm{grad} f - \mu\,|\,\lambda\,\mathrm{grad}\,f\,|\bar{\tau}^* = 0} \tag{18.25}$$

— versorul $\bar{\tau}^*$ precizînd de astă dată direcția în care se manifestă tendința de alunecare a firului —, respectiv

$$\boxed{\frac{dT}{ds}\,\bar{\tau} + \frac{T}{\rho_c}\,\bar{\nu} + \bar{p} + \lambda\,|\,\mathrm{grad}\,f\,|\bar{\nu} - \mu\,|\,\lambda\,\mathrm{grad}\,f\,|\,\bar{\tau} = 0,} \tag{18.26}$$

pentru firele situate pe geodezicele suprafeței de reazem.

3°. Ecuațiile vectoriale ale staticii firelor libere

Pentru condițiile

$$\lambda = 0\,; \qquad \bar{v} \equiv 0\,; \qquad \bar{a} \equiv 0. \tag{18.27}$$

rezultă ecuațiile

$$\boxed{\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p} = 0,} \tag{18.28}$$

respectiv

$$\boxed{\frac{dT}{ds}\,\tau+\frac{T}{\rho_c}\,\bar{\nu}+\bar{p}=0,} \tag{18.29}$$

ultima reprezentînd *ecuația vectorială a staticii firelor libere sub forma intrinsecă.*

18.1.3. Ecuațiile scalare ale mecanicii firelor

Ecuațiile scalare ale mecanicii firelor se obțin prin proiectarea ecuației vectoriale (18.15) pe axele sistemului de referință cartezian fix, în raport cu care a fost scrisă și ecuația suprafeței pe care se sprijină firul, respectiv prin proiectarea ecuației vectoriale (18.19) pe axele intrinseci corespunzătoare punctului curent de pe fir în care se scrie ecuația.

Dacă α^*, β^* și γ^* sînt proiecțiile pe axele carteziene considerate ale versorului $\bar{\tau}^*$ — cosinusurile directoare ale direcției de mișcare a elementului de fir — , atunci ecuației vectoriale (18.15) îi va corespunde următorul sistem de ecuații de proiecții pe axele reperului fix :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\frac{dT_x}{ds}+p_x-\rho_l\,\ddot{x}-\varphi(v)\,\alpha^*+\lambda\,\frac{\partial f}{\partial x}-\mu\,|\lambda\,\mathrm{grad}f|\alpha^*=0\,;\\
&\frac{dT_y}{ds}+p_y-\rho_l\,\ddot{y}-\varphi(v)\,\beta^*+\lambda\,\frac{\partial f}{\partial y}-\mu\,|\lambda\,\mathrm{grad}f|\beta^*=0\,;\\
&\frac{dT_z}{ds}+p_z-\rho_l\,\ddot{z}-\varphi(v)\,\gamma^*+\lambda\,\frac{\partial f}{\partial z}-\mu\,|\lambda\,\mathrm{grad}f|\gamma^*=0,
\end{aligned}} \tag{18.30}$$

ele purtînd numele de *ecuațiile scalare generale ale mecanicii firelor sub forma carteziană.*

De asemenea, ecuației vectoriale (18.19) îi crespund următoarele ecuații de proiecții pe tangenta și normala principală la geodezica

suprafeţii de sprijin în lungul căreia se aşează şi alunecă firul :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dT}{ds} + p_\tau - \rho_l v - \mu \, |\lambda \operatorname{grad} f| = 0 \\ &\frac{T}{\rho_c} + p_\nu - \rho_l \frac{v^2}{\rho_c} + \lambda |\operatorname{grad} f| = 0 \end{aligned}} \tag{18.31}$$

(pe binormală, toate proiecţiile mărimilor care figurează în ecuaţii sînt, după cum s-a văzut, egale cu zero), aceste ecuaţii purtînd numele de *ecuaţiile scalare ale mecanicii firelor sub forma intrinsecă*.

Atît sistemul de ecuaţii (18.30), cît şi sistemul de ecuaţii (18.31) se particularizează în :

1°. Ecuaţiile scalare ale dinamicii firelor libere

Pentru condiţia

$$\lambda = 0 \tag{18.32}$$

rezultă ecuaţiile

$$\boxed{\frac{dT_x}{ds} + p_x - \rho_l \ddot{x} = 0 \, ; \; \frac{dT_y}{ds} + p_y - \rho_l \ddot{y} = 0 \, ; \; \frac{dT_z}{ds} + p_z - \rho_l z = 0} \, , \tag{18.33}$$

respectiv

$$\boxed{\frac{dT}{ds} + p_\tau - \rho_l \dot{v} = 0 \, ; \; \frac{T}{\rho_c} + p_\nu - \rho_l \frac{v^2}{\rho_c} = 0.} \, . \tag{18.34}$$

Scanned with CamScanner

2°. Ecuaţiile scalare ale staticii firelor rezemate pe suprafeţe

Corespund condiţiilor

$$\bar{v} \equiv 0\,; \qquad \bar{a} \equiv 0, \tag{18.35}$$

cu consecinţele

$$\dot{v} \equiv 0\,; \qquad \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} \equiv 0, \tag{18.36}$$

pentru care rezultă

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dT_x}{ds} + p_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \mu\,|y\ \mathrm{grad}\, f|\alpha^* = 0\,; \\ &\frac{dT_y}{ds} + p_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \mu\,|\lambda\ \mathrm{grad} f|\beta^* = 0\,; \\ &\frac{dT_z}{ds} + p_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \mu\,|\lambda\ \mathrm{grad}\, f|\gamma^* = 0, \end{aligned}} \tag{18.37}$$

respectiv

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dT}{ds} + p_\tau \mp \mu\,|\lambda\ \mathrm{grad}\, f| = 0\,; \\ &\frac{T}{\rho_c} + p_\nu + \lambda\,|\mathrm{grad}\, f| = 0 \end{aligned}} \tag{18.38}$$

3°. Ecuaţiile scalare ale staticii firelor libere

Corespund condiţiilor

$$\lambda = 0\,; \qquad \bar{v} \equiv 0\,; \qquad \bar{a} \equiv 0, \tag{18.39}$$

cu consecinţele

$$\dot{v} = 0\,; \qquad \ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} \equiv 0, \tag{18.40}$$

cînd ecuaţiile de echilibru iau formele

$$\boxed{\frac{dT_x}{ds} + p_x = 0\,; \quad \frac{dT_y}{ds} + p_y = 0\,; \quad \frac{dT_z}{ds} + p_z = 0,} \tag{18.41}$$

respectiv

$$\boxed{\frac{dT}{ds} + p_\tau = 0\,; \quad \frac{T}{\rho_c} + p_\nu = 0.} \tag{18.42}$$

18.2. *Probleme uzuale de statica firelor*

În continuare, vor fi rezolvate următoarele probleme concrete de statica firelor, interesînd în mod deosebit aplicaţiile tehnice :

18.2.1. Echilibrul firului liber, de greutate neglijabilă, tensionat la extremităţi

Considerînd un element de fir de lungime ds, rezultă, în baza enunţului problemei, următoarele condiţii cinematice şi dinamice

$$\bar{v} \equiv 0\,; \qquad \bar{a} \equiv 0\,; \qquad \lambda \equiv 0\,; \qquad \bar{p} \equiv 0, \tag{18.43}$$

pentru care ecuaţia vectorială generală (17.15) a mecanicii firelor ia forma simplificată

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = 0, \tag{18.44}$$

conducînd, prin integrare, la concluzia

$$\boxed{\bar{T} = \bar{T}^\circ = T^\circ \bar{\tau}^\circ}, \tag{18.45}$$

$\bar{\tau}^\circ$ fiind versorul tangenţial la curba de echilibru, constant, după cum se vede, în cazul de faţă.

Ultima relaţie permite să se tragă concluziile:

— forma curbei de echilibru a firului este, în aceste condiţiuni, aceea a unei drepte;

— tensiunea are aceeaşi valoare în orice punct al firului.

Ultima concluzie este valabilă şi pentru punctele extreme, A şi B, ale firului, (fig. 18.4), ceea ce înseamnă că tensiunile în aceste două puncte vor fi reprezentate chiar prin forţele active de tensionare, $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$, adică

$$\bar{T}_A = -\bar{T}^\circ = \bar{F}_1; \qquad \bar{T}_B = \bar{T}^\circ = \bar{F}_2, \tag{18.46}$$

aceste două forţe formînd, în cazul firului în echilibru, un sistem de vectori direct opuşi.

18.2.2. Echilibrul firului liber, de greutate neglijabilă, fixat la extremităţi şi supus la sarcini concentrate

Considerînd, în continuare, numai cazul plan al problemei, se va presupune că un fir de lungime determinată şi de greutate neglijabilă, avînd extremităţile fixate în două puncte A şi B, este solicitat de forţele concentrate $\bar{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, situate, toate, în acelaşi plan ce conţine şi punctele A şi B şi cărora li se cunosc modulii $|\bar{F}_i|$ sensurile, precum şi suporturile (Δ_i), amplasate între punctele extreme A şi B ale firului, (fig. 18.5).

Rezolvarea celor două probleme ale staticii firelor — determinarea formei de echilibru a firului şi a tensiunii într-un punct oarecare al lui — va trebui făcută, în aceste condiţiuni, prin combinarea a două procedee distincte:

— Cu ajutorul ecuaţiei vectoriale diferenţiale de echilibru pe porţiunile $A_{i-1}A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, (cu $A_0 \equiv A$), dintre două su-

porturi succesive (Δ_{i-1}) și (Δ_i) ale forțelor concentrate consecutive $\bar{F}_{i-1}$ și $\bar{F}_i$, ecuații care, în ipotezele de lucru adoptate — firul este liber în aceste porțiuni și nesolicitat exterior — vor avea formele

$$\frac{d\bar{T}_{i-1,i}}{ds} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{18.47}$$

cu consecințele

$$\bar{T}_{i-1;i} = \bar{T}^{\circ}_{i-1,i} = T^{\circ}_{i-1,i}\,\bar{\tau}^{\circ}_{i-1,i}, \tag{18.48}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

cunoscute de la problema precedentă, $\bar{T}_{i-1,i}$ fiind tensiunea din porțiunea $A_{i-1}A_i$.

— Prin procedeele clasice ale staticii sistemelor mecanice, atunci cînd se consideră întregul fir, sau porțiuni finite din el care cuprind mai multe vîrfuri ale liniei poligonale, remarcîndu-se că firul poate fi considerat fie ca un sistem mecanic, considerat solidificat, aflat în echilibru sub acțiunea forțelor exterioare concentrate, a forțelor de legătură exterioară — reprezentate prin tensiunile $\bar{T}_A$ și $\bar{T}_B$ din punctele de fixare A și B — , precum și, în cazul porțiunilor izolate din fir, a forțelor interioare — reprezentate prin tensiunile din punctele de separație a porțiunilor de restul firului — , fie ca un sistem de puncte materiale, reprezentate prin punctele A_i, aflate în echilibru sub acțiunea forțelor concentrate din aceste puncte și a forțelor interioare, reprezentate prin tensiunile $\bar{T}_{i,i-1}$ și $\bar{T}_{i,i+1}$ din porțiunile $A_{i-1}A_i$ și $A_i A_{i+1}$, care au comun punctul A_i

Relațiile (18.48) permit să se tragă concluzia că forma de echilibru a firului considerat mai sus va fi o linie poligonală $AA_1A_2\ldots$ $\ldots A_i \ldots A_nB$, (fig. 18.5), cu vîrfurile A_i ale ei situate pe suporturile (Δ_i) ale forțelor $\bar{F}_i$.

Cea de-a doua serie de observații, legate de justificarea posibilității de folosire a procedeelor clasice ale mecanicii sistemelor în statica firului permite aplicarea fie a metodei echilibrului întregului sistem și al părților — considerîndu-se atît firul întreg, cît și porțiunile separate din el ca fiind solidificate — , fie a metodei izolării punctelor A_i, pentru determinarea configurației punctelor A_i ale liniei poligonale de echilibru al firului, a tensiunilor din aceste puncte, precum și a tensiunilor din punctele extreme A și B.

Scanned with CamScanner

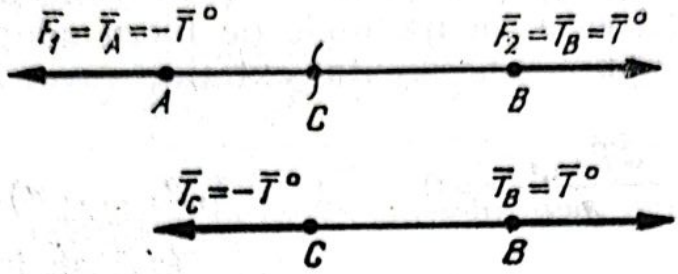


Fig. 18.4

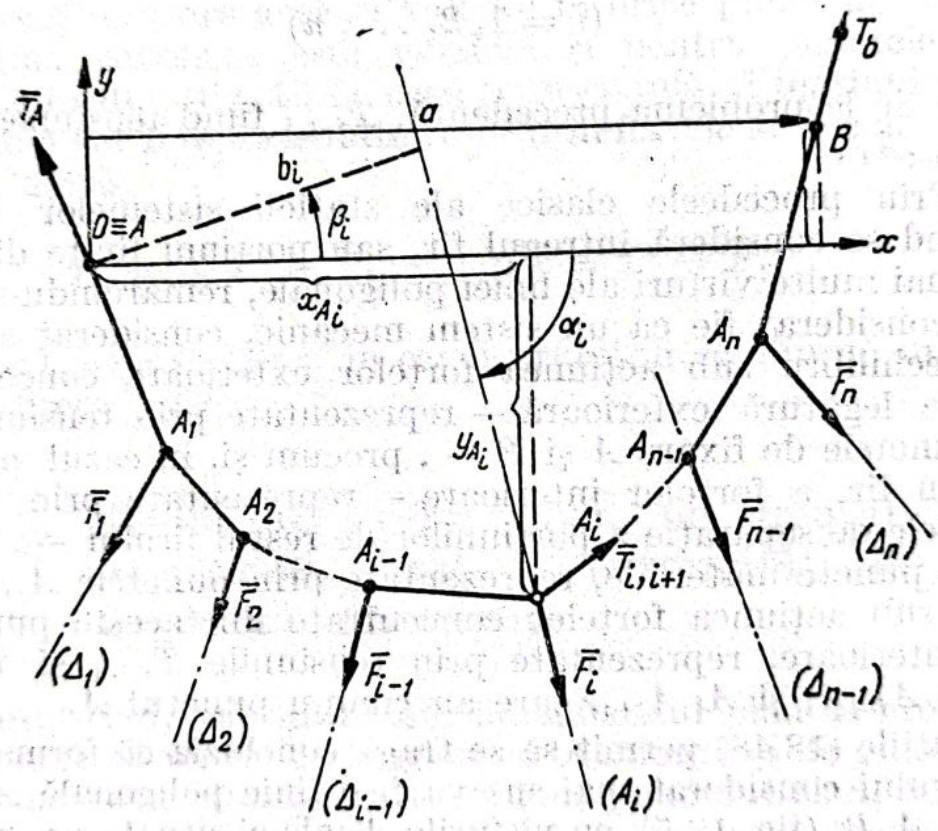


Fig. 18.5

Considerînd un sistem de referinţă plan Oxy, cu originea în unul din punctele de fixare a firului, de ex., în punctul A, ($O\equiv A$), (fig. 18.5) şi cu axele în planul forţelor $\bar{F}_i$ şi astfel orientate încît să poată fi caculate, cu cît mai multă uşurinţă, proiecţiile pe axe şi momentele forţelor $\bar{F}_i$ — de regulă, în problemele în care forţele $\bar{F}_i$ sînt verticale, axa Ox se orientează după orizontală, iar axa Oy după verticală —, forţele $\bar{F}_i$ vor fi determinate prin modulii lor $|\bar{F}_i|$, prin sensurile lor

pe suporturi, precizate cu ajutorul unghiurilor orientate

$$\alpha_i = (\overline{F}_i, i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{18.49}$$

— cu $\alpha_i > 0$ dacă unghiul este descris în sens direct socotit de la axa Ox și cu $\alpha_i < 0$ dacă este descris în sens invers trigonometric, ca în fig. 18.5 — , precum și prin ecuația suportului (Δ_i), scrisă sub forma normală a lui Hesse, adică

$$x \cos\beta_i + y \sin\beta_i - b_i = 0, \tag{18.50}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n),$$

unde b_i reprezintă brațul forței $\overline{F}_i$ în raport cu polul 0, iar β_i reprezintă unghiul de asemenea orientat, format de braț cu axa Ox și care poate fi exprimat în funcție de unghiul α_i, $\left(\text{în cazul forței } \overline{F}_i \text{ din fig. 18.5, cu } \alpha_i < 0, \text{ rezultă } \beta_i = \frac{\pi}{2} + \alpha_i\right)$.

Se va arăta, în continuare, că cele două probleme ale staticii firelor vor putea fi rezolvate cu ușurință prin aplicarea celor două metode generale ale staticii sistemelor atunci cînd se precizează poziția unuia din vîrfurile liniei poligonale, de exemplu, a vîrfului A_j $(x_{A_j}; y_{A_j})$, cu coordonatele x_{A_j} și y_{A_j} cunoscute.

Într-adevăr, scriind mai întîi ecuațiile de echilibru pentru întregul fir, considerat solidificat, va rezulta sistemul de ecuații

$$T_{Ax} + \sum_{i=1}^{n} |\overline{F}_i| \cos\alpha_i + T_{Bx} = 0;$$

$$T_{Ay} + \sum_{i=1}^{n} |\overline{F}_i| \sin\alpha_i + T_{By} = 0; \tag{18.51}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{M}(\overline{F}_i) - b\, T_{Bx} + a\, T_{By} = 0,$$

unde

$$\mathcal{M}(\overline{F}_i) = \pm b_i |\overline{F}_i|, \tag{18.52}$$

cu semnul precizat după regula observatorului, iar a și b sînt coordonatele, în raport cu reperul ales, ale celui de-al doilea punct de fixare, B, al firului, (fig. 18.5).

S-a obținut astfel un prim sistem de 3 ecuații algebrice în necunoscutele T_{Ax}, T_{Ax}, T_{B_y} și T_{B_y}.

Considerînd apoi porțiunea de fir $AA_1A_2, \ldots, A_j$, considerată secționată în punctul A_j și solidificată, se vor scrie, după introducerea

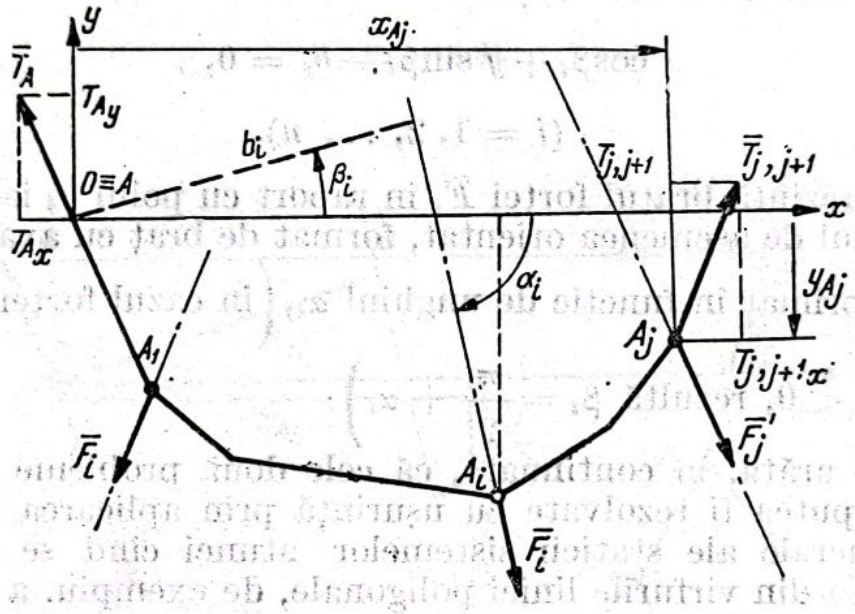


Fig. 18.6

tensiunii interioare $\overline{T}_{j,j+1}$ din punctul de secționare A_j, (fig. 18.6), următoarele ecuații de echilibru :

$$T_{Ax} + \sum_{i=1}^{j} |\overline{F}_i| \cos\alpha_i + T_{j,j+1x} = 0 ;$$

$$T_{Ay} + \sum_{i=1}^{j} |\overline{F}_i| \sin\alpha_i + T_{j,j+1y} = 0 ; \qquad (18.53)$$

$$\sum_{i=1}^{j} \mathcal{M}(\overline{F}_i) - y_{Aj}\, T_{j,j+1x} + x_{Aj}\, T_{j,j+1y} = 0,$$

conținînd ca noi necunoscute proiecțiile pe axele de coordonate alese ale tensiunii $\overline{T}_{j,j+1}$.

Ansamblul format din ecuaţiile (18.51) şi (18.53) vor alcătui un sistem de 6 ecuaţii algebrice liniare în cele 6 necunoscute reprezentate prin proiecţiile pe axele de coordonate ale tensiunilor $\bar{T}_A$, $\bar{T}_B$ şi $\bar{T}_{j\,j+1}$, rezolvarea sistemului furnizînd deci aceste necunoscute.

Odată găsită tensiunea $\bar{T}_A$, care este orientată în lungul porţiunii AA_1 de fir, (fig. 18.7), va putea fi calculat unghiul γ_{01} format de această porţiune cu axa Ox, unghi dat de relaţia

$$\operatorname{tg}\gamma_{01} = \frac{T_{Ay}}{T_{Ax}} \tag{18.54}$$

şi deci vor putea fi determinate, în continuare, coordonatele punctului $A_1\,(x_{A_1}, y_{A_1})$ de intersecţie a suportului (Δ_1) al forţei $\bar{F}_1$, cu dreapta AA_1, aceste coordonate reprezentînd rădăcinile sistemului de ecuaţii

$$\begin{aligned} &x\cos\beta_1 + y\sin\beta_1 - b_1 = 0\,;\\ &y - \operatorname{tg}\gamma_{01}\cdot x = 0. \end{aligned} \tag{18.55}$$

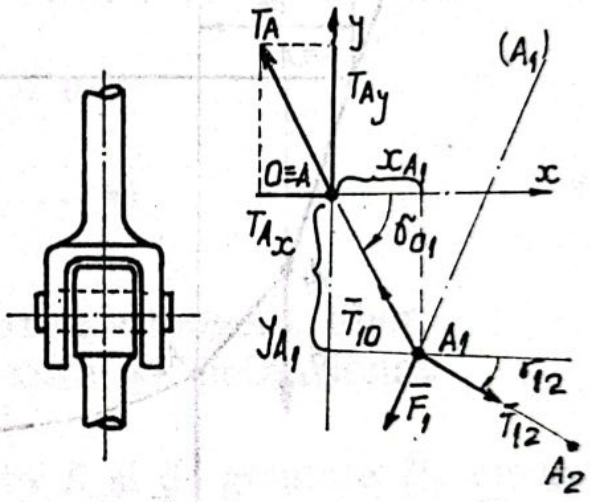


Fig. 18.7

Scriind apoi condiţia de echilibru pentru forţele ce acţionează în punctul A_1 — forţa $\bar{F}_1$ şi tensiunile $\bar{T}_{10}$ şi $\bar{T}_{12}$ — , se vor putea găsi proiecţiile pe cele două axe de coordonateale tensiunii $\bar{T}_{12}$ şi deci panta, dată de relaţia

$$\operatorname{tg}\gamma_{12} = \frac{T_{12y}}{T_{12x}}, \tag{18.56}$$

a porţiunii de fir A_1A_2; intersecţia suportului (Δ_2) a forţei F_2 cu dreapta trecînd prin punctul A_1 şi de pantă egală cu $\operatorname{tg}\gamma_{12}$, va permite să se determine, în continuare, poziţia punctului $A_2\,(x_{A_2}, y_{A_2})$, coordonatele acestui punct, x_{A_2} şi y_{A_2}, reprezentînd rădăcinile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} x\cos\beta_2 + y\sin\beta_2 - b_2 = 0\,;\\ y - y_{A_2} - \operatorname{tg}\gamma_{12}\,(x - x_{A_2}) = 0. \end{cases} \tag{18.57}$$

Repetînd metoda de lucru la punctele următoare, se va putea determina întreaga configurație a punctelor A_i, precum și tensiunile din aceste puncte.

Rezolvarea problemei se simplifică în mod apreciabil în cazul cînd forțele $\bar{F}_i$ sînt sarcini verticale, (fig. 18.8), ($F_{ix} = 0$); $F_{iy} = -P_i = -M_i g$; $i = 1, 2, \ldots, n$), cînd sistemele de ecuații (18.50) și (18.53) iau formele particulare:

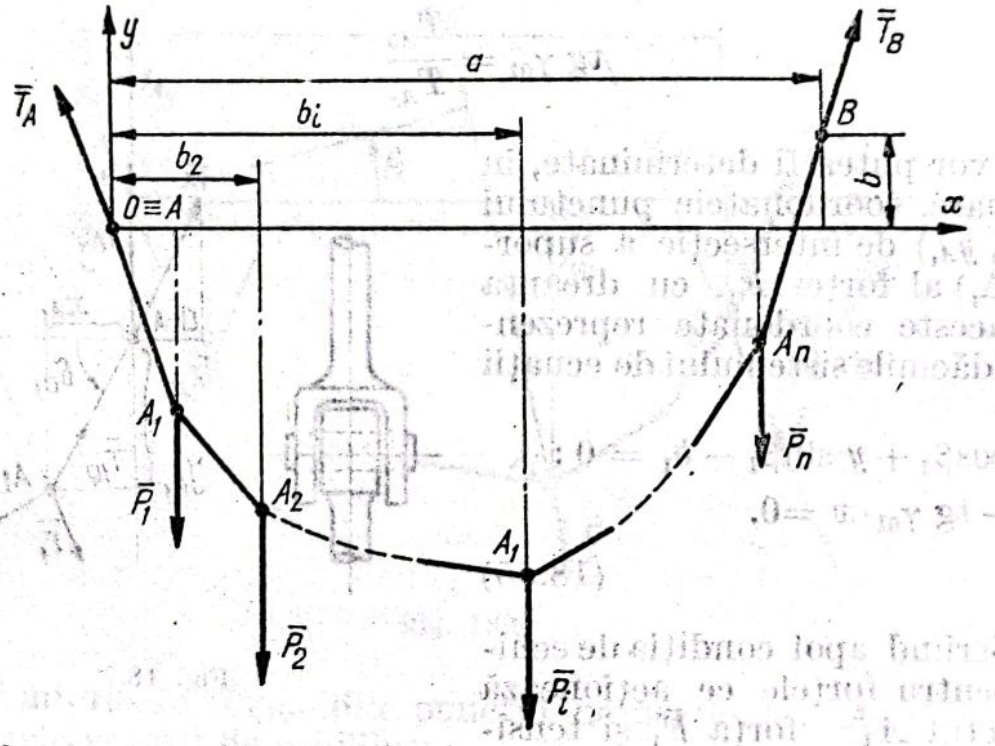


Fig. 18.8

$$T_{Ax} + T_{Bx} = 0;$$
$$T_{Ay} - \sum_{i=1}^{n} P_i + T_{By} = 0; \tag{18.58}$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_i P_i - b T_{Bx} + a T_{By} = 0,$$

respectiv

$$T_{A_x} + T_{j,j+1_x} = 0 ;$$

$$T_{A_y} - \sum_{i=1}^{j} P_i + T_{j,j+1_y} = 0 ; \tag{18.59}$$

$$- \sum_{i=1}^{j} b_i P_i - y_{Aj} T_{j,j+1_x} + x_{Aj} T_{i,i+1_y} = 0,$$

iar ecuaţiile suporturilor se reduc şi ele la ecuaţiile simplificate

$$x - b_i = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{18.60}$$

18.2.3. Echilibrul firului greu omogen liber, cu extremităţile fixate şi netensionat

Un fir, de lungime determinată L şi de greutate $\bar{P}$, omogen, este fixat în punctele sale extreme, B_1 şi B_2, (fig. 18.9)), a căror poziţie relativă este determinată prin distanţa

$$\overline{B_1 B_2'} = 2l \text{ (m)} \tag{18.61}$$

dintre verticalele ce trec prin cele două puncte şi prin diferenţa

$$h_0 = H_2 - H_1 \text{ (m)} \tag{18.62}$$

a înălţimilor lor în raport cu o anumită orizontală a locului.

Aşa cum arată experienţa, firul ia, în poziţia de echilibru, forma unei curbe prezentînd concavitatea în sus.

Se va demonstra mai întîi că această curbă este plană, ea fiind situată în planul vertical ce conţine punctele B_1 şi B_2.

Scanned with CamScanner

Într-adevăr, firul fiind liber, ($\lambda = 0$), iar forţa activă specifică fiind greutatea specifică

$$\bar{p} = \frac{\bar{P}}{L} = \frac{M}{L}\,\bar{g}, \tag{18.63}$$

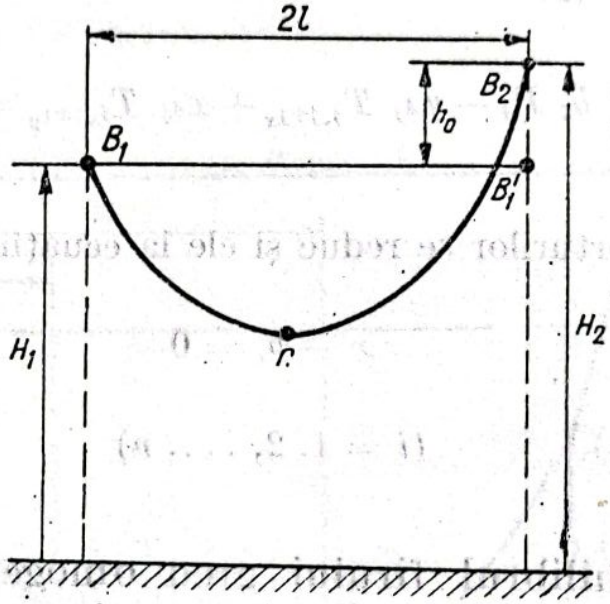


Fig. 18.9

ecuaţia vectorială a staticii firelor libere va lua forma

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + \frac{M}{L}\,\bar{g} = 0, \tag{18.64}$$

ea conducînd, prin integrare, la relaţia

$$\int_{\bar{T}^\circ = T^\circ\bar{\tau}^\circ}^{\bar{T} = T\bar{\tau}} d\bar{T} = -\frac{M}{L}\,g\int_0^s ds,$$

sau încă, efectuînd calculele, la relaţia

$$T\bar{\tau} - T^\circ\bar{\tau}^\circ = -\frac{N}{L}\,\bar{g}\,s, \tag{18.65}$$

limitele inferioare corespunzînd extremității B_1 a fiului, iar cele superioare unui punct curent B de pe fir.

Scriind ultima relație sub forma

$$\bar{\tau} = \frac{T^\circ}{T}\bar{\tau}^\circ - \frac{s}{T}\frac{M}{L}\bar{g} = \lambda^*\bar{g} + \mu\bar{\tau}^\circ, \tag{1866.}$$

se observă imediat că ea exprimă condiția de coplanaritate a versorului $\bar{\tau}$ — deci a tangentei într-un punct curent la curba de echilibru — cu vectorii constanți $\bar{g}$ și $\bar{\tau}^\circ$, suportul primului fiind o verticală; rezultă de aici că versorul $\bar{\tau}$ — și deci și curba după care se așează, la echilibru, firul — va rămîne mereu în același plan vertical, ce conține punctul B_1 și, evident, și cealaltă extremitate, B_2, a firului.

Odată stabilit acest lucru, se va alege un sistem de referință cartezian plan Oxy, cu axa Oy orientată pe verticală și în sus și trecînd prin punctul C, cel mai coborît, al curbei, (fig. 18.10). Poziția originii O pe această axă va fi fixată ulterior, precizîndu-se acum doar faptul că axa Ox este orizontala din planul vertical ce conține cele două puncte de fixate a firului, corespunzătoare originii O.

În modul acesta, va rezulta următoarea expresie analitică pentru forța activă specifică

$$\bar{p} = -\frac{M}{L}g\bar{j} = -p\bar{j}, \tag{18.67}$$

în baza căreia ecuația vectorială de echilibru

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + \bar{p} = 0 \tag{18.68}$$

va avea următoarele ecuații de proiecții pe axele reperului ales :

$$\frac{dT_x}{ds} = 0\,; \quad \frac{dT_y}{ds} = p. \tag{18.68}$$

Din prima dintre aceste ecuații diferențiale rezultă imediat, prin integrare, relația

$$T_x = T_x^\circ, \tag{18.70}$$

T_x° fiind o constantă de integrare.

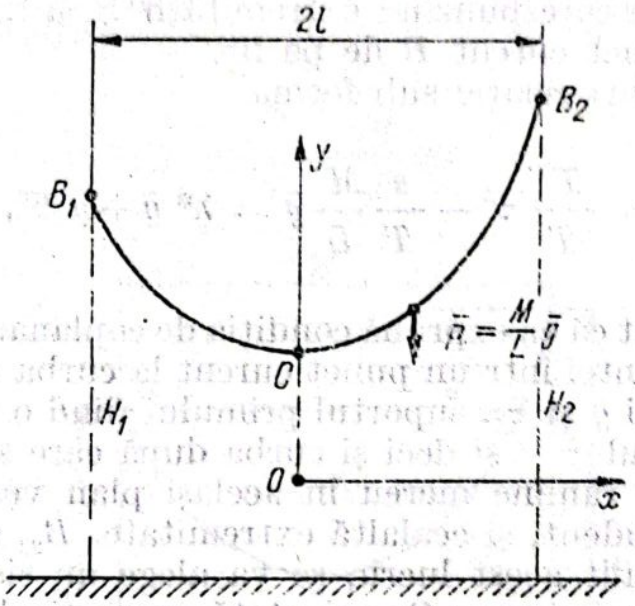


Fig. 18.10

Pe de altă parte, tensiunea T fiind tangentă la curbă, se poate scrie relația

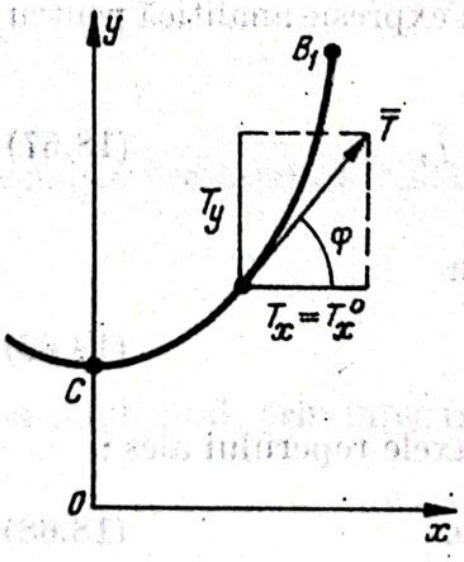


Fig. 18.11

$$T_y = T_x \operatorname{tg}\varphi = T_x^\circ \frac{dy}{dx} = T_x^\circ y', \quad (18.71)$$

φ fiind unghiul format cu axa Ox de tangenta, în punctul considerat, la curba după care se așează firul, (fig. 18.11), iar y' reprezentînd derivata lui y în raport cu x.

Introducînd această valoare a lui T_y în cea de-a doua dintre ecuațiile (18.69), aceasta va lua forma

$$T_x^\circ \frac{dy'}{ds} = p, \quad (18.72)$$

rezultînd de aici

$$dy' = \frac{p}{T_x^\circ} ds = \frac{p}{T_x^\circ} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{p}{T_x^\circ} dx \sqrt{1 + y'^2}; \quad (18.83)$$

Introducînd notația

$$\frac{p}{T_x^\circ} = \frac{1}{a} \tag{18.74}$$

și separînd varabilele x și y', ecuația (18.73) capătă forma

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a}, \tag{18.75}$$

obținîndu-se din ea, prin integrare, relația

$$ln\,(y' + \sqrt{1+y'^2}) = \frac{x}{a} + C_1. \tag{18.76}$$

Din modul de alegere a axei Oy — trece prin punctul C, cel mai coborît, al curbei — , rezultă condițiile inițiale

$$x_C = 0\,; \quad y'\,(x_C) = \left(\frac{dy'}{dx}\right)_{x=x_C} = (\mathrm{tg}\varphi)_{x=x_C} = 0, \tag{18.77}$$

care, introduse în ecuația (18.76), dau următoarea valoare pentru constanta de integrare C_1 :

$$C_1 = 0. \tag{18.78}$$

În consecință, ecuația (18.76) va putea fi scrisă acum sub forma exponențială determinată

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x}{a}} \tag{18.79}$$

Izolînd, în continuare, radicalul, ridicînd relația la pătrat și reducînd termenii asemenea, se poate scoate expresia lui y' :

$$y' = \frac{e^{2\frac{x}{a}} - 1}{2e^{\frac{x}{a}}} = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} = sh\left(\frac{x}{a}\right). \tag{18.30}$$

Ținînd apoi seama de semnificația lui y', $\left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$, separînd variabilele, adică scriind

$$dy = sh\left(\frac{x}{a}\right) dx \tag{18.81}$$

și integrînd din nou, se ajunge la ecuația

$$y = a\,ch\left(\frac{x}{a}\right) + C_2, \tag{18.82}$$

C_2 fiind o nouă constantă de integrare, care va putea fi făcută egală cu zero prin alegerea convenabilă a originii O pe axa Oy; într-adevăr, dacă se alege originea O sub punctul C, la distanța

$$\overline{OC} = a \quad (m) \tag{18.83}$$

de acest punct, rezultă condițiile

$$x_C = 1; \quad y(x_C) = a, \tag{18.84}$$

care, introduse în ecuația (18.82), conduc la valoarea

$$C_2 = 0 \tag{18.85}$$

În consecință, ecuația curbei de echilibru a firului greu omogen va lua acum forma determinată

$$\boxed{y = a\,ch\left(\frac{x}{a}\right)}, \tag{18.86}$$

curba reprezentată prin această ecuație fiind numită în matematici, tocmai din acest motiv, „lănțișorul".

Pentru ca ecuația (18.86) să fie complet determinată, mai trebuie găsită valoarea constantei a — această constantă purtînd

numele de *parametrul lănțișorului* — , respectiv, valoarea constantei de integrare

$$T_y^\circ = p\,a. \tag{18.87}$$

Odată cu a, rezultă că sînt necunoscute și coordonatele punctelor de fixare a firului, $B_1\,(-l\ ;\ h_1)$ și $B_2\,(l_2, h_2)$ (fig. 18.12).

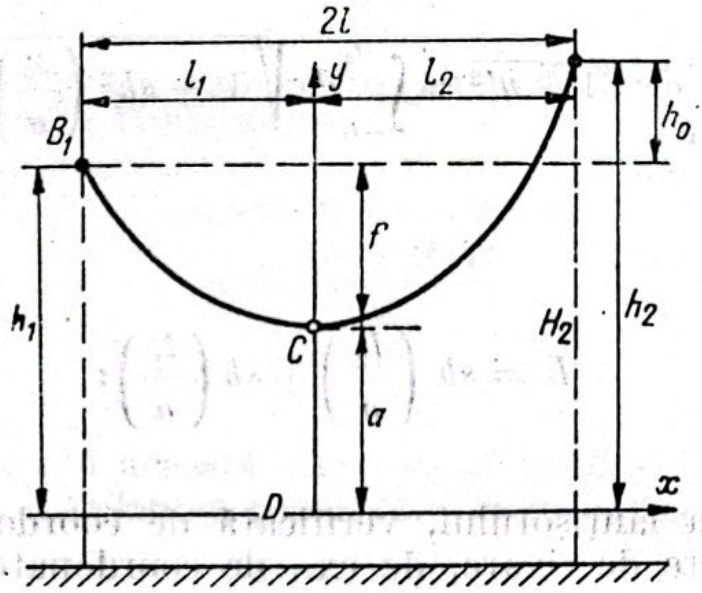


Fig. 18.12

Într-adevăr, despre sistemul de axe carteziene, în raport cu care a fost stabilită ecuația curbei de echilibru al firului s-a precizat doar faptul că axa Oy este verticală și trece prin poziția cea mai coborîtă, C, a firului, ceea ce înseamnă că nu sînt cunoscute direct, — ele urmînd să fie determinate din calcule — atît distanțele punctelor B_1 și B_2 la axa Oy, notate cu l_1 și l_2, cît și distanțele h_1 și h_2 ale acestor puncte la axa Ox, aceste din urmă distanțe necoincizînd, prin fixarea condiționată a originii O, cu înălțimile H_1 și H_2 ale punctelor respective în raport cu orizontala de referință aleasă inițial. (fig. 18.11).

Se va arăta, în continuare, că toate aceste mărimi necunoscute, a, l_1, l_2, h_1 și h_2, vor putea fi determinate în funcție de mărimile L, $2l$ și h_0, considerate date, precum și în funcție de distanța f a punctului C la orizontala ce trece prin extremitatea B_1 a firului, distanță purtînd numele de *săgeată a firului în raport cu extremitatea* B_1 și care, în aplicațile tehnice, poate fi măsurată prin diverse metode.

Scanned with CamScanner

Într-adevăr, în afara relațiilor evidente

$$l_1 + l_2 = 2l\,;\ h_1 = a + f\,;\ h_2 = a + f + h_0, \tag{18.88}$$

mai pot fi scrise următoarele două ecuații care, împreună cu cele trei precedente, vor permite determinarea celor cinci mărimi necunoscute :

— Relația exprimînd lungimea totală a firului, adică

$$L = \int_{(\Gamma_{B_1 B_2})} ds = \int_{-l_1}^{l_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = \int_{-l_1}^{l_2} dx \sqrt{1 + sh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = a\, sh\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{-l_1}^{l_2},$$

sau încă

$$L = sh\left(\frac{l_2}{a}\right) + sh\left(\frac{l_1}{a}\right); \tag{18.89}$$

— Ecuația lănțișorului, verificată de coordonatele unuia din cele două puncte de fixare, de ex., de coordonatele punctului B_2 :

$$a + f + h_0 = a\, ch\left(\frac{l_2}{a}\right). \tag{18.90}$$

Rezolvarea acestei probleme se simplifică în mod apreciabil în cazul — frecvent întîlnit, de altfel, în aplicații — cînd cele două puncte de fixare sînt situate pe aceeași orizontală, ($h_0 = 0$) și cînd, datorită simetriei, în aceste condițiuni, a curbei în raport cu axa Oy, rezultă

$$l_1 = l_2 = l \tag{18.91}$$

În această situație, relațiile (18.89) și (18.90) capătă formele particulare

$$\frac{L}{2} = a\, sh\left(\frac{l}{a}\right); \qquad a + f = a\, ch\left(\frac{l}{a}\right), \tag{18.92}$$

ele furnizînd, prin ridicarea la pătrat și scădere, precum și prin considerarea relației cunoscute

$$ch^2(\alpha) - sh^2(\alpha) = 1,$$

egalitatea

$$(a+f)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = a^2, \tag{18.93}$$

din care, după reducerea termenilor asemenea, se va putea scoate valoarea parametrului lănțișorului :

$$\boxed{a = \frac{L^2 - 4f^2}{8f}}. \tag{18.94}$$

Odată cunoscută această valoare, ca rezulta, în baza relațiilor (18.87) și (18.88), și valoarea constantei de integrare T_x° :

$$T_x^\circ = pa = p\,\frac{L^2 - 4f^2}{8f}, \tag{18.95}$$

precum și ordonata comună a celor două puncte de fixare :

$$h = h_1 = h_2 = a + f = p\,\frac{L^2 + 4f^2}{8f}. \tag{18.96}$$

Cu aceasta, se poate trece la rezolvarea celei de-a doua probleme a staticii firelor, adică la determinarea tensiunii într-un punct arbitrar al firului.

Avînd în vedere relațiile (18.71) și (18.80), se poate scrie

$$|\bar{T}| = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = T_x^\circ \sqrt{1 + y'^2} = T_x^\circ \sqrt{1 + sh^2\left(\frac{x}{a}\right)} = T_x^\circ\, ch\left(\frac{x}{a}\right),$$

sau încă, ţinînd seama şi de notaţia (18.74), mai rezultă

$$\boxed{|\bar{T}| = pa\,ch\left(\frac{x}{a}\right) = p\,y}, \tag{18.97}$$

ultima relaţie permiţînd să se tragă concluzia că mărimea tensiunii într-un punct arbitrar al firului este direct proporţională cu ordonata acelui punct în sistemul de axe carteziene în raport cu care a fost scrisă ecuaţia lănţişorului sub forma (18.86).

În consecinţă, ţinînd seama şi de expresia (18.96) a ordonatei h, comună punctelor B_1 şi B_2, rezultă următoarea valoare pentru mărimea tensiunii firului în cele două puncte de fixare:

$$\boxed{|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = p\frac{L^2+4f^2}{8f} = P\frac{L^2+4f^2}{8Lf}}, \tag{18.98}$$

$P = pL$ fiind modulul greutăţii totale a firului.

18.2.4. Echilibrul firului greu omogen liber, cu extremităţile fixate după tensionare puternică

În cazul firului greu omogen, fixat la extremităţi după o tensionare prealabilă foarte puternică, săgeata maximă a firului devine foarte mică în comparaţie cu sfertul distanţei dintre cele două puncte de fixare, considerate şi acum situate pe aceeaşi orizontală, adică se poate scrie condiţia

$$\frac{f}{l} << \frac{1}{2}, \tag{18.99}$$

care permite să se accepte aproximarea

$$L \approx 2l, \tag{18.100}$$

asemenea situații, în care lungimea firului devine, practic, egală cu distanța dintre punctele de fixare, putînd fi întîlnite la cablurile aeriene telefonice, la conductorii aerieni pentru transportul energiei electrice etc.

Ultima relație conduce la următoarea expresie pentru constanta a:

$$a = \frac{L^2 - 4f^2}{8f} = \frac{4l^2 - 4f^2}{8f} = \frac{l^2}{2f}\left(1 - \frac{f^2}{l^2}\right), \tag{18.101}$$

care, în baza condiției (18.99), mai poate fi aproximată cu valoarea

$$\boxed{a \approx \frac{l^2}{2f}}, \tag{18.102}$$

rezultînd astfel și pentru constanta de integrare T_x° valoarea aproximativă

$$T_v^\circ = pa = \frac{pl^2}{2f} = \frac{Pl}{4f}. \tag{18.103}$$

Întrucît este evidentă și condiția

$$\frac{|x|}{l} \leqslant 1, \tag{18.104}$$

va rezulta și pentru raportul $\frac{|x|}{a}$, cu a dat de relația (18.102) și cu raportul $\frac{f}{l}$ satisfăcînd condiția (18.99), inegalitatea

$$\frac{|x|}{a} = \frac{|x|}{\frac{l^2}{2f}} = 2\frac{f}{l^2}|x| = 2 \cdot \frac{f}{l} \cdot \frac{|x|}{l} < 1, \tag{18.105}$$

în baza căreia, în dezvoltările în serie a lui $e^{\pm\frac{x}{a}}$ din ecuația lănțișorului adică

$$y = a\,ch\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2}\,a\,(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = \frac{1}{2}\,a\left\{\left[1 + \frac{x}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + ..\right] + \right.$$

$$\left. + \left[1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \ldots\right]\right\},$$

vor putea fi neglijați termenii conținînd raportul $\frac{x}{a}$ la puteri superioare puterii a doua.

Ecuația curbei de echilibru a firului va lua deci, în aceste condițiuni, forma

$$\boxed{y = a + \frac{1}{2a}\,x^2 = \frac{l^2}{2f} + \frac{f}{l^2}\,x^2}, \qquad (18.106)$$

reprezentînd, de astă dată, o parabolă de parametru $2a$, avînd axa Oy ca axă de simetrie și prezentînd concavitatea în sus.

Întrucît derivata $y = \frac{dy}{dx}$ va avea acum expresia

$$y' = \frac{x}{a} = \frac{2f}{l^2}\,x, \qquad (18.107)$$

rezultă următoarea valoare pentru mărimea tensiunii într-un punct arbitrar al firului, de abscisă x:

$$|\bar{T}| = T_x\sqrt{1 + y'^2} = pa\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

sau încă, înlocuind pe a:

$$\boxed{|\bar{T}| = \frac{pl^2}{2f}\sqrt{1 + 4\,\frac{f^2}{l^4}\,x^2}}. \qquad (18.108)$$

Scanned with CamScanner

În punctele de fixare B_1 și B_2, $(x = \pm l)$, tensiunea ca avea valoarea

$$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = \frac{pl^2}{2f}\sqrt{1+4\frac{f^2}{l^2}}, \tag{18.109}$$

practic, putîndu-se considera .nsă, în baza condiției (18.99), valoarea aproximativă

$$\boxed{|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| \approx \frac{pl^2}{2f} = \frac{Pl}{4f}}, \tag{18.110}$$

care putea fi obținută și direct din relația (18.98), ținîndu-se seama de condițiile (18.99) și (18.100).

18.2.5. Echilibrul firelor înfășurate pe discuri circulare

Un fir, tensionat la extremități, este înfășurat pe o porțiune AB a suprafeței periferice, în formă de jgheab cu secțiunea în V cu unghiul de deschidere de 2α, a unui disc circular de rază $R\,(m)$, razele corespunzătoare punctelor extreme de contact, A și B, închizînd între ele un unghi la centru θ, numit *unghi de înfășurare*, (fig. 18.13, a) și b).

Axa firului înfășurat are deci forma unui arc de cerc (Γ), situat în planul (Π_s) de simetrie transversală a discului, (fig. 18.13, b), firul rezemîndu-se în această porțiune pe două suprafețe tronconice circulare coaxiale, dispuse simetric în raport cu planul (Π) și ale căror normale exterioare, într-un punct oarecare al cercului (Γ), formează cu normala principală a acestui cerc unghiuri egale cu $\pm\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$. (fig. 18.13, b).

Considerînd și acum un element de fir de lungime egală cu ds, determinat în raport cu primul punct de contact, A, prin unghiul la centru ϑ și subîntinzînd, la rîndul său, un unghi la centru egal cu $d\vartheta$ (fig. 18.13, a) și ținînd seama de faptul că în această situație apăsarea firului pe disc nu se realizează prin forțe exterioare — nici

măcar prin greutatea sa, care este total neglijabilă — , ci numai prin forțele de tensionare din extremitățile A și B ale firului, rezultă că echilibrul elementului de fir considerat va fi obținut în următoarele condiții :

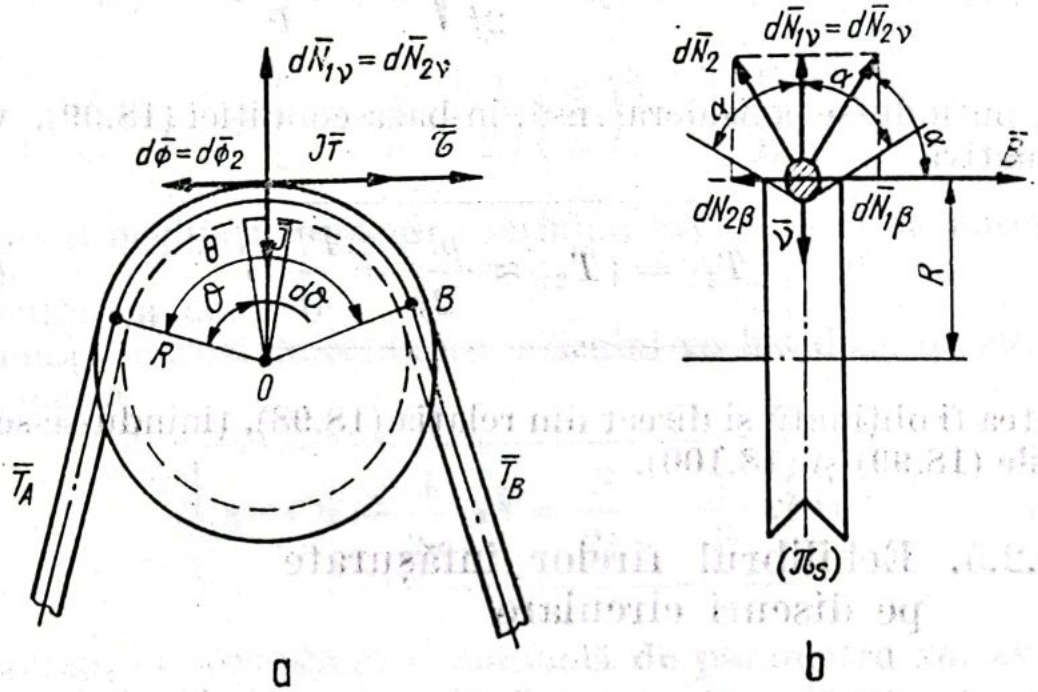


Fig. 18.13

— Forță elementară exterioară activă egală cu zero, adică

$$d\bar{\mathscr{F}}_a \equiv 0. \tag{18.111}$$

— Forță elementară exterioară pasivă redusă numai la reacțiunea rezultantă a reazemului dublu, adică

$$d\bar{R} = d\bar{R}_1 + d\bar{R}_2 = (d\bar{N}_1 + d\bar{\Phi}_1) + (d\bar{R}_2 + d\bar{\Phi}_2), \tag{18.112}$$

cu următoarele expresii vectoriale, în raport cu triedrul lui Frenet atașat cercului (Γ), (fig. 18.13, a și b), ale componentelor $d\bar{R}_1$ și $d\bar{R}_2$:

$$\begin{aligned} d\bar{R}_1 &= -|d\bar{N}_1| \sin\alpha\, \bar{\nu} - |d\bar{\Phi}_1|\bar{\tau} + |d\bar{N}_1| \cos\alpha \cdot \bar{\beta}\,; \\ d\bar{R}_2 &= -|d\bar{N}_2| \sin\alpha\, \bar{\nu} - |d\bar{\Phi}_2|\bar{\tau} - |d\bar{N}_2| \cos\alpha \cdot \bar{\beta}, \end{aligned} \tag{18.113}$$

expresiile forțelor de frecare fiind stabilite în ipoteza că tendința de alunecare a firului este de la punctul A spre punctul B.

Avînd, în vedere, pe de o parte, valabilitatea legii de frecare a lui Amonton-Coulomb, care permite să se scrie relațiile

$$|d\bar{\Phi}_1| = \mu_1 |d\bar{N}_1|; \qquad |d\bar{\Phi}_2| = \mu_2 |d\bar{N}_2|, \tag{18.114}$$

precum și faptul că în condițiile evidente de simetrie față de planul (Π_s) atît a suprafețelor de sprijin, cît și în plasarea firului, sînt valabile condițiile

$$|d\bar{N}_1| = |d\bar{N}_2| = |d\bar{N}|; \qquad \mu_1 = \mu_2 = \mu, \tag{18.115}$$

mai rezultă următoarea expresie finală pentru reacțiunea totală $d\bar{R}$ a reazemului dublu :

$$d\bar{\mathscr{F}}_p = d\bar{R} = -2|d\bar{N}| \sin\alpha \cdot \bar{\nu} - 2\mu |d\bar{N}|\bar{\tau}. \tag{18.116}$$

— Forța elementară interioară rezultantă, dată de relația

$$d\bar{\mathscr{F}}_{int} = d\,\bar{T} = d\,(T\bar{\tau}) = dT\bar{\tau} + Td\bar{\tau} = dT\,\bar{\tau} + T\,\frac{d\bar{\tau}}{ds}\,ds =$$

$$= dT\bar{\tau} + \frac{T}{\rho_c}\,ds\bar{\nu}, \tag{18.117}$$

cu

$$\rho_c = R \qquad \text{și} \qquad ds = R\,ds. \tag{18.118}$$

În consecință, ecuația de echilibru a elementului menționat de fir va avea forma

$$dT\,\bar{\tau} + \frac{T}{R}\,\bar{\nu}\,ds - 2\,|d\bar{N}|\sin\alpha \cdot \bar{\nu} - 2\mu\,|d\bar{N}|\bar{\tau} = 0,$$

sau încă, împărțind prin $ds = R\,d\vartheta$, mai rezultă

$$\frac{dT}{dR\vartheta}\bar{\tau} + \frac{T}{R}\bar{\nu} - 2\frac{|d\bar{N}|}{ds}\sin\alpha\cdot\bar{\nu} - 2\mu\frac{|d\bar{N}|}{ds}\bar{\tau} = 0, \tag{18.119}$$

cu următoarele ecuații de proiecții pe axele intrinseci atașate cercului (Γ):

$$\frac{dT}{Rd\vartheta} - 2\mu\frac{|d\bar{N}|}{ds} = 0\,; \quad \frac{T}{R} - 2\frac{|d\bar{N}|}{ds}\sin\alpha = 0\cdot \tag{18.120}$$

Eliminarea lui $\frac{|d\bar{N}|}{ds}$ între aceste două ecuații conduce la ecuația diferențială

$$\frac{dT}{d\vartheta} - \frac{\mu}{\sin\alpha}T = 0,$$

sau încă

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu}{\sin\alpha}d\vartheta. \tag{18.121}$$

Integrînd, între limitele 0 și θ pentru variabila ϑ și între limitele T_A și T_B pentru mărimea tensiunii $\bar{T}$, se obține relația

$$ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = \frac{\mu\theta}{\sin\alpha},$$

sau încă

$$\boxed{\frac{T_B}{T_A} = e^{\frac{\mu\theta}{\sin\alpha}}}. \tag{18.122}$$

Dacă tendința de alunecare a firului ar fi fost de la punctul B spre punctul A, adică forțele de frecare $d\overline{\Phi}_1$ și $d\overline{\Phi}_2$ ar fi fost de sensuri contrarii celor stabilite în fig. 18.12 a, atunci ar fi rezultat relația

$$\frac{T_A}{T_B} = e^{\frac{\mu\theta}{\sin\alpha}},$$

sau

$$\frac{T_B}{T_A} = e^{-\frac{\mu\theta}{\sin\alpha}}. \tag{18.123}$$

Este evident că în cazul cînd modulul tensiunii $\overline{T}_B$ va fi mai mare decît valoarea dată de relația (18.122), sau mai mic decît valoarea rezultînd din relația (18.123), firul va aluneca fie într-o parte, fie în cealaltă. Pentru a-i asigura echilibrul, deci pentru a evita orice alunecare a sa pe suprafața periferică a discului, tensiunea $\overline{T}_B$ nu vă trebui să depășească cele două valori limită menționate, ceea ce înseamnă că raportul $\frac{T_B}{T_A}$ vă trebui să fie cuprins în intervalul

$$\boxed{e^{-\frac{\mu\theta}{\sin\alpha}} \leqslant \frac{T_B}{T_A} \leqslant e^{\frac{\mu\theta}{\sin\alpha}}} \tag{18.124}$$

În condițiile

$$\alpha = \frac{\pi}{2}\,(rad), \tag{18.125}$$

adică atunci cînd suprafața periferică a discului, pe care se sprijină firul, devine cilindrică circulară, relația (18.122) ia forma

$$\boxed{\frac{T_B}{T_A} = e^{\mu\theta}} \tag{18.126}$$

— fiind cunoscută în literatura de specialitate sub numele de *formula lui Euler* — , iar condiția (18.124) ia și ea forma

$$\boxed{e^{-\mu\theta} \leqslant \frac{T_B}{T_A} \leqslant e^{\mu\theta}}. \tag{18.127}$$

§19. Mecanica ciocnirilor

Se numesc *ciocniri*, sau *șocuri*, fenomenele mecanice caracterizate prin variații brusce — variații finite și practic instantanee — ale torsorilor impulsurilor ce alcătuiesc un sistem mecanic.

Asemenea fenomene apar atunci cînd elementele unui sistem mecanic se lovesc, într-un interval de timp τ, de ordinul zecilor de miimi de secundă, numit *durata ciocnirii*, fie de obstacole exterioare sistemului — ciocnirile numindu-se în acest caz *exterioare* — , fie între ele, în această ultimă situație ciocnirile numindu-se *interioare*.

19.1. *Ecuațiile mecanicii ciocnirilor*

19.1.1. Noțiuni fundamentale în mecanica ciocnirilor

Considerînd un rigid (S_i) al unui sistem mecanic, ale cărui elemente se cionesc în intervalul de timp $\tau \approx 0$ și scriind pentru el relațiile exprimînd teoremele torsorilor impulsurilor sub forma cunoscută din dinamica sistemelor de rigide, adică luînd în considerație numai solicitările exterioare și interioare întîlnite obișnuit în aplicațiile practice, caracterizate, toate, prin valori finite ale modulilor lor, rezultă ecuațiile

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i = \bar{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}} + \bar{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}} + \bar{\mathscr{F}}_{int_{a_i}} + \bar{\mathscr{F}}_{int_{p_i}} = \bar{\mathscr{F}}_{ext_i} + \bar{\mathscr{F}}_{int_i}\ ; \\
&\dot{\bar{\mathscr{K}}}_i = \bar{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}} + \bar{\mathfrak{M}}_{ext_{p_i}} + \bar{\mathfrak{M}}_{int_{a_i}} + \bar{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}} = \bar{\mathfrak{M}}_{ext_i} + \bar{\mathfrak{M}}_{int_i}, \qquad (19.1) \\
&(i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

care, integrate pe durata ciocnirii, conduc, după folosirea și a teoremei mediei, la egalitaăţile

$$\begin{cases} \bar{\mathcal{H}}_i - \bar{\mathcal{H}}_i^0 = \int_0^\tau (\bar{\mathcal{F}}_{ext_i} + \bar{\mathcal{F}}_{int_i})\, dt = (\bar{\mathcal{F}}_{ext_i} + \bar{\mathcal{F}}_{int_i})_m\, \tau ; \\ \bar{\mathcal{K}}_i - \bar{\mathcal{K}}_i^0 = \int_0^\tau (\bar{\mathfrak{M}}_{ext_i} + \bar{\mathfrak{M}}_{int_i})\, dt = (\bar{\mathfrak{M}}_{ext_i} + \bar{\mathfrak{M}}_{int_i})_m\, \tau \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{cases} \tag{19.2}$$

în care $\bar{\mathcal{H}}_i^0$ și $\bar{\mathcal{K}}_i^0$ sînt componentele torsorului rezultant în polul fix O, comun tuturor elementelor sistemului mecanic, al impulsurilor elementului (S_i) în momentul care precede ciocnirea, $\bar{\mathcal{H}}_i$ și $\bar{\mathcal{K}}_i$ sînt componentele aceluiași torsor în momentul final al ciocnirii, iar $(\bar{\mathcal{F}}_{ext_i} + \bar{\mathcal{F}}_{int_i})_m$ și $(\bar{\mathfrak{M}}_{ext_i} + \bar{\mathfrak{M}}_{int_i})_m$ sînt valori intermediare în intervalul de timp τ cît durează ciocnirea ale componentelor torsorului rezultant în polul fix al tuturor solicitărilor exterioare și interioare la care este supus elementul (S_i), valori ale căror moduli sînt, evident, tot finiţi.

Aceste din urmă relații scot în evidenţă totala neconcordanţă dintre descrierea matematică a fenomenelor de cionciri efectuată după schema obișnuită a dinamicii sistemelor de rigide și dintre concluziile cercetărilor experimentale efectuate sasupra acestei categorii de procese mecanice.

Într-adevăr, pe de o parte, experienţa a dovedit că modulii termenilor din membrul stîng al [3]elaţiilor (19.2) adică termenii

$$|\bar{\mathcal{H}}_i - \bar{\mathcal{H}}_i^0| = M_i |(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_i}^0)| ;$$

$$|\bar{\mathcal{K}}_i - \bar{\mathcal{K}}_i^0| = |M_i(\bar{r}_{G_i} \times \bar{v}_{G_i} - \bar{r}_{G_i}^0 \times \bar{v}_{G_i}^0) + (\bar{\mathcal{K}}_{G_i} - \bar{\mathcal{K}}_{G_i}^0)|,$$

sînt mărimi finite, (de ex., modulul variaţiei $(\bar{v}_G - \bar{v}_G^0)$ a vitezei centrului de masă al unei sfere elastice în timpul ciocnirii ei de un perete, (fig. 19.1), are același ordin de mărime ca și al modulilor vitezelor $\bar{v}_G$ și $\bar{v}_G^0$, iar modulul variaţiei $(\bar{\omega} - \bar{\omega}^0)$ a vitezei unghiulare a unei bare cu articulaţie fixă, lovită de o sferă, (fig. 19.1, b), are același

ordin de mărime ca și al modulilor vitezelor unghiulare $\bar{\omega}$ și $\bar{\omega}^0$); pe de altă parte, datorită valorii foarte mici a duratei de ciocnire, practic egală cu zero, ($\tau \approx 0$), membrul drept al relațiilor (19.2) capătă vă-

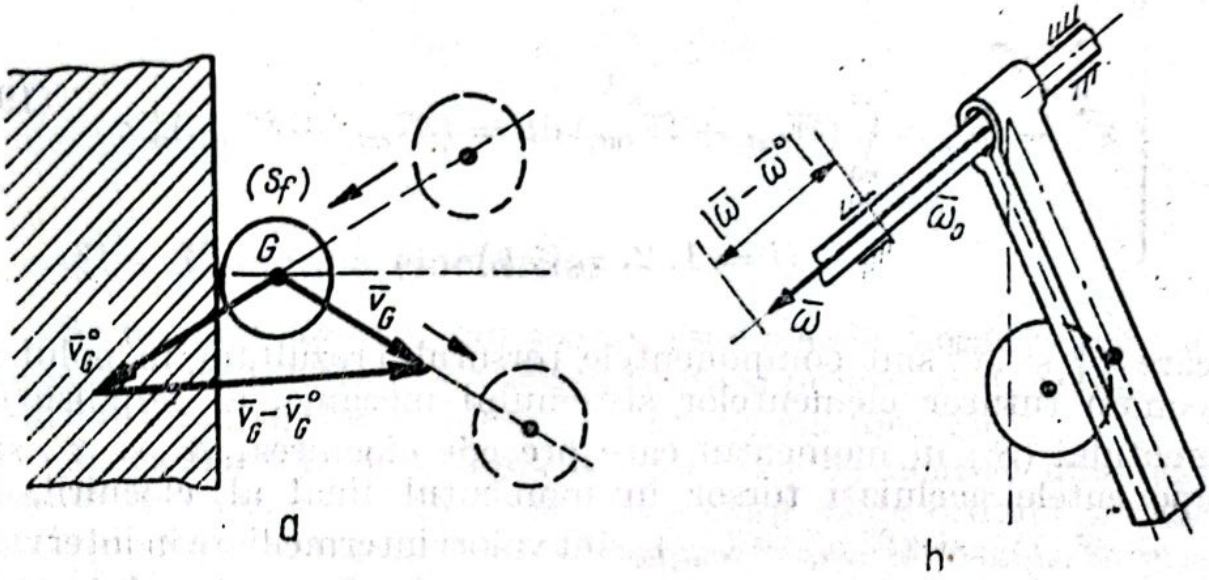


Fig. 19.1

lori apropiate de valoarea zero, ceea ce înseamnă că egalitățile respective nu sînt respectate.

Această neconcordanță a permis să se tragă concluzia că, în cazul ciocnirilor, relațiile (19.1) se modifică, în sensul că pe lîngă termenii corespunzători solicitărilor obișnuite — cu modulii finiți — la care sînt supuse rigidele respective, mai apar, în timpul ciocnirii, și termeni corespunzători unor solicitări care nu acționează decît în intervalul de timp τ cît durează ciocnirea și care au modulii foarte mari în comparație cu modulii solicitărilor obișnuite, numai astfel putînd fi justificate variațiile finite, și practic instantanee, ale componentelor torsorilor impulsurilor elementelor sistemului meèanic și deci valabilitatea unor relații de forma (19.2).

Și, într-adevăr, experiența a confirmat această ipoteză, punînd în evidență existența unor distribuții de forțe elementare diferite de cele obișnuite, întîlnite pînă acum în dinamica rigidelor și a sistemelor de rigide, forțe de natură elastică, de intensități enorme, acționînd numai pe durata ciocnirii, atît în zonele în care au loc ciocnirile exterioare, cît și în zonele în care sînt aplicate toate legăturile, active și pasive, exterioare și interioare, impuse elementelor sistemului mecanic.

Scanned with CamScanner

Aceste distribuţii de forţe au primit denumirea de *forţe de percuţie* sau *forţe percutante* şi anume :

— *forţe percutante exterioare active*, numite mai simplu *forţe percutante exterioare*, atunci cînd apar în zonele de ciocniri exterioare situate în jurul *punctelor teoretice de ciocnire exterioară*, adică în jurul acelor puncte în care, în ipoteza perfectei rigidităţi a suprafeţelor rigidelor sistemului mecanic, se poate considera că s-a produs contactul exterior în care s-a transmis şocul ;

— *forţe percutante exterioare pasive*, numite mai simplu *reacţiuni percutante*, atunci cînd apar în zonele din imediata vecinătate a punctelor teoretice de legătură a elementelor sistemului mecanic cu corpuri din mediul înconjurător ;

— *forţe percutante interioare*, atunci cînd apar în zonele de legături interioare, active şi pasive, dintre elementele sistemului mecanic, distribuţiile lor în fiecare pereche de elemente în interacţiune percutantă respectînd principiul acţiunii şi reacţiunii.

Datorită faptului că zonele în care apar asemenea distribuţii de forţe percutante sînt relativ mici, în practică se acceptă curent ipoteza — confirmată şi de date experimentale — că în fiecare element al sistemului mecanic aceste distribuţii corespund unor rezultate unice, acţionînd în punctele teoretice de ciocnire în cazul forţelor percutante exterioare, în punctele teoretice de legătură cu exteriorul în cazul reacţiunilor percutante şi în punctele teoretice de legătură interioară în cazul forţelor percutante interioare. Această înseamnă însă, că pentru fiecare din aceste distribuţii de forţe percutante este valabilă teorema lui Varignon, adică momentul rezultant în raport cu polul fix, comun tuturor elementelor sistemului mecanic, al unei asemenea distribuţii de forţe percutante va fi egal cu momentul, în raport cu acelaşi pol fix, al rezultantei unice cu care se consideră echivalentă distribuţia respectivă de forţe percutante.

În consecinţă, dacă $\bar{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}}$ este rezultanta forţelor percutante exterioare din zona $(A_{i\lambda})$ a ariei A_i care limitează elementul (S_i) — rezultantă acţionînd în punctul teoretic de ciocnire $B_{i\lambda}$, situat în interiorul zonei amintite şi determinat în raport cu polul fix O prin vectorul de poziţie $\bar{r}_{B_{i\lambda}}$ —, atunci se va putea scrie

$$\mathfrak{M}(\bar{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}}) = \mathcal{M}(\bar{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}}) = \bar{r}_{B_{i\lambda}} \times \bar{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}}. \tag{19.3}$$

Dacă în elementul (S_i) există un număr de l_i asemenea zone de ciocnire exterioară $(A_{i\lambda})$, $(\lambda = 1, 2, \ldots, l_i)$, atunci toate aceste forțe rezultante de percuții exterioare se vor reduce, în polul fix O, la un *torsor al forțelor percutante exterioare* ce acționează asupra elementului (S_i), având componentele stabilite prin relațiile de mai jos :

$$\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{F}}_{pc_{ext_i}}) = \begin{cases} \overline{\mathcal{F}}_{pc_{ext_i}} = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \overline{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{pc_{ext_i}} = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \overline{\mathcal{M}}(\overline{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}}) = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \bar{r}_{B_{i\lambda}} \times \overline{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}} \end{cases} \tag{19.4}$$

De asemenea, dacă $\overline{R}_{pc_{i\mu}}$ este reacțiunea rezultantă percutantă din zona de legătură $(A_{i\mu})$ a suprafeței care limitează elementul (S_i), acționînd în punctul teoretic de legătură exterioară $C_{i\mu}$, situat în interiorul acestei zone și determinat în raport cu polul fix O prin vectorul de poziție $\bar{r}_{C_{i\mu}}$, se va scrie

$$\overline{\mathfrak{M}}(\overline{R}_{pc_{i\mu}}) = \overline{\mathcal{M}}(\overline{R}_{pc_{i\mu}}) = \bar{r}_{C_{i\mu}} \times \overline{R}_{pc_{i\mu}}. \tag{19.5}$$

Dacă elementul (S_i) este supus la m_i legături exterioare, toate reacțiunile percutante rezultante corespunzătoare acestor legături se vor reduce în polul fix O la un *torsor al reacțiunilor percutante* acționînd asupra elementului (S_i), de componente

$$\overline{\mathcal{F}}(\overline{\mathcal{R}}_{pc_i}) = \begin{cases} \overline{\mathcal{R}}_{pc_i} = \sum_{\mu=1}^{m_i} \overline{R}_{pc_{i\mu}} \\ \overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{R}}_{pc_i}) = \sum_{\mu=1}^{m_i} \overline{\mathcal{M}}(\overline{R}_{pc_{i\mu}}) = \sum_{\mu=1}^{m_i} \bar{r}_{C_{i\mu}} \times \overline{R}_{pc_{i\mu}} \end{cases} \tag{19.6}$$

În fine, dacă $\overline{F}_{pc_{int_{ij}}}$ este forța percutantă interioară rezultantă din zona de legătură interioară (A_{ij}) dintre elementul (S_i) și elementul (S_j) al sistemului mecanic, rezultantă acționînd în punctul teoretic de legătură interioară D_{ij}, determinat în raport cu polul

Scanned with CamScanner

fix O prin vectorul de poziție $\bar{r}_{D_{ij}}$, atunci se va putea srcie

$$\overline{\mathfrak{M}}(\overline{F}_{pc_{int_{ij}}}) = \overline{\mathcal{M}}(\overline{F}_{pc_{int_{ij}}}) = \bar{r}_{D_{ij}} \times \overline{F}_{pc_{int_{ij}}}. \tag{19.7}$$

În cazul cînd elementul (S_i) are legături interioare cu un număr oarecare de elemente (S_j) ale sistemului mecanic, atunci toate forțele percutante interioare rezultante ce acționează asupra elementului (S_i) se vor reduce în polul fix O la un *torsor al forțelor percutante interioare*, avînd componentele

$$\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{F}}_{pc_{int_i}}) = \begin{cases} \overline{\mathcal{F}}_{pc_{int_i}} = \sum\limits_j \overline{F}_{pc_{int_{ij}}} \\ \overline{\mathfrak{M}}_{pc_{int_{ij}}} = \sum\limits_j \overline{\mathcal{M}}(\overline{F}_{pc_{int_{ij}}}) = \sum \bar{r}_{D_{ij}} \times \overline{F}_{pc_{int_{ij}}} \end{cases} \tag{19.8}$$

19.1.2. Teoremele fundamentale în mecanica ciocnirilor

1°. Teoremele torsorului impulsurilor

Teoremele torsorilor impulsurilor pentru elemente izolate din sistem. Avînd în vedere precizările făcute mai sus, se poate trage concluzia că relațiile exprimînd primele două teoreme fundamentale ale dinamicii — teorema impulsului și teorema momentului cinetic — vor trebui scrise, pentru elementele (S_i) considerate izolate din sistem, sub următoarea formă, corespunzătoare duratei τ a ciocnirii :

$$\dot{\overline{\mathcal{H}}}_i = (\overline{\mathcal{F}}_{ext_i} + \overline{\mathcal{F}}_{int_i}) + \overline{\mathcal{F}}_{pc_{ext_i}} + \overline{\mathcal{F}}_{pc_i} + \overline{\mathcal{F}}_{pc_{int_i}}; \tag{19.9}$$

$$\dot{\overline{\mathcal{K}}}_i = (\overline{\mathfrak{M}}_{ext_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_i}) + \overline{\mathfrak{M}}_{pc_{ext_i}} + \overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathcal{R}}_{pc_i}) + \overline{\mathfrak{M}}_{pc_{int_i}},$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

În legătură cu aceste relații, se va observa mai întîi că în membrul drept al ecuațiilor (19.9) forțele obișnuite, exterioare și interioare, precum și momentele lor față de polul fix considerat, sînt cu

Scanned with CamScanner

totul neglijabile în raport cu forţele percutante, respectiv în raport cu momentele rezultante ale forţelor percutante, ceea ce înseamnă că, practic, aceste solicitări obişnuite nici nu vor trebui luate în consideraţie la aplicarea teoremelor fundamentale la ciocniri.

Pe de altă parte, trebuie menţionat faptul că forţele percutante variază în timpul ciocnirii după legi care nu pot fi stabilite cu precizie, ceea ce face imposibilă, în aplicaţiile concrete, determinarea rezultantelor acestor distribuţii de forţe şi a momentelor lor rezultante; în schimb, prin efectele mecanice pe care le produc aceste mărimi, pot fi determinate, în cele mai multe situaţii, integralele acestor forţe şi momente rezultante percutante efectuate pe durata ciocnirii, τ.

Integralele, pe durata ciocnirii, a forţelor percutante rezultante poartă numele de *percuţii*, acestei denumiri adăugîndu-i-se şi un atribut caracterizînd categoria respectivă de forţe percurante şi anume:

— *percuţii exterioare*, pentru integralele, pe durata τ a ciocnirii, ale forţelor percutante exterioare, notate cu simbolurile

$$\overline{\mathcal{R}}_{ext_{i\lambda}} = \int_t^{t+\tau} \overline{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}} \, dt, \tag{19.10}$$

putîndu-se defini astfel şi *percuţia rezultantă exterioară* la care este supus elementul (S_i), în baza relaţiei

$$\overline{\mathcal{R}}_{ext_i} = \int_t^{t+\tau} \overline{\mathcal{F}}_{pc_{ext_i}} \, dt = \int_t^{t+\tau} \sum_{\lambda=1}^{l_i} \overline{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}} \, dt =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{l_i} \int_t^{t+\tau} \overline{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}} \, dt = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \overline{\mathcal{R}}_{ext_{i\lambda}}; \tag{19.11}$$

— *percuţii de legătură*, pentru integralele, pe durata τ a ciocnirii ale reacţiunilor percutante rezultante (exterioare), notate cu simbolurile

$$\overline{\mathcal{R}}_{i\mu} = \int_t^{t+\tau} \overline{R}_{pc_{i\mu}} \, dt, \tag{1.12}$$

lor corespunzîndu-le *percuția rezultantă a reacțiunilor* (exterioare) la care este supus elementul (S_i), definită prin relația

$$\overline{\mathcal{R}}_i = \int_t^{t+\tau} \overline{\mathcal{R}}_{pc_i}\, dt = \int_t^{t+\tau} \sum_{\mu=1}^{m_i} \overline{R}_{pc_{i\mu}}\, dt = \sum_{\mu=1}^{m_i} \int_t^{t+\tau} \overline{R}_{pc_{i\mu}}\, dt = \sum_{\mu=1}^{m_i} \overline{\mathcal{R}}_{i\mu}; \tag{19.13}$$

— *percuții interioare*, pentru integralele, pe durata τ a ciocnirii, ale rezultantelor forțelor percutante interioare, notate cu simbolurile

$$\overline{\mathcal{E}}_{int_{ij}} = \int_t^{t+\tau} \overline{F}_{pc_{int}}\, dt, \tag{19.14}$$

acestor din urmă percuții corespunzîndu-le *percuția rezultantă interioară* ce acționează asupra elementului (S_i), definită prin relația

$$\overline{\mathcal{E}}_{int_i} = \int_t^{t+\tau} \sum_j \overline{F}_{pc_{int_i}}\, dt = \int_t^{t+\tau} \sum_j \overline{F}_{pc_{int_{ij}}}\, dt =$$

$$= \sum_j \int_t^{t+\tau} \overline{F}_{pc_{int_{ij}}}\, dt = \sum_j \overline{\mathcal{E}}_{int_{ij}}. \tag{19.15}$$

Trecînd la stabilirea semnificațiilor integralelor, pe durata τ a ciocnirii, a le momentelor rezultante ale forțelor percutante, este necesar să se precizeze mai întîi, pe baza datelor furnizate de experiență, că variațiilor brusc ale parametrilor cinematici de ordinul întîi ai elementelor unui sistem mecanic în timpul ciocnirii nu le corespund și variații sensibile ale parametrilor de poziție respectivi, ceea ce înseamnă că în timpul foarte scurt cît durează ciocnirea se poate considera că elementele sistemului mecanic nu-și schimbă, practic, pozițiile în spațiu și că, în consecință, vectorii de poziție ai diverselor puncte de aplicație ale forțelor percutante rezultante vor putea fi considerați constanți în timpul ciocnirii.

Avînd în vedere precizările de mai sus și ținînd seama și de expresiile — stabilite în cadrul acestui subpunct — ale celor trei categorii de percuții, vor rezulta următoarele semnificații pentru integralele pe durata ciocnirii ale momentelor rezultante ale forțelor de

percuţie, momente care figurează în cea de-a doua dintre relaţiile (19.9) :

$$\int_t^{t+\tau} \overline{\mathfrak{M}}_{pc_{ext_i}}\,dt = \int_t^{t+\tau} \sum_{\lambda=1}^{l_i} (\bar{r}_{B_{i\lambda}} \times \bar{F}_{pc_{ext_{i\lambda}}})\,dt =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{l_i} \left(\bar{r}_{B_{i\lambda}} \times \int_t^{t+\tau} \bar{F}_{pc_{ext}}\,dt\right) = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \bar{r}_{B_{i\lambda}} \times \overline{\mathfrak{L}}_{ext_{i\lambda}} = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \overline{\mathscr{M}}\,(\overline{\mathfrak{L}}_{ext_{i\lambda}}). \tag{16.19}$$

respectiv

$$\int_t^{t+\tau} \overline{\mathfrak{M}}\,(\overline{\mathscr{R}}_{pc_i})\,dt = \int_t^{t+\tau} \sum_{\mu=1}^{m_i} (\bar{r}_{C_{i\mu}} \times \bar{R}_{pc_{i\mu}})\,dt =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{m_i} \left(\bar{r}_{C_{i\mu}} \times \int_t^{t+\tau} \bar{R}_{pc_{i\mu}}\,dt\right) = \sum_{\mu=1}^{m_i} \bar{r}_{C_{i\mu}} \times \overline{\mathfrak{R}}_{i\mu} = \sum_{\mu=1}^{m_i} \overline{\mathscr{M}}(\overline{\mathfrak{R}}_{i\mu}) \tag{19.17}$$

şi

$$\int_t^{t+\tau} \overline{\mathfrak{M}}_{pc_{int_i}}\,dt = \int_t^{t+\tau} \sum_j (\bar{r}_{D_{ij}} \times \bar{F}_{pc_{int_{ij}}})\,dt =$$

$$= \sum_j \left(\bar{r}_{D_{ij}} \times \int_t^{t+\tau} \bar{F}_{pc_{int_{ij}}}\,dt\right) = \sum_j \bar{r}_{D_{ij}} \times \overline{\mathfrak{L}}_{int_{ij}} = \sum_j \overline{\mathscr{M}}(\overline{\mathfrak{L}}_{int_{ij}}). \tag{19.18}$$

Ultimele relaţii permit să se tragă concluzia că integralele pe durata ciocnirii ale momentelor rezultante în polul fix ale forţelor percutante reprezintă, în fond, momentele rezultante, faţă de polul fix considerat, ale percuţiilor la care este supus elementul respectiv, putîndu-se scrie deci relaţiile

$$\int_t^{t+\tau} \overline{\mathfrak{M}}_{pc_{ext_i}}\,dt = \sum_{\lambda=1}^{l_i} \overline{\mathscr{M}}(\overline{\mathfrak{L}}_{ext_{i\lambda}}) = \overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathfrak{L}}_{ext_i});$$

$$\int_t^{t+\tau} \overline{\mathfrak{M}}\,(\overline{\mathscr{R}}_{pc_i})\,dt = \sum_{\mu=1}^{m_i} \overline{\mathscr{M}}(\overline{\mathfrak{R}}_{i\mu}) = \overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathfrak{R}}_i); \tag{19.19}$$

$$\int_t^{t+\tau} \overline{\mathfrak{M}}_{pc_{int_i}}\,dt = \sum_j \overline{\mathscr{M}}\,(\overline{\mathfrak{L}}_{int_{ij}}) = \overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathfrak{L}}_{int_i}).$$

Scanned with CamScanner

Revenind la relaţiile (19.9), în care, conform observaţiilor făcute mai înainte, vor fi neglijaţi termenii care se referă la solicitările exterioare şi interioare obişnuite, cu moduli finiţi, şi integrînd aceste relaţii pe durata τ a ciocnirii, se vor obţine, ţinînd seama şi de semnificaţiile — stabillite pe parcurs — ale diverşilor termeni, următoarele sisteme de relaţii :

$$\left|\begin{array}{l} \overline{\mathscr{K}}_i - \overline{\mathscr{K}}_i^0 = \overline{\mathfrak{R}}_{ext_i} + \overline{\mathfrak{N}}_i + \overline{\mathfrak{R}}_{int_i} ; \\ \\ \overline{\mathscr{K}}_i - \overline{\mathscr{K}}_i^0 = \overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathfrak{R}}_{ext_i}) + \overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathfrak{N}}_i) + \overline{\mathfrak{M}}(\overline{\mathfrak{R}}_{int_i}) \\ \\ (i = 1, 2, \ldots,) \end{array}\right| , \qquad (19.20)$$

$\overline{\mathscr{K}}_i^0$ şi $\overline{\mathscr{K}}_i^0$, respectiv $\overline{\mathscr{H}}_i$ şi $\overline{\mathscr{K}}_i$, reprezentînd şi acum componentele torsorilor rezultanţi în polul fix ai impulsurilor elementelor sistemului mecanic, corespunzătoare celor două momente extreme ale intervalului de timp τ cît durează ciocnirea.

Relaţiile (19.20), exprimînd *teorema impulsului* şi *teorema momentului cinetic în mecanica ciocnirilor*, reprezintă forma de aplicare a teoremelor fundamentale vectoriale ale dinamicii sistemelor mecanice la ciocniri.

Aceste relaţii pot fi incluse într-una singură, sub forma

$$\left|\begin{array}{l} \overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathscr{H}}_i) - \overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathscr{H}}_i^0) = \overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathfrak{R}}_{ext_i}) + \overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathfrak{N}}_i) + \overline{\mathscr{T}}(\overline{\mathfrak{R}}_{int_i}) \\ \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right| . \qquad (19.21)$$

permiţînd următoarea formulare globală a celor două teoreme fundamentale vectoriale :

„Variaţia, în timpul ciocnirii,a torsorului faţă de un pol fix al impulsurilor unui rigid aparţinînd unui sistem mecanic, este egală cu torsorul rezultant, în acelaşi pol fix, al percuţiilor exterioare, de legătură şi interioare, la care este supus elementul respectiv".

Este uşor de înţeles că în cazul rigidului asimilat cu un punct material se va lua în consideraţie numai prima dintre relaţiile (19.20),

Scanned with CamScanner

în baza acelorași considerațiuni ca și în dinamica punctului material.

b) *Teoremele torsorului impulsurilor corespunzătoare întregului sistem mecanic.* Prin însumarea fiecărei serii de ecuații din sistemele (19.20) — de impulsuri și de momente cinetice —, scrise pentru toate elementele sistemului mecanic, vor rezulta egalitățile

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{H}}_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{H}}_i^0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{R}}_{ext_i} + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{R}}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{R}}_{int_i};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{K}}_i - \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{K}}_i^0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_{ext_i}) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_{int_i}). \tag{19.22}$$

Semnificațiile sumelor din membrul stîng al relațiilor precedente sînt binecunoscute, ele reprezentînd impulsul total, respectiv momentul cinetic total față de polul fix considerat, al întregului sistem mecanic pentru cele două momente extreme ale intervalului de timp τ cît durează ciocnire, adică

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{H}}^0 = \overline{\mathcal{H}}^0; \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{K}}_i^0 = \overline{\mathcal{K}}^0 \tag{19.23}$$

și

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{H}}_i = \overline{\mathcal{H}}; \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{K}}_i = \overline{\mathcal{K}}. \tag{19.24}$$

De asemenea, pentru primele două sume din membrul drept al relațiilor (19.22) pot fi stabilite următoarele semnificații:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{R}}_{ext_i} + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{R}}_i = \overline{\mathcal{R}}_{ext} + \overline{\mathcal{R}} \tag{19.25}$$

și

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_{ext_i}) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_i) = \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_{ext}) + \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}), \tag{19.26}$$

$\overline{\mathcal{R}}_{ext}$ și $\overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_{ext})$ fiind componentele torsorului rezultant, în polul fix considerat, al tuturor percuțiilor exterioare la care este supus siste-

mul mecanic, iar $\overline{\mathcal{R}}$ şi $\overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}})$ reprezentînd componentele torsorului rezultant, în acelaşi pol fix, al tururor percuţiilor din legăturile exterioare aplicate elementelor sistemului mecanic considerat.

În fine, în baza principiului acţiunii şi reacţiunii, în concordanţă cu care apar şi distribuţiile de forţe percutante interioare şi căruia i se vor conforma, bineînţeles, şi percuţiile interioare şi momentele lor, vor rezulta condiţiile

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{P}}_{int_i} = 0\,; \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{P}}_{int_i}) = 0. \tag{19.27}$$

În baza egalităţilor precedente, relaţiile (19.22) iau formele

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\mathcal{H}} - \overline{\mathcal{H}}^0 &= \overline{\mathcal{P}}_{ext} + \overline{\mathcal{R}}\,; \\ \overline{\mathcal{K}} - \overline{\mathcal{K}}^0 &= \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{P}}_{ext}) + \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}) \end{aligned}}, \tag{19.28}$$

exprimînd *teorema impulsurilor şi teorema momentului cinetic în mecanica ciocnirilor, corespunzătoare întregului sistem mecanic.*

Scrierea celor două teoreme fundamentale sub forma concentrată

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}) - \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{H}}^0) = \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{P}}_{ext}) + \overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathcal{R}}),}, \tag{19.29}$$

permite următoarea formulate globală a lor :

„Variaţia, în timpul ciocnirii, a torsorului rezultant într-un pol fix al impulsurilor unui sistem mecanic este egală cu torsorul rezultant, în acelaşi pol fix, al tuturor percuţiilor exterioare, active şi de legătură, care solicită întregul sistem mecanic".

Dacă sistemul mecanic este alcătuit numai din corpuri asimilabile cu puncte materiale, atunci va fi folosită numai prima dintre ecuaţiile (19.28).

În cazul cînd pentru un sistem mecanic supus la şocuri poate fi găsită o axă (Δ) pentru care fie proiecţia pe ea a percuţiilor rezultante exterioare are valoarea zero, adică

$$\mathcal{P}_{ext_\Delta} + \mathcal{M}_\Delta \equiv 0, \tag{19.30}$$

Scanned with CamScanner

fie proiecţia pe acea axă a momentului rezultant al percuţiilor exterioare este egală cu zero, adică

$$\mathfrak{M}_\Delta(\bar{\mathfrak{P}}_{ext}) + \mathfrak{M}_\Delta(\bar{\mathfrak{R}}) \equiv 0, \tag{19.31}$$

atunci poate fi scrisă o *integrală a impulsului*

$$\boxed{\mathcal{K}_\Delta = \mathcal{K}_\Delta^0}, \tag{19.32}$$

respectiv o *integrală a momentului cinetic*

$$\boxed{\mathcal{K}_\Delta = \mathcal{K}_\Delta^0}, \tag{19.33}$$

care vor putea fi folosite la rezolvarea problemelor de mecanica ciocnirilor.

2°. Teorema lui Carnot privind variaţia energiei cinetice în mecanica ciocnirilor

În legătură cu teorema energiei, trebuie de făcut chiar de la început precizarea că nu este posibilă o extindere a relaţiilor care o exprimă la cazul sistemelor mecanice care suportă şocuri, deoarece aceste din urmă procese mecanice sînt însoţite totdeauna de importante transformări de energie mecanică în alte forme de energie, în deosebi calorică.

Cunoaşterea, cu ajutorul unora din integralele torsorului impulsurilor, sau al unor relaţii cu caracter experimental, a parametrilor cinetici de ordinul întîi ai elementelor sistemului mecanic corespunzători momentului final al ciocnirii — valorile acestor parametri cinematici corespunzătoare momentului iniţial sînt coniderate, de regulă, cunoscute, date — poate permite, cel mult, calculul variaţiei energiei cinetice a sistemului mecanic respectiv în timpul ciocnirii, în baza relaţiei

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}^0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[M_i(\bar{v}_{G_i}^2 - \bar{v}_{G_i}^{02})^2 + J_i(\bar{\omega}_i^2 - \bar{\omega}_i^{02})], \tag{19.34}$$

cu

$$v^0_{G_i} = \bar{v}_{G_i}(t); \quad \bar{\omega}^0_i = \bar{\omega}_i(t) \quad \text{și} \quad \bar{v}_{G_i} = \bar{v}_{G_i}(t+\tau); \quad \bar{\omega}_i = \bar{\omega}_i(t+\tau).$$

Pentru sisteme mecanice supuse numai la legături olonome scleronome cu frecări neglijabile și suportînd numai percuții interioare poate fi demonstrată *teorema I-a a lui Carnot*, privind variația energiei cinetice a unui sistem mecanic în timpul ciocnirii, care se produce atunci cînd sistemului i se aplică brusc noi legături pasive, pe lîngă cele pe care le-a avut inițial.

Întrucît enunțul teoremei conține noțiuni noi, este firesc ca ele să fie definite înaintea formulării teoremei; este vorba de noțiunile de:

— *viteză de translație pierdută a elementului* (S_i) definită prin relația

$$\bar{v}_{G_{i_{pd}}} = \bar{v}_{G_i} - \bar{v}^0_{G_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{19.35}$$

— *viteză unghiulară pierdută a elementului* (S_i), definită prin relația

$$\bar{\omega}_{i_{pd}} = \bar{\omega}_i - \bar{\omega}^0_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{19.36}$$

— *energia cinetică a vitezelor pierdute a unui sistem mecanic*, definită prin relația

$$\mathscr{E}_{pd} = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_{i_{pd}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [M_i(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}^0_{G_i})^2 + J_i(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}^0_i)^2], \tag{19.37}$$

considerîndu-se, pentru simplificarea calculelor următoare, numai cazurile cînd elementele sistemului mecanic execută mișcări spațiale cu axele de rotație instantanee $G_i z'_i$ de direcții fixe în spațiu și coincizînd cu axe centrale de inerție ale elementelor (S_i); această ipoteză simplificatoare permite să se scrie următoarele expresii pentru momentele cinetice corespunzătoare rotațiilor elementelor în jurul centrelor lor de masă:

$$\bar{\mathscr{K}}_{G_i} = J_i \bar{\omega}_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19.38}$$

Cu aceste precizări, se poate trece la formularea

Teoremei I-a a lui Carnot:

„Prin aplicarea bruscă de noi legături staționare pasive unui sistem mecanic, supus în prealabil la alte legături pasive scleronome

și cu frecare neglijabilă, sistemul mecanic pierde, prin fenomenul de șoc, o cantitate de energie cinetică egală cu energia cinetică a vitezelor pierdute ale sistemului".

Pentru demonstrarea teoremei se va pleca de la relațiile (19.20), care, în ipotezele de lucru precizate ($\overline{\mathcal{R}}_{ext_i} = \overline{\mathcal{M}}_i = 0$; $\overline{\mathcal{M}}_{G_i}(\overline{\mathcal{R}}_{ext_i}) = \overline{\mathcal{M}}_{G_i}(\overline{\mathcal{M}}_i) = 0$) și cu ecuațiile de momente scrise, de astă dată, în raport cu centrele de masă ale elementelor respective, vor căpăta formele

$$\overline{\mathcal{H}}_i - \overline{\mathcal{H}}_i^0 = \overline{\mathcal{R}}_{int_i}; \qquad \overline{\mathcal{H}}_{G_i} - \overline{\mathcal{K}}_{G_i}^0 = \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_{int_i}).$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19.39}$$

Prin înmulțirea, scalar, a primei dintre relațiile precedente cu viteza de translație $\overline{v}_{G_i}$, corespunzătoare momentului final al ciocnirii și a celei de-a doua relații cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_i$, corespunzătoare aceluiași moment final al ciocnirii, precum și prin însumarea tuturor acestor relații astfel, înmulțite, scrise pentru toate elementele sistemului mecanic, se obține egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} [(\overline{\mathcal{H}}_i - \overline{\mathcal{H}}_i^0)\,\overline{v}_{G_i} + (\overline{\mathcal{K}}_{G_i} - \overline{\mathcal{K}}_{G_i}^0)\,\overline{\omega}_i] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{R}}_{int_i}\,\overline{v}_{G_i} + \overline{\mathcal{M}}_{G_i}(\overline{\mathcal{R}}_{int_i})\,\overline{\omega}_i],$$

sau încă, adăugînd și scăzînd grupurile de termeni $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{H}}_i^0\,\overline{v}_{G_i}^0$ și $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{K}}_{G_i}^0\,\overline{\omega}_i^0$, mai rezultă

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{H}}_i\,\overline{v}_{G_i} + \overline{\mathcal{K}}_{G_i}\,\overline{\omega}_i] - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [\overline{\mathcal{H}}_i^0\,\overline{v}_{G_i}^0 + \overline{\mathcal{K}}_{G_i}^0\,\overline{\omega}_i^0] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [(\overline{\mathcal{H}}_i\,\overline{v}_{G_i} - 2\overline{\mathcal{H}}_i^0\,\overline{v}_{G_i} + \overline{\mathcal{H}}_i^0\,\overline{v}_{G_i}^0) + (\overline{\mathcal{K}}_{G_i}\,\overline{\omega}_i -$$

$$- 2\overline{\mathcal{K}}_{G_i}^0\,\overline{\omega}_i + \overline{\mathcal{K}}_{G_i}^0\,\overline{\omega}_i^0)] = \sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathcal{R}}_{int_i}\,\overline{v}_{G_i} + \overline{\mathcal{M}}_{G_i}(\overline{\mathcal{R}}_{int_i})\,\overline{\omega}_i). \tag{19.40}$$

Scanned with CamScanner

Primul grup de termeni din membrul stîng al ultimei relaţii reprezintă energia cinetică a sistemului mecanic în momentul final al ciocnirii, adică după aplicarea noilor legături staţionare :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mathscr{H}}_i\,\bar{v}_{G_i}+\overline{\mathscr{K}}_{G_i}\,\bar{\omega}_i]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[M_i\,\bar{v}_{G_i}^2+J_i\,\bar{\omega}_i^2]=\mathscr{E}, \tag{19.41}$$

De asemenea, pentru următoarele două grupuri de termeni din membrul stîng al relaţiei (19.40) se găsesc următoarele semnificaţii

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[\overline{\mathscr{H}}_i^0\,\bar{v}_{G_i}^0+\overline{\mathscr{K}}_{G_i}^0\,\bar{\omega}_i^{02}]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[M_i\,\bar{v}_{G_i}^{02}+J_i\,\bar{\omega}_i^{02}]=\mathscr{E}^0, \tag{19.42}$$

respectiv

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(\overline{\mathscr{H}}_i\,\bar{v}_{G_i}-2\overline{\mathscr{H}}_i^0\,\bar{v}_{G_i}+\overline{\mathscr{H}}_i^0\,\bar{v}_{G_i}^0)+(\overline{\mathscr{K}}_{G_i}\,\bar{\omega}_i-$$

$$-2\overline{\mathscr{K}}_{G_i}^0\,\bar{\omega}_i+\overline{\mathscr{K}}_{G_i}^0\,\bar{\omega}_i^0)]=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(M_i(\bar{v}_{G_i}^2-2\bar{v}_{G_i}\,\bar{v}_{G_i}^0+\bar{v}_{G_i}^{02})+$$

$$+J_i(\bar{\omega}_i^2-2\bar{\omega}_i\,\bar{\omega}_i^0+\bar{\omega}_i^{02})]=\mathscr{E}_{pd}, \tag{19.43}$$

$\mathscr{E}^0$ fiind energia cinetică din momentul iniţial al ciocnirii, adică din momentul în care se aplică legăturile pasive suplimentare, iar $\mathscr{E}_{pd}$ fiind energia cinetică a vitezelor pierdute ale sistemului mecanic considerat.

În fine, pentru membrul drept al egalităţii (19.40), poate fi scrisă expresia

$$\sum_{i=1}^{n}[\bar{\mathscr{R}}_{int_i}\,\bar{v}_{G_i}+\overline{\mathscr{M}}_{G_i}(\bar{\mathscr{R}}_{int_i})\,\bar{\omega}_i]=\frac{1}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\bar{\mathscr{R}}_{int_i}\,d\bar{r}_{G_i}+\overline{\mathscr{M}}_{G_i}(\bar{\mathscr{R}}_{int_i})\,d\bar{\Theta}_i]=0, \tag{19.44}$$

valoarea zero a acestei expresii fiind justificată de următoarele observaţii :

— pe de o parte, prin considerarea tuturor legăturilor staţionare şi cu frecare neglijabilă, toate forţele percutante interioare — şi deci şi percuţiile şi momentele percuţiilor corespunzătoare lor — au caracter de reacţiuni interioare ideale, al căror lucru mecanic este egal cu zero în cazul sistemelor scleronome ;

— pe de altă parte, deplasările elementare $d\bar{r}_{G_i}$ şi $d\bar{\Theta}_i$ fiind cele de la sfîrşitul ciocnirii, cînd sînt în funcţiune toate legăturile pasive staţionare aplicate sistemului mecanic — deci şi cele suplimentare — , ele vor fi compatibile cu legăturile.

În baza relaţiilor (19.41), (19.42), (19.43) şi (19.44), egalitatea (19.40) va lua forma

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}^0 + \mathcal{E}_{pd} = 0, \tag{19.45}$$

rezultînd de aici concluzia

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}^0 = -\mathcal{E}_{pd} < 0, \tag{19.4}$$

care arată că sistemul mecanic pierde energie cinetică, această pierdere fiind dată de relaţia

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 - \mathcal{E} = \mathcal{E}_{pd}, \tag{19.47}$$

justificînd enunţul teoremei lui Carnot. .

19.1.3. Ecuaţiile şi problemele mecanicii ciocnirilor

1°. Ecuaţiile mecanicii ciocnirilor

Pentru rezolvarea problemelor de ciocniri întîlnite curent în aplicaţiile practice sînt folosite următoarele forme de *ecuaţii ale mecanicii ciocnirilor*, numite încă şi *ecuaţii ale mişcărilor impulsive ale sistemelor mecanice*, datorită faptului că procesele de ciocniri mai sînt numite şi *mişcări impulsive* :

a) *Ecuaţiile corespunzătoare teoremelor torsorilor impulsurilor.* Prima formă a ecuaţiilor mişcărilor impulsive ale sistemelor mecanice o constituie chiar ecuaţiile vectoriale (19.20), exprimînd teoremele

torsorilor impulsurilor corespunzătoare mecanicii ciocnirilor, scrise pentru elemente izolate din sistem, cu singura deosebire că relaţiile exprimînd teoremele meomentelor cinetice vor fi scrise în raport cu polii invariabili legaţi de elementele sistemului mecanic aleşi, de regulă în centrale de masă ale acestora.

În consecinţă, considerînd şi aici numai cazurile cînd axele instantanee de rotaţie au direcţii fixe în spaţiu şi sînt luate ca axe $G_i z_i'$ ataşate elementelor (S_i), $(\bar{\omega}_i = \omega_i \bar{k}_i'$; $\bar{\mathcal{K}}_{G_i} = -J'_{i_{xz}} \omega_i \bar{i}_i' - J_{i_{yz}} \omega_i \bar{i}_i + J_i \omega_i \bar{k}_i')$, vor rezulta următoarele *ecuaţii vectoriale ale micşcărilor impulsive* ale elementelor sistemului mecanic supus la şocuri :

$$\boxed{\begin{gathered} M_i(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_i}^0) = \bar{\mathcal{Q}}_{ext_i} + \bar{\mathcal{M}}_i + \bar{\mathcal{Q}}_{int_i}; \\ (-J'_{i_{xz}} \bar{i}_i' - J'_{i_{yz}} \bar{j}_i' + J_i \bar{k}_i')(\omega_i - \omega_i^0) = \\ = \bar{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{\mathcal{Q}}_{ext_i}) + \bar{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{\mathcal{M}}_i) + \bar{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{\mathcal{Q}}_{int_i}) \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered}} \tag{19.48}$$

respectiv

$$\boxed{\begin{gathered} M_i(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_i}^0) = \bar{\mathcal{Q}}_{ext_i} + \bar{\mathcal{M}}_i + \bar{\mathcal{Q}}_{int_i}; \\ J_i(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_i^0) = \bar{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{\mathcal{Q}}_{ext_i}) + \bar{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{\mathcal{M}}_i) + \bar{\mathcal{M}}_{G_i}(\bar{\mathcal{Q}}_{int_i}) \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered}} \tag{19.49}$$

dacă axele $G_i z_i'$ sînt axe centrale de inerţie.

În cazul elementelor cu axe de rotaţie fixe — deci fixe nu numai ca direcţii ci şi ca poziţii şi considerate şi acum ca axe $Q_i z_i'$ invariabil ataşate elementelor, cu polii Q_i aleşi în unul din punctele teoretice de imobilizare a axelor — , ecuaţiile vectoriale (19.48) vor fi înlocuite

Scanned with CamScanner

cu următoarele

$$\boxed{\begin{gathered} M_i(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_i^0) \times \bar{r}'_{G_i} = \bar{\mathfrak{L}}_{ext_i} + \bar{\mathfrak{M}}_i + \bar{\mathfrak{L}}_{int_i}\,; \\ (-J'_{i_{xz}}\bar{i}'_i - J'_{i_{yz}}\bar{j}'_i + J_i\bar{k}'_i)(\omega_i - \omega_i^0) = \overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}(\bar{\mathfrak{L}}_{ext_i}) + \\ + \overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}(\bar{\mathfrak{M}}_i) + \overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}(\bar{\mathfrak{L}}_{int_i}) \\ (i = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered}} \tag{19.50}$$

care, prin proiectare pe axele reperelor legate de rigide, vor furniza şi ecuaţiile scalare corespunzătoare.

Această primă formă a ecuaţiilor mecanicii ciocnirilor va fi folosită în toate cazurile cînd rezolvarea problemei de ciocnire va implica şi determinarea percuţiilor interioare.

Este uşor de înţeles că în cazul unui element asimilabil cu un punct material se va lua în consideraţie numai prima dintre ecuaţiile (20.48), (20.49) sau (20.50), retranscrisă cu notaţiile adoptate pentru această situaţie.

O a doua formă a ecuaţiilor mecanicii ciocnirilor o constituie relaţiile (20.28), exprimînd teoremele torsorului impulsurilor scrise pentru întregul sistem mecanic.

Considerînd şi acum numai cazurile cînd elementele sistemului au axele instantanee de rotaţie $G_iz'_i$ de direcţii fixe în spaţiu şi coincizînd cu axe centrale de inerţie ($\bar{\omega}_i = \omega_i\bar{k}_i$; $\bar{\mathcal{K}}_{G_i} = J_i\bar{\omega}_i$) şi ţinînd seama şi de relaţia exprimînd teorema lui Koenig relativă la momentul cinetic ($\bar{\mathcal{K}}_i = \bar{r}_{G_i} \times M_i\bar{v}_{G_i} + J_i\bar{\omega}_i$), vor rezulta următoarele *ecuaţii vectoriale ale mecanicii ciocnirilor, corespunzătoare întregului sistem mecanic*:

$$\boxed{\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} M_i(\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_i}^0) = \bar{\mathfrak{L}}_{ext} + \bar{\mathfrak{M}}\,; \\ \sum_{i=1}^{n} [M_i\bar{r}_{G_i} \times (\bar{v}_{G_i} - \bar{v}_{G_i}^0) + J_i(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_i^0)] = \\ = \bar{\mathfrak{M}}(\bar{\mathfrak{L}}_{ext}) + \bar{\mathfrak{M}}(\bar{\mathfrak{K}}) \end{gathered}} \tag{19.51}$$

respectiv ecuaţiile

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [M_i(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_i^0) \times \bar{r}'_{G_i}] = \bar{\mathfrak{L}}_{ext} + \bar{\mathfrak{M}} \; ; \\ &\sum_{i=1}^{n} \{M_i \bar{r}_{Q_i} \times [(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_i^0) \times \bar{r}'_{G_i}] + J_i(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_i^0)\} = \\ &= \bar{\mathfrak{M}}(\bar{\mathfrak{L}}_{ext}) + \bar{\mathfrak{M}}(\bar{\mathfrak{M}}) \end{aligned}} \qquad (19.52)$$

dacă polii Q_i nu coincid cu centrele de masă G_i, dar sînt ficşi în spaţiu ($\bar{v}_{Q_i} \equiv 0$).

Aceste două ecuaţii vectoriale vor putea fi proiectate apoi pe axele reperului fix, comun tuturor elementelor sistemului mecanic, obţinîndu-se astfel *sistemul de ecuaţii scalare ale mişcării impulsive scrise pentru întregul sistem mecanic* considerat.

Ultimele ecuaţii sînt folosite în aplicaţii în deosebi în cazurile problemelor de ciocniri în care nu se cere determinarea percuţiilor interioare.

Se înţelege, de asemenea, că în cazul unui sistem mecanic format numai din puncte materiale care se ciocnesc, se va folosi numai prima dintre ecuaţiile (19.51) sau (19.52).

b) *Ecuaţiile lui Lagrange de specia a doua pentru mişcările impulsive ale sistemelor mecanice.* Utilizarea ecuaţiilor lui Lagrange de specia a doua pentru descrierea mişcării impulsive a unui sistem mecanic se va face pe baza următoarelor observaţii :

1) Legăturile pasive, exterioare şi interioare, aplicate elementelor sistemului mecanic înainte de ciocnire şi pe baza cărora se stabileşte numărul p al gradelor lui de libertate, sînt considerate în acţiune şi pe durata ciocnirii şi sînt presupuse perfect rigide, neglijîndu-se deformaţiile elastice care se produc în timpul ciocnirii în zonele din jurul punctelor teoretice de legătură ; aceasta înseamnă, pe de o parte, că în timpul ciocnirii nu se modifică numărul gradelor de libertate ale sistemului mecanic, iar pe de altă parte, că lucrul mecanic virtual al reacţiunilor percutante corespunzătoare acestor legături pasive va putea fi considerat egal cu zero, ceea ce va avea drept consecinţă directă şi egalitatea cu zero a tuturor forţelor generalizate corespunzătoare acestor reacţiuni percutante.

Scanned with CamScanner

2) Datorită deformaţiilor elastice care se produc în punctele teoretice de ciocnire, exterioare şi interioare, care nu coincid cu punctele teoretice de legături pasive aplicate sistemului mecanic, aceste noi contacte care se produc în timpul ciocnirii vor trebui considerate ca legături active, care nu modifică numărul gradelor de libertate ale sistemului mecanic, asemănătoare celor realizate prin elemente elastice de legătură.

3) Datorită aceloraşi deformaţii elastice, forţele percutante corespunzătoare acestor noi contacte, exterioare şi interioare, care se stabilesc în timpul ciocnirii, vor efectua un lucru mecanic virtual diferit de zero, analog lucrului mecanic virtual al solicitărilor elastice, exterioare şi interioare; aceasta înseamnă deci că solicitărilor percutante din aceste puncte de contact le vor corespunde forţe generalizate percutante, exterioare şi interioare, diferite de zero.

Ţinînd seama de precizările făcute mai sus, se poate trage concluzia că în cazul unui sistem mecanic care suportă şocuri, constituite din rigide supuse la legături pasive olonome şi cu frecare neglijabilă ($\delta\mathscr{L}_p \equiv 0$; $Q_{p_k} \equiv 0$; $k = 1, 2, \ldots, p$), sistemul de ecuaţii Lagrange de specia a doua folosit pentru descrierea mişcării impulsive a sistemului mecanic în intervalul de timp τ se va deosebi de cel care descrie mişcarea lui normală, neimpulsivă, numai prin prezenţa în membrul drept al relaţiilor, alături de forţele generalizate active obişnuite — cu moduli finiţi —, a forţelor generalizate percutante, exterioare şi interioare, corespunzătoare noilor zone de contact stabilite în timpul ciocnirii.

În consecinţă, sistemul de ecuaţii Lagrange de specia a doua, capabil să descrie mişcarea impulsivă a unui sistem mecanic cu p grade de libertate, va trebui scris sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_k} = Q_{a_k} + Q_{pc_{ext_k}} + Q_{pc_{int_k}},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p) \qquad (19.53)$$

Q_{a_k} fiind forţele generalizate active obişnuite, cu moduli finiţi, iar $Q_{pc_{ext_k}}$ şi $Q_{pc_{int_k}}$ fiind forţele generalizate percutante exterioare şi

interioare, dfinite prin relaţiile

$$Q_{pc_{ext_k}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{\mathscr{F}}_{pc_{ext_i}} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{\mathscr{F}}_{pc_{ext_i}}) \frac{\partial \overline{\Theta}_i}{\partial q_k} \right], \qquad (19.54)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

respectiv

$$Q_{pc_{int_k}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{\mathscr{F}}_{pc_{int_i}} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{\mathscr{F}}_{pc_{int_i}}) \frac{\partial \overline{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] \qquad (19.55)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p),$$

şi avînd modulii enormi, ca urmare a prezenţei vectorilor $\overline{\mathscr{F}}_{pc_{ext_i}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{\mathscr{F}}_{pc_{ext_i}})$, respectiv $\overline{\mathscr{F}}_{pc_{int_i}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{\mathscr{F}}_{pc_{int_i}})$, de intensităţi foarte mari.

Integrînd ecuaţiile (19.53) pe durata τ a ciocnirii, se obţine sistemul de relaţii

$$\int_t^{t+\tau} \mathrm{d}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \int_t^{t+\tau} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_k} \mathrm{d}t = \int_t^{t+\tau} Q_{a_k} \mathrm{d}t +$$

$$+ \int_t^{t+\tau} Q_{pc_{ext_k}} \mathrm{d}t + \int_t^{t+\tau} Q_{pc_{int_k}} \mathrm{d}t.$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p) \qquad (19.56)$$

Notînd cu

$$\dot{q}_j^0 = \dot{q}_j(t). \quad (j = 1, 2, \ldots, p) \qquad (19.57)$$

vitezele generalizate corespunzătoare momentului iniţial al ciocnirii şi cu

$$\dot{q} = \dot{q}\,(t + \tau), \qquad (j = 1, 2, \ldots, p) \qquad (19.58)$$

vitezele generalizate corespunzătoare momentului final al ciocnirii, primele integrale din membrul stîng al ecuaţiilor (19.56) vor putea fi

Scanned with CamScanner

scrise sub forma

$$\int_t^{t+\tau} \mathrm{d}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k}\right)_{\dot{q}=\dot{q}(t+\tau)} - \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k}\right)_{\dot{q}=\dot{q}'}$$

$$(k = 1, 2, \ldots p) \qquad (19,.59)$$

Întrucît cu toate că vitezele generalizate variază impulsiv, termenii $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k}$ au totuși mărimi finite vor putea fi acceptate aproximările

$$\int_t^{t+\tau} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k}\,\mathrm{d}t \approx 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \qquad (19.60)$$

De asemenea, datorită modulilor finiți ale forțelor generalizate active, vor putea fi considerate practic egale cu zero și integralele lor pe durata ciocnirii, adică se va putea scrie

$$\int_t^{t+\tau} Q_{a_k}\,\mathrm{d}t \approx 0\,; \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \qquad (19.61)$$

În ceea ce privește integralele pe durata ciocnirii ale forțelor percutante exterioare, ele vor avea expresiile

$$\int_t^{t+\tau} Q_{pc_{ext_k}}\,\mathrm{d}t = \int_t^{t+\tau} \sum_{i=1}^{n} \left[\bar{\mathcal{F}}_{pc_{ext_i}} \frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathfrak{M}}_{G_i}(\bar{\mathcal{F}}_{pc_{ext_i}}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right] \mathrm{d}t,$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

sau încă, avînd în vedere faptul că, odată cu parametrii de poziție — și deci cu coordonatele generalizate — rămîn neschimbate în timpul ciocnirii și mărimile $\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k}$ și $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}$, ele putînd fi scoase, în consecință, de sub semnele de integrare în raport cu timpul, se mai poate

serie

$$\int_t^{t+\tau} Q_{pc_{ext_k}}\,dt = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\int_t^{t+\tau} \overline{\mathscr{F}}_{pc_{ext_i}}\,dt\right)\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_t^{t+\tau} \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{\mathscr{F}}_{pc_{ext_i}})\,dt\right)\frac{\partial \overline{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] \qquad (19.62)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

Dacă se ţine seama acum şi de semnificaţiile integralelor din expresiile (19.62), se capătă următoarele semnificaţii pentru integralele pe durata ciocnirii ale forţelor generalizate percutante exterioare :

$$\int_t^{t+\tau} Q_{pc_{ext_k}}\,dt = \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{\mathfrak{R}}_{ext_i}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{\mathfrak{R}}_{ext_i})\,\frac{\partial \overline{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] = \hbar_{ext_k},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p) \qquad (19.63)$$

ultimele expresii putînd fi numite *percuţii generalizate exterioare*; mărimile $\hbar_{ext_k}$ au semnificaţii fizice de percuţii, sau de momente ale percuţiilor, după cum coordonata generalizată corespunzătoare gradului de libertate k este o coordonată carteziană, sau un unghi.

În mod analog vor fi definite şi *percuţiile generalizate interioare*, ele avînd expresiile

$$\int_t^{t+\tau} Q_{pc_{int_k}}\,dt = \sum_{i=1}^{n}\left[\overline{\mathfrak{R}}_{int_i}\frac{\partial \bar{r}_{G_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{G_i}(\overline{\mathfrak{R}}_{int_i})\,\frac{\partial \overline{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] = \hbar_{int_k} \qquad (19.64)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

În baza relaţiilor (19.59), (19.60), (19.61), (19.63) şi (19.64), egalităţile (19.56) vor lua formele

$$\boxed{\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right)_{\dot{q}=\dot{q}} - \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right)_{\dot{q}=\dot{q}^0} = \hbar_{ext_k} + \hbar_{int_k}}, \qquad (19.65)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

Scanned with CamScanner

și vor reprezenta *sistemul de ecuații Lagrange de specia a doua pentru mișcările impulsive ale sistemelor mecanice.*

Introducînd impulsurile generalizate corespunzătoare celor două momente extreme ale duratei de ciocnire, adică

$$\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right)_{\dot{q}=\dot{q}} = h_k = \sum_{k=1}^{p} g_{ki}\,\dot{q}_i + g_{k0} \tag{19.66}$$

și

$$\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right)_{\dot{q}=\dot{q}^0} = h_k^0 = \sum_{k=1}^{p} g_{ki}\,\dot{q}_i^0 + g_{k0}, \tag{19.67}$$

sistemul de ecuații (19.65) va mai putea fi scris sub forma

$$\boxed{\begin{gathered} h_k - h_k^0 = \sum_{i=1}^{p} g_{ki}(\dot{q}_i - \dot{q}_i^0) = \mathfrak{h}_{ext_k} + \mathfrak{h}_{int_k} \\ (k = 1, 2, \ldots, p) \end{gathered}} \tag{19.68}$$

Ecuațiile lui Lagrange stabilite mai sus vor putea fi folosite în cazurile cînd în problemele de ciocniri nu se va cere să se determine și percuțiile de legătură care, în ipotezele de lucru adoptate la început, au fost eliminate din ecuația generală a dinamicii.

2°. Problemele mecanicii ciocnirilor

De regulă, în problemele de ciocniri întîlnite în aplicațiile practice, se consideră cunoscute caracteristicile inerțiale ale elementelor sistemului mecanic care suportă șocuri — masele și momentele de inerție ale rigidelor sistemului în raport cu axele reperelor invariabile atașate lor — , parametrii de poziție ai acestor elemente corespunzătoare momentului ciocnirii, precum și parametrii lor cinematici de ordinul întîi corespunzători momentului inițial al ciocnirii, ultimele două serii de mărimi fiind determinate prin integrarea sistemului de ecuații Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_k} = Q_{a_k} + Q_{p_k},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p) \tag{19.69}$$

Scanned with CamScanner

care descriu mișcarea sistemului mecanic anterioară momentului inițial al ciocnirii, precum și prin considerarea ecuațiilor de legătură interioară; în asemenea situații, studiul fenomenelor de ciocniri se reduce, în general, la rezolvarea următoarelor două probleme:

1) Determinarea parametrilor cinematici de ordinul întîi care caracterizează mișcările elementelor sistemului mecanic după ciocnire;

2) Determinarea percuțiilor de legătură și, eventual, și a percuțiilor interioare — cele exterioare sînt presupuse cunoscute —, la care sînt supuse elementele sistemului mecanic în timpul ciocnirii.

Pentru a examina posibilitățile de rezolvare a acestor probleme, se va observa că sistemul (19.65) de p ecuații Lagrange de specia a doua scrise pentru mișcarea impulsivă a unui sistem mecanic cu p grade de libertate, conține, ca necunoscute, în afara celor p viteze generalizate corespunzătoare momentului final al ciocnirii, și percuțiile interioare, care figurează în expresiile percuțiilor generalizate interioare.

Rezultă de aici că în problemele de ciocniri numărul total al elementelor scalare necunoscute ce trebuiesc determinate este superior numărului ecuațiilor de care se dispune, această constatare păstrîndu-și, evident, valabilitatea oricare ar fi forma în care s-ar prezenta ecuațiile mișcării impulsive.

Se poate trage deci concluzia că problemele de ciocniri nu vor putea fi complet rezolvate decît în cazul cînd sistemul de ecuații scalare ale mișcării impulsive, scrise sub una din formele stabilite în cadrul subpunctului precedent, va fi completat cu noi relații între necunoscutele problemei, relații care, de astă dată, vor avea ca suport logic numai concluziile studiilor experimentale efectuate asupra fenomenelor de ciocniri.

Și, într-adevăr, experiența a scos în evidență existența unor asemenea relații între parametrii cinematici de ordinul întîi corespunzători celor două momente extreme ale duratei ciocnirii, relații a căror formă confirmă valabilitatea *ipotezei lui Newton*, avînd următoarea formulare:

„Între proiecțiile pe axa ciocnirii ale vitezelor relative ale celor două puncte de ciocnire, corespunzătoare momentelor extreme — final și inițial — ale duratei de ciocnire, există un raport determinat, subunitar și depinzînd numai de natura corpurilor în contact".

Precizînd că prin *axă a ciocnirii* se înțelege normala dusă în punctul teoretic de ciocnire la planul tangent comun celor două supra-

Scanned with CamScanner

feţe în contact — ultimele fiind considerate perfect rigide — ale elementelor (S_i) şi (S_j) ale sistemului mecanic, între care are loc ciocnirea interioară, (fig. 19.2), se vor putea scrie următoarele expresii pentru

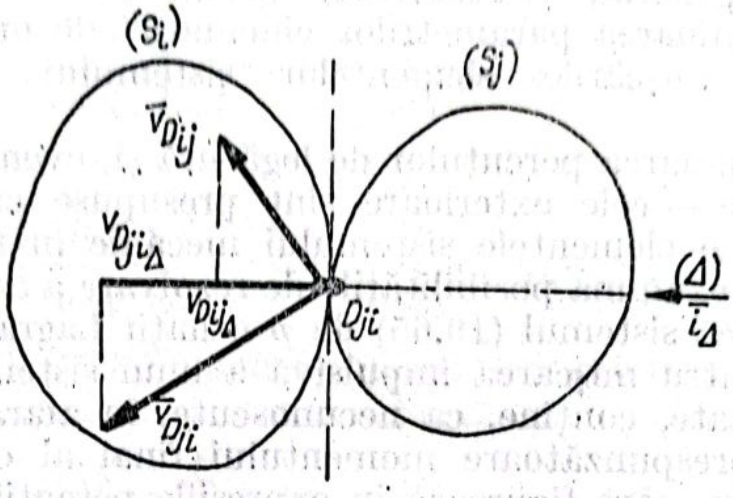


Fig. 19.2

vitezele relative ale punctului teoreti de ciocnire interioară D_{ij} din rigidul (S_i) în raport cu punctul teoretic de ciocnire D_{ji} din elementul (S_j), corespunzătoare celor două momente extreme, t şi $t + \tau$, ale duratei de ciocnire :

$$\bar{v}^0_{D_{ij_r}} = \bar{v}^0_{D_{ij}} - \bar{v}^0_{D_{ji}}; \quad \bar{v}_{D_{ij_r}} = \bar{v}_{D_{ij}} - \bar{v}_{D_{ji}}. \tag{19.70}$$

Acestor viteze relative le corespund următoarele proiecţii pe axa ciocnirii :

$$v^0_{D_{ij_{r\Delta}}} = v^0_{D_{ij\Delta}} - v^0_{D_{ji_\Delta}}; \quad v_{D_{ij_{r\Delta}}} = v_{D_{ij\Delta}} - v_{D_{ji_\Delta}}, \tag{19.71}$$

astfel că ipoteza lui Newton se va traduce prin relaţia

$$\boxed{\frac{v_{D_{ij_{r\Delta}}}}{v_{D_{ji_{r\Delta}}}} = \frac{v_{D_{ij_\Delta}} - v_{D_{ji_\Delta}}}{v^0_{D_{ij_\Delta}} - v^0_{D_{ji_\Delta}}} = -k,} \tag{19.72}$$

cu

$$0 \leqslant k \leqslant 1, \tag{19.73}$$

Scanned with CamScanner

raportul k al celor valori ale vitezei relative, determinat experimental și numit *coeficient de elasticitate la ciocnire*, sau încă *coeficient de restituție*, depinzînd numai de proprietățile elastice ale celor două corpuri în contact, el avînd valoarea zero în cazul corpurilor considerate perfect plastice și valoarea unu în cazul corpurilor ce pot fi considerate perfect elastice; semnul (—) din fața coeficientului de restituție în membrul drept al relației (19.72) indică că este vorba și de o schimbare de sens a vitezei relative în timpul ciocnirii.

Se verifică, cu ușurință, că relația (19.72) nu se modifică dacă în locul vitezei relative a punctului D_{ij} în raport cu punctul D_{ji} s-ar fii luat viteza relativă a ultimului punct în raport cu primul.

Asocierea, la ecuațiile scalare ale mișcărilor impulsive ale unui sistem mecanic, a relațiilor (19.72) de natură experimentală poate permite, în multe cazuri, rezolvarea completă a problemelor de ciocniri ale unor sisteme mecanice mai simple.

În încheierea prezentării problemelor mecanicii ciocnirilor, se va mai semnala faptul că în unele cazuri rezolvarea primei probleme a ciocnirilor va putea fi făcută cu ajutorul unei integrale a torsorului impulsurilor corespunzător întregului sistem mecanic — o integrală a impulsurilor, dacă corpurile care se ciocnesc sînt rigide în mișcare de translație sau corpuri asimilabile cu puncte materiale și o integrală a momentului cinetic, dacă cel puțin unul din corpuri are și mișcare de rotație — , ceea ce face absolut necesară, în asemenea situații, găsirea imediată a axei din spațiu față de care, fie proiecția rezultantei percuțiilor exterioare și de legătură, fie proiecția momentului rezultant al acestor percuții, să fie egală cu zero.

19.2. *Probleme uzuale ale mecanicii ciocnirilor*

Problemele uzuale de ciocniri întîlnite în aplicațiile practice se referă, în deosebi, la sistemele mecanice formate din două rigide care se ciocnesc, acestea fiind asimilate uneori cu puncte materiale, iar alteori fiind considerate rigide ca atare, dar cu mișcări simple: fie două translații, fie două rotații în jurul unor axe fixe, fie o translație și o rotație în jurul unei axe fixe.

În următoarele trei probleme de ciocniri între două corpuri, examinate în continuare, rezolvarea primei probleme a mecanicii ciocnirilor se va face pe baza unei integrale a torsorului impulsurilor și a relației exprimînd ipoteza lui Newton, iar rezolvarea celei de-a

doua probleme se va baza pe utilizarea ecuaţiilor mişcărilor impulsive, scrise pentru elemente izolate din sistem.

19.2.1. Ciocnirea centrică dreaptă a două rigide în translaţie

Ciocnirea a două rigide în mişcare de translaţie, (S_1) şi (S_2), este numită *centrică*, atunci cînd centrele de masă, G_1 şi G_2, ale lor se găsesc pe axa (Δ) a ciocnirii, (fig. 19.3).

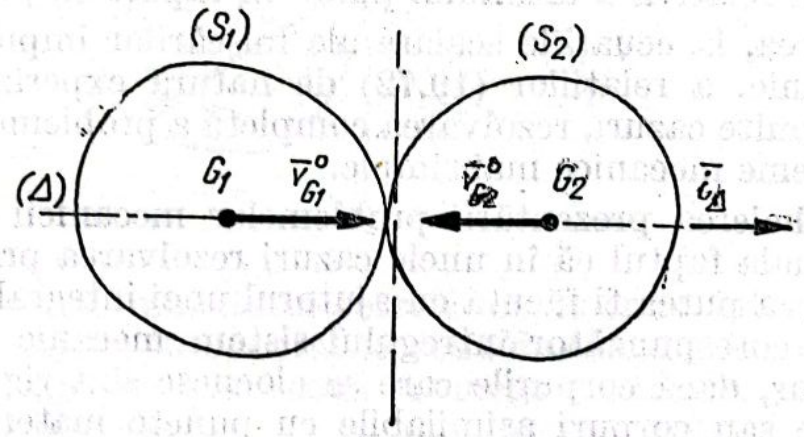


Fig. 19.3

De asemenea, ciocnirea este numită *dreaptă*, atunci cînd vitezele centrelor de masă corespunzătoare momentului iniţial al ciocnirii sînt orientate în lungul axei de ciocnire şi *oblică*, în cazul cînd aceste viteze au orientări oarecari.

Considerînd numai cazul ciocnirii centrice drepte între două rigide, (S_1) şi (S_2), în translaţie, fie libere (fig. 19.4 a), fie rezemate pe un plan paralel la axa ciocnirii, (fig. 19.4 b) — fiind uşor de înţeles, în această ultimă situaţie, că ciocnirea interioară dintre corpuri, căreia îi va corespunde percuţiile interioare

$$\bar{\mathfrak{P}}_{int_{12}} = -\bar{\mathfrak{P}}_{int_{21}} \tag{19.74}$$

orientate tot în lungul axei ciocnirii, niu va provoca ciocniri în punctele de rezemare pe suprafaţa de sprijin, considerată paralelă la axa ciocnirii — , vor rezulta pentru acest sistem mecanic condiţiile

$$\bar{\mathfrak{P}}_{ext} = 0\,; \qquad \bar{\mathfrak{M}} = 0, \tag{19.75}$$

care au drept consecinţă valabilitatea legii de conservare a impulsului sistemului, adică

$$\overline{\mathscr{H}} = \overline{\mathscr{H}}^0. \qquad (19.76)$$

Proiectînd ultima relaţie pe axa (Δ) a ciocnirii, căreia i se fixează un sens pozitiv, arbitrar, cu ajutorul versorului $\bar{i}_\Delta = \text{vers}\,(\Delta)$, în raport cu care vor fi scrise şi valorile scalare ale vitezelor centrelor de masă ale elementelor — aceste viteze putînd avea, fiecare, sensul lui $\bar{i}_\Delta$ sau sens contrar lui $\bar{i}_\Delta$, dar astfel încît să fie realizată ciocnirea —, rezultă următoarea integrală a impulsului

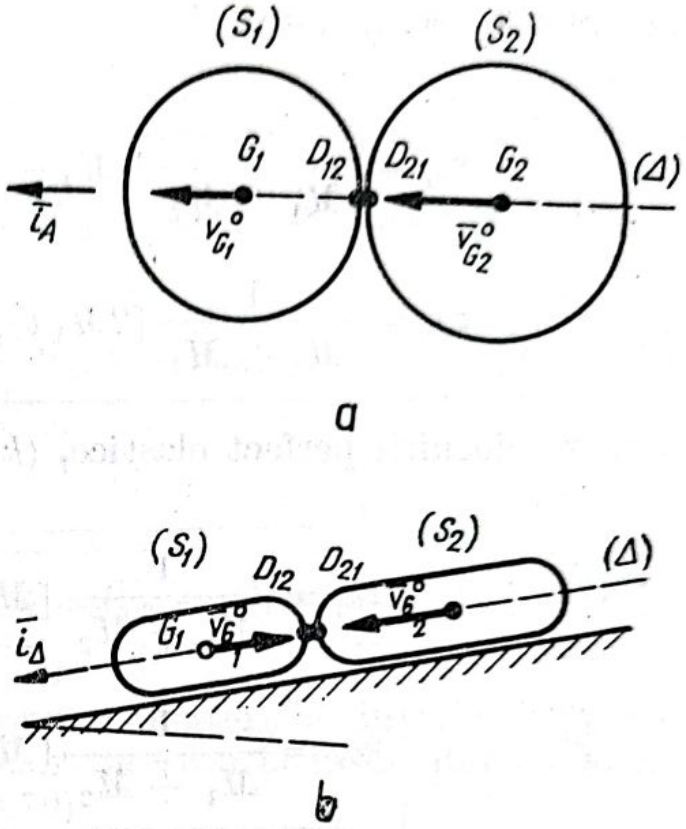


Fig. 19.4

$$M_1 v_{G_1} + M_2 v_{G_2} = M_1 v^0_{G_1} + M_2 v^0_{G_2}. \qquad (19.77)$$

Asociind, la această integrală primă, relaţia traducînd ipoteza lui Newton, care, în aceste condiţii ($\bar{v}_{D_{12}} = \bar{v}_{G_1}$; $\bar{v}_{D_{21}} = \bar{v}_{G_2}$), va lua forma

$$\frac{v_{G_1} - v_{G_2}}{v^0_{G_1} - v^0_{G_2}} = -k, \qquad (19.78)$$

se obţine un sistem de două ecuaţii algebrice în necunoscutele v_{G_1} şi v_{G_2}, cu rădăcinile

$$\boxed{\begin{aligned} v_{G_1} &= \frac{1}{M_1 + M_2}\left[(M_1 - kM_2)\, v^0_{G_1} + M_2(1+k)\, v^0_{G_2}\right]; \\ v_{G_2} &= \frac{1}{M_1 + M_2}\left[M_1(1+k)\, v^0_{G_1} + (M_2 - kM_1)\, v^0_{G_2}\right] \end{aligned}}, \qquad (19.79)$$

cu valorile particulare

$$\boxed{\begin{aligned} v_{G_1} &= \frac{1}{M_1 + M_2}\left[(M_1 - M_2)\, v^0_{G_1} + 2\, M_2\, v^0_{G_2}\right]; \\ v_{G_2} &= \frac{1}{M_1 + M_2}\left[2M_1\, v^0_{G_1} + (M_2 - M_1)\, v^0_{G_2}\right] \end{aligned}} \tag{19.80}$$

în cazul ciocnirii perfect elastice, ($k = 1$), şi

$$\boxed{\begin{aligned} v_{G_1} &= \frac{1}{M_1 + M_2}\left[M_1\, v^0_{G_1} + M_2\, v^0_{G_2}\right]; \\ v_{G_2} &= \frac{1}{M_1 + M_2}\left[M_1\, v^0_{G_1} + M_2\, v^0_{G_2}\right] \end{aligned}} \tag{19.81}$$

în cazul ciocnirii perfect plastice, ($k = 0$); se observă că în ultima situaţie rezultă concluzia

$$v_{G_1} = v_{G_2}, \tag{19.82}$$

adică, în cazul ciocnirii perfect plastice cele două corpuri se deplasează, după ciocnire, cu aceeaşi viteză de translaţie, formînd deci un bloc unic în mişcare.

Dacă cele două corpuri care se ciocnesc sînt asimilate cu puncte materiale — de ex., sînt două sfere mici — , atunci ecuaţiile (19.77) şi (19.78) se scriu cu notaţiile adoptate pentru asemenea situaţii, adică

$$\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0; \quad \frac{v_1 - v_2}{v_1^0 - v_2^0} = -k} \tag{19.83}$$

notaţii cu care vor fi retranscrise şi rădăcinile (19.79).

În ceea ce priveşte percuţiile interioare $\overline{\mathfrak{P}}_{int_{12}} = -\overline{\mathfrak{P}}_{int_{21}}$, ele vor putea fi obţinute din relaţia exprimînd teorema impulsului scrisă

pentru unul din elemente, adică

$$\bar{\mathcal{Q}}_{int_{12}} = \bar{\mathcal{H}}_1 - \bar{\mathcal{H}}_1^0 = -(\bar{\mathcal{H}}_2 - \bar{\mathcal{H}}_2^0) = -\bar{\mathcal{Q}}_{int_{21}}, \tag{19.84}$$

rezultînd astfel următoarele expresii pentru aceste percuții :

$$\boxed{\bar{\mathcal{Q}}_{int_{12}} = M_1(\bar{v}_{G_1} - \bar{v}_{G_1}^0) = -M_2(\bar{v}_{G_2} - \bar{v}_{G_2}^0) = -\bar{\mathcal{Q}}_{int_{21}}}, \tag{19.85}$$

respectiv

$$\boxed{\bar{\mathcal{Q}}_{int_{12}} = m_1(\bar{v}_1 - \bar{v}_1^0) = -m_2(\bar{v}_2 - \bar{v}_2^0) = -\bar{\mathcal{Q}}_{int_{21}}} \tag{19.86}$$

pentru corpurile asimilabile cu puncte materiale ; în relațiile precedente, valorile scalare ale vitezelor de translație de după ciocnire vor fi înlocuite cu expresiile (19.79).

19.2.2. Ciocnirea dreaptă a unui corp în translație cu un masiv în repaus

Fie (S_1) un rigid în mișcare de translație, care lovește un masiv (S_2) în repaus, (fig. 19.5), viteza centrului de masă al rigidului (S_1) corespunzătoare momentului inițial al ciocnirii, $\bar{v}_{G_1}^0$, fiind orientată după axa ciocnirii.

O primă consecință a faptului că cel de-al doilea corp este un masiv, va fi aceea că se va putea accepta aproximarea

$$\frac{M_1}{M_2} \approx 0, \tag{19.87}$$

M_1 fiind masa rigidului în translație, iar M_2 masa masivului.

O a doua consecință a faptului că masa rigidului este enormă în comparație cu cea a primului corp, este aceea că șocurile care se vor transmite legăturilor exterioare la care este supus masivul vor

putea fi total neglijate, adică se va putea considera

$$\overline{\mathcal{R}} = 0. \tag{19.88}$$

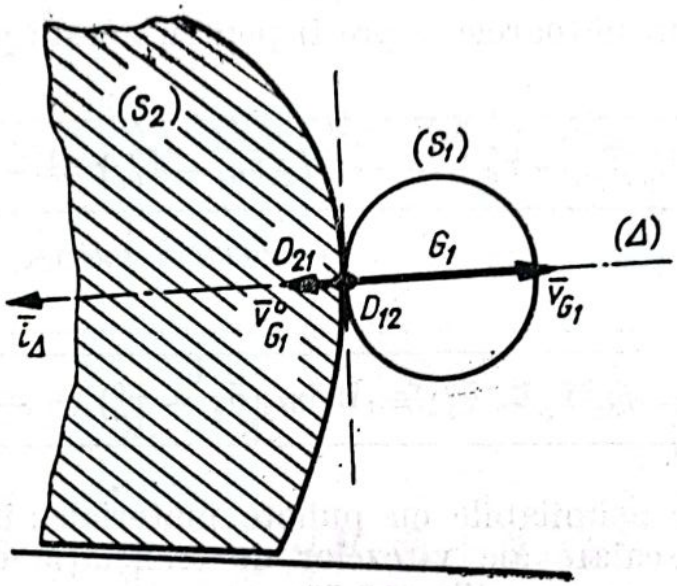


Fig. 19.5

În consecință, ținînd seama și de faptul că ciocnirea fiind numai interioară rezultă și condiția

$$\overline{\mathcal{Q}}_{ext} = 0, \tag{19.89}$$

va putea fi scrisă și de astă dată legea de conservare a impulsului sistemului mecanic, adică

$$\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}^0$$

sau încă, ținînd seama și de condiția $\bar{v}^0_{G_2} = 0$, mai rezultă

$$M_1 \bar{v}_{G_1} + M_2 \bar{v}_{G_2} = M_1 \bar{v}^0_{G_1}. \tag{19.90}$$

Proiectînd ultima relație pe axa ciocnirii și ținînd seama și de relația care traduce ipoteza lui Newton, se obține următorul sistem de ecuații algebrice în necunoscutele v_{G_1} și v_{G_2}:

$$M_1 v_{G_1} + M_2 v_{G_2} = M_1 v^0_{G_1}; \qquad \frac{v_{G_1} - v_{G_2}}{v^0_{G_1}} = -k. \tag{19.91}$$

Din prima ecuaţie, ţinînd seama şi de condiţia (19.87), rezultă concluzia

$$\boxed{v_{G_2} = \frac{M_1}{M_2}(v^0_{G_1} - \bar{v}_{G_1}) = 0}, \tag{19.92}$$

în baza căreia, cea de-a doua dintre ecuaţiile (19.91) va furniza valoarea scalară, raportată la versorul axei ciocnirii, a vitezei centrului de masă al rigidului în translaţie, corespunzătoare momentului final al ciocnirii

$$\boxed{v_{G_1} = -k\, v^0_{G_1}}. \tag{19.93}$$

Percuţia interioară $\bar{\mathfrak{P}}_{int_{12}}$ va fi dată de relaţia

$$\bar{\mathfrak{P}}_{int_{12}} = \bar{\mathcal{H}}_1 - \bar{\mathcal{H}}^0_1 = M_1(\bar{v}_{G_1} - \bar{v}^0_{G_1}).$$

sau încă, ţinînd seama şi de relaţia (19.93), se mai poate scrie

$$\boxed{\bar{\mathfrak{P}}_{int_{12}} = -M_1(1+k)\,\bar{v}^0_{G_1}}. \tag{19.94}$$

În cazul cînd rigidul (S_1) este asimilat cu un punct material, relaţiile (19.93) şi (19.94) vor fi scrise sub formele

$$v_1 = -k\, v^0_1, \tag{19.95}$$

respectiv

$$\boxed{\bar{\mathfrak{P}}_{int_{12}} = m_1(1+k)\,\bar{v}^0_1.}. \tag{19.96}$$

Formula (19.95) permite să se determine, pe cale experimentală, valoarea coeficientului de restricţie pentru o pereche dată de materiale în contact. Pentru aceasta, din unul din materiale se confecţionează

o placă de masă foarte mare, iar în celălalt o sferă de rază foarte mică, astfel încît să fie satisfăcută condiţia (19.87).

Lăsînd sfera să cadă liber, de la înălţimea h_1, pe placă, se va măsura înălţimea h_2, la care se ridică sfera după ciocnire, (fig. 19.6).

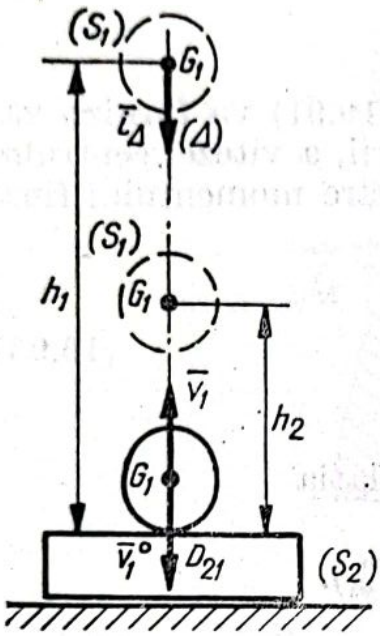


Fig. 19.6

Viteza iniţială de ciocnire va fi viteza finală în căderea liberă a sferei de la înălţimea h_1 de deasupra plcii, viteză dată de formula lui Galileu, adică

$$v^0 = \sqrt{2g\,h_1} \quad (m/s), \tag{19.97}$$

iar viteza corespunzătoare momentului final al ciocnirii va fi viteza iniţială în mişcarea ascendentă pe verticală pe care o capătă sfera în urma ciocnirii de placă, viteză care este dată tot de formula lui Galileu pentru aruncarea pe verticală, adică

$$v = -\sqrt{2g\,h_2} \quad (m/s), \tag{19.98}$$

prezenţa semnului (—) în membrul drept al ultimei relaţii fiind justificată de raportarea valorii scalare a acestei viteze a sferei la versorul $\bar{i}_\Delta$ al axei ciocnirii, ales cu sensul în jos.

Relaţia (19.95), în care se vor înlocui vitezele $v_1^0 = v^0$ şi $v_1 = v$ cu valorile (19.97) şi (19.98), va permite să se determine valoarea căutată a coeficientului de restituţie

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}}. \tag{19.99}$$

19.2.3. Ciocnirea unui corp în rotaţie în jurul unei axe fixe, cu un corp în translaţie

Fie un rigid (S_1) în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1^0$ în jurul axei C_1C_2, imobilizată în punctele C_1 şi C_2, situate la distanţele h_1 şi h_2 de punctul Q de intersecţie a axei de rotaţie cu planul normal

al această axă și conținînd centrul de masă G_1 al elementului (S_1), (fig. 19.7).

Studiul ciocnirii acestui rigid cu un alt corp, (S_2), aflat în mișcare de translație, va fi făcut în următoarele ipoteze simplificatoare

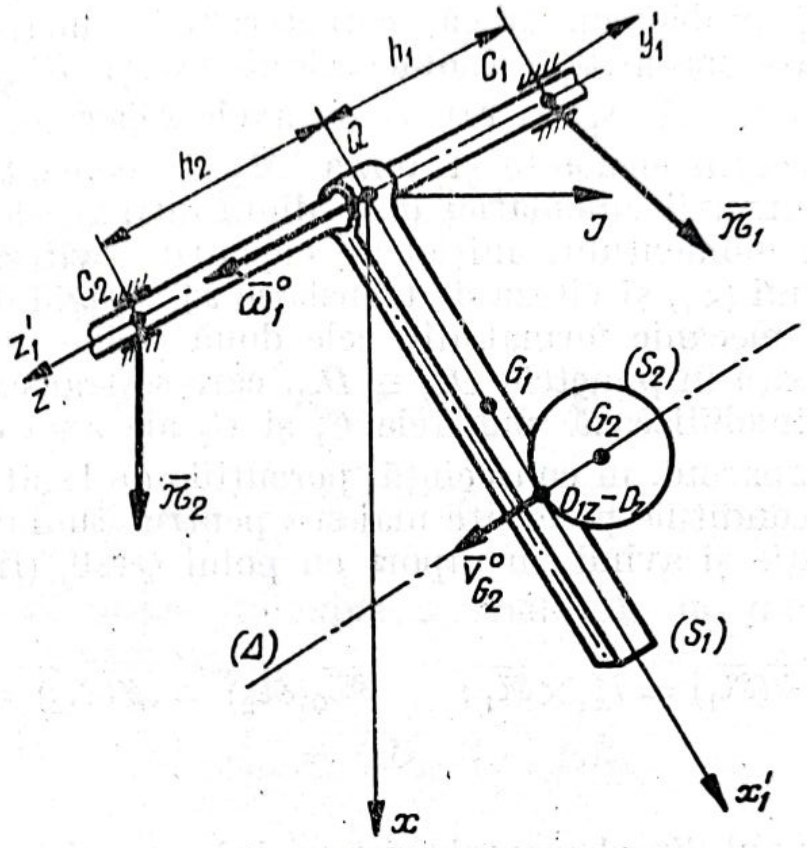


Fig. 19.7

acceptabile totuși în cele mai multe din situațiile întîlnite în aplicațiile practice :

— tot în planul normal la axa de rotație și care conține centrul de masă G_1 al rigidului (S_1) se găsește și punctul teoretic de ciocnire D_{12} din elementul (S_1) — și deci și punctul D_{21} din elementul (S_2) —, precum și centrul de masă G_2, al celui de-al doilea rigid, în momentul ciocnirii ;

— punctele Q, G_1 și D_{12} sînt coliniare, fiind cunoscute distanțele

$$\overline{QG_1} = a(m)\,; \qquad \overline{QD_{12}} = b\,(m)\,; \tag{19.100}$$

— axa ciocnirii, (Δ), este normală la dreapta QD_{12} ;

— viteza de translație inițială $\bar{v}_{G_2}^0$ a elementului (S_2) este orientată după axa ciocnirii.

Este ușor de înțeles că aceste condiții pot fi considerate pe deplin îndeplinite în cazul cînd rigidul (S_1), în mișcare de rotație în jurul axei fixe (Δ), este o bară subțire, sau o placă subțire, al cărui plan conține și axa de rotație.

În fine, se mai consideră cunoscute, ca de obicei, datele necesare rezolvării problemei, adică, caracteristicile inerțiale ale celor două elemente — masa M_1 și momentele de inerție $J'_{1_{xz}}$, $J'_{1_{yz}}$ și $J_1 = J'_{1_{z_z}}$ ale elementului (S_1) în raport cu axele reperului $Qx'_1y'_1z'_1$ invariabil atașat acestui elemente și masa M_2 a elementului (S_2) —, precum și parametrii cinematici de ordinul întîi ai celor două rigide corespunzători momentului inițial al ciocnirii — viteza unghiulară $\bar{\omega}_1^0$ a elementului (S_1) și viteza de translație $\bar{v}_{G_2}^0$ a rigidului (S_2).

Sistemul mecanic format din cele două rigide suferă numai o ciocnire interioară în punctele $D_{12} \equiv D_{21}$, care se transmite însă și în lagărele care imobilizează punctele C_1 și C_2 ale axei de rotație, în aceste puncte apărînd, în consecință, percuțiile de legătură $\bar{\mathcal{R}}_1$ și $\bar{\mathcal{R}}_2$, normale — în condițiile precizate mai sus pentru studiul problemei — la axa de rotație și avînd, în raport cu polul $Q \equiv 0$, (fig. 19.7), momentele

$$\bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\mathcal{R}}_1) = \bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{R}}_1) = \bar{r}'_{C_1} \times \bar{\mathcal{R}}_1 ; \qquad \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\mathcal{R}}_2) = \bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{R}}_2) = \bar{r}'_{C_2} \times \bar{\mathcal{R}}_2. \tag{19.101}$$

Întrucît unul din elementele sistemului mecanic are mișcare de rotație, pentru rezolvarea primei probleme a mecanicii ciocnirilor — determinarea parametrilor cinematici $\bar{\omega}_1$ și $\bar{v}_{G_2}$ ai elementelor, corespunzărori momentului final al ciocnirii —, se va pleca de la teorema momentului cinetic, scrisă pentru întregul sistem mecanic, teoremă care, în condițiile acestei probleme

$$\bar{\mathcal{R}}_{ext} = 0 ; \quad \bar{\mathcal{M}}(\bar{\mathcal{R}}_{ext}) = \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\mathcal{R}}_{ext}) = 0, \tag{19.102}$$

va fi exprimată prin relația

$$\bar{\mathcal{K}} - \bar{\mathcal{K}}^0 = \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\mathcal{R}}_1) + \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{\mathcal{R}}_2). \tag{19.103}$$

Este ușor de văzut că dacă se proiectează ultima relație pe axa de rotație C_1C_2, aleasă ca axă $Qz'_1 \equiv Oz$ și care intersectează suporturile

percuţiilor $\overline{\mathcal{R}}_1$ şi $\overline{\mathcal{R}}_2$, atunci proiecţiile pe această axă a celor doua momente ale percuţiilor de legătură vor fi egale cu zero şi deci va putea fi scrisă integrala corespunzătoare a momentului cinetic, adică

$$\mathcal{K}'_z = \mathcal{K}'^0_z. \tag{19.104}$$

Observînd că momentele cinetice faţă de axa $Qz'_1 \equiv Oz$ ale celor două rigide au expresiile

$$\mathcal{K}'_{1z} = \mathcal{K}'_{Q_1 rot_z} = J_1 \omega_1, \tag{19.105}$$

respectiv

$$\mathcal{K}'_{2z} = \mathcal{K}_{2z} = \overline{\mathcal{K}}_2 \bar{k}'_1 = (\bar{r}'_{G_2} \times M_2 \bar{v}_{G_2}) \bar{k}'_1 = (\bar{r}'_{D_{21}} \times M_2 \bar{v}_{G_2}) \bar{k}'_1 =$$

$$= (\bar{r}'_{D_{12}} \times M_2 \bar{v}_{G_2}) \bar{k}'_1,$$

sau încă, ţinînd seama de expresia analitică, în raport cu reperul $Qx'_1y'_1z'_1$, a vectorului $\bar{r}'_{D_{12}}$:

$$\bar{r}'_{D_{12}} = \overline{QD}_{12} \bar{i}'_1 = b \bar{i}'_1,$$

precum şi de orientarea vectorului $\bar{v}_{G_2} = v_{G_2} \bar{j}'_1 - v_{G_2}$ fiind valoarea scalară a vitezei $\bar{v}_{G_2}$, raportată la versoul axei Qy'_1, paralelă la axa ciocnirii (fig. 19.7)—, care permit să se scrie

$$\mathcal{K}'_{2z} = bM_2 v_{G_2} (\bar{i}'_1 \times \bar{j}'_1) \bar{k}'_1 = bM_2 v_{G_2} \tag{19.106}$$

se obţin următoarele expresii finale pentru cele două valori, corespunzătoare momentului iniţial şi momentului final al ciocnirii. ale momentului cinetic al sistemului mecanic în raport cu axa de rotaţie

$$\mathcal{K}'^0_z = \mathcal{K}'^0_{1z} + \mathcal{K}'^0_{2z} = J_1 \omega^0_1 + bM_2 v^0_{G_2}, \tag{19.107}$$

respectiv

$$\mathcal{K}'_z = \mathcal{K}'_{1z} + \mathcal{K}'_{2z} = J_1 \omega_1 + bM_2 v_{G_2}. \tag{19.108}$$

Scanned with CamScanner

Pe de altă parte, în relaţia care va traduce, în cazul acestei probleme, ipoteza lui Newton, se vor putea face înlocuirile

$$v^0_{D_{12\Delta}} = v^0_{D_{12}} = b\omega^0_1\,; \quad v_{D_{12\Delta}} = v_{D_{12}} = b\,\omega_1 \tag{19.109}$$

şi

$$v^0_{D_{21\Delta}} = v^0_{D_{21}} = v^0_{G_2}\,; \quad v_{D_{21\Delta}} = v_{D_{21}} = v_{G_2}. \tag{19.110}$$

Sistemul format din integrala momentului cinetic (19.10)4 şi din relaţia exprimînd ipoteza lui Newton va lua astfel forma

$$\begin{aligned} &J_1\,\omega_1 + b\,M_2\,v_{G_2} = J_1\omega^0_1 + bM_2\,v^0_{G_2}\,; \\ &\frac{b\omega_1 - v_{G_2}}{b\omega'_1 - v^0_{G_2}} = -k, \end{aligned} \tag{19.111}$$

respectiv forma

$$\begin{aligned} &J_1\,\omega_1 + bm_2\,v_2 = J_1\,\omega^0_1 + bm_2\,v^0_2\,; \\ &\frac{b\omega^0_1 - v_2}{b\omega^0_1 - v^0_2} = -k, \end{aligned} \tag{19.112}$$

dacă elementul (S_2) este asimilat cu un punct material, rădăcinile sistemului (19.111) avînd expresiile

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{J_1 + M_2 b^2}\,[(J_1 - k\,M_2\,b^2)\,\omega^0_1 + b\,M_2\,(1+k)\,v^0_{G_2}]\,; \\ v_{G_2} &= \frac{1}{J_1 + M_2 b^2}\,[J_1\,b(1+k)\,\omega^0_1 + (M_2 b^2 - k\,J_1)\,v^0_{G_2}] \end{aligned}}\,. \tag{19.113}$$

Trecînd la rezolvarea celei de-a doua probleme a mecanicii ciocnirilor — determinarea percuţiei interioare $\overline{\mathfrak{P}}_{int_{12}} = \overline{\mathfrak{P}}_{12}$, precum

şi a percuţiilor de legătură $\overline{\mathcal{R}}_1$ şi $\overline{\mathcal{R}}_2$, ultimele normale la axa de rotaţie, se va observa mai întîi că percuţia interioară

$$\overline{\mathcal{Q}}_{int_{12}} = \overline{\mathcal{Q}}_{12} = -\overline{\mathcal{Q}}_{int_{21}} = -M_2(\bar{v}_{G_2} - \bar{v}^0_{G_2}) = \mathcal{Q}_{12}\,\bar{j}'_1, \quad (19.114)$$

este orientată, în cazul de faţă, după axa ciocnirii, deoarece vitezele $\bar{v}^0_{G_2}$ şi $\bar{v}_{G_2}$ au, ambele, direcţia axei ciocnirii.

Pentru determinarea percuţiilor amintite, se vor folosi ecuaţiile de proiecţie pe axele reperului invariabil legat de rigidul (S_1) ale relaţiilor exprimînd teorema impulsului şi teorema momentului cinetic scrise pentru acest din urmă element, adică

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{H}}_1 - \overline{\mathcal{H}}^0_1 = \overline{\mathcal{Q}}_{12} + \overline{\mathcal{R}}_1 + \overline{\mathcal{R}}_2\,; \\ &\overline{\mathcal{K}}_1 - \overline{\mathcal{K}}^0_1 = \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{Q}}_{12}) + \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_1) + \overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_2), \end{aligned} \quad (19.115)$$

cu

$$\overline{\mathcal{H}}_1 - \overline{\mathcal{H}}^0_1 = M_1(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}^0_1) \times \bar{r}'_{G_1} \quad (19.116)$$

$$\overline{\mathcal{K}}_1 - \overline{\mathcal{K}}^0_1 = \overline{\mathcal{K}}_{Q_{1rot}} - \overline{\mathcal{K}}^0_{Q_{1rot}} = (-J'_{1_{xz}}\,\bar{i}'_1 - J'_{1_{yz}}\,\bar{j}'_1 + J_1\,\bar{k}'_1)(\omega_1 - \omega^0_1) \quad (19.117)$$

şi

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{Q}}_{12}) = \bar{r}'_{D_{12}} \times \overline{\mathcal{Q}}_{12} = b\bar{i}'_1 \times \mathcal{Q}_{12}\,\bar{j}'_1 = b\,\mathcal{Q}_{12}\,\bar{k}'_1\,; \\ &\overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_1) = \bar{r}'_{C_1} \times \overline{\mathcal{R}}_1 = -h_1\bar{k}'_1 \times (\mathcal{R}'_{1x}\,\bar{i}'_1 + \mathcal{R}'_{1y}\bar{j}'_1)\,; \\ &\overline{\mathcal{M}}(\overline{\mathcal{R}}_2) = \bar{r}'_{C_2} \times \overline{\mathcal{R}}_2 = h_2\bar{k}'_1 \times (\mathcal{R}'_{2x}\bar{j}'_1 + \mathcal{R}'_{2y}\,\bar{j}'_1). \end{aligned} \quad (19.118)$$

Prin proiectarea ecuaţiilor vectoriale (19.115) pe axele reperului invariabil ataşat elementului (S_1), rezultă sistemul de ecuaţii scalare

$$\begin{aligned} &(1) \quad 0 = \mathcal{R}'_{1x} + \mathcal{R}'_{2x}\,; \\ &(2) \quad M_1 a\,(\omega_1 - \omega^0_1) = \mathcal{Q}_{12} + \mathcal{R}'_{1y} + \mathcal{R}'_{2y}\,; \\ &(3) \quad -J'_{1_{xz}}\,(\omega_1 - \omega^0_1) = h_1\,\mathcal{R}'_{1y} - h_2\,\mathcal{R}'_{2y}\,; \\ &(4) \quad -J'_{1_{yz}}\,(\omega_1 - \omega^0_1) = -h_1\,\mathcal{R}'_{1x} + h_2\,\mathcal{R}'_{2x}\,; \\ &(5) \quad J_1(\omega_1 - \omega^0_1) = b\,\mathcal{Q}_{12}\,, \end{aligned} \quad (19.119)$$

care, rezolvat în raport cu necunoscutele $\mathcal{Q}_{12}$, $\mathcal{N}'_{1x}$, $\mathcal{N}'_{1y}$, $\mathcal{N}'_{2x}$ și $\mathcal{N}'_{2y}$, va furniza următoarele valori ale acestora :

$$\mathcal{Q}_{12} = \frac{J_1}{b}(\omega_1 - \omega_1^0);$$

$$\mathcal{N}'_{1x} = \frac{J'_{1_{yx}}}{h_1 + h_2}(\omega_1 - \omega_1^0);$$

$$\mathcal{N}'_{1y} = \frac{1}{h_1 + h_2}\left[h_2\left(M_1 a - \frac{J_1}{b}\right) - J'_{1_{xz}}\right](\omega_1 - \omega_1^0); \qquad (19.120)$$

$$\mathcal{N}'_{2x} = -\frac{J'_{1_{yz}}}{h_1 + h_2}(\omega_1 - \omega_1^0);$$

$$\mathcal{N}'_{2y} = \frac{1}{h_1 + h_2}\left[h_1\left(M_1 a - \frac{J_1}{b}\right) + J'_{1_{xz}}\right](\omega_1 - \omega_1^0)$$

În cazul cînd sînt satisfăcute condițiile

$$J'_{1_{xz}} = J'_{1_{yz}} = 0; \qquad b = \frac{J_1}{M_1 a} = l_r, \qquad (19.121)$$

adică atunci cînd axa de rotație este axă principală de inerție și distanța punctului teoretic de ciocnire interioară la axa de rotație este egală cu lungimea redusă a unui pendul fizic cu aceleași caracteristici inerțiale ca și ale rigidului (S_1) și cu axa C_1C_2 funcționînd ca axa de suspensie, rezultă consecințele

$$\mathcal{N}'_{1x} = \mathcal{N}'_{1y} = \mathcal{N}'_{2x} = \mathcal{N}'_{2y} = 0; \qquad (19.122)$$

adică în lagăre nu mai apar percuții de legătură.

Punctul de ciocnire interioară D_{12}, pentru care sînt satisfăcute condițiile de mai sus, este numit *centru de percuție* și el joacă un rol important în aplicațiile tehnice ale mecanicii ciocnirilor, în care se urmărește eliminarea percuțiilor de legătură.

Scanned with CamScanner

Se reamintesc condiţiile ce trebuiesc să fie satisfăcute pentru a exista un centru de percuţie :

— situarea centrelor de masă a celor două corpuri, precum şi a punctului de ciocnire interioară a lor, în acelaşi plan normal la axa de rotaţie ;

— alegerea axei de rotaţie după o axă principală de inerţie ;

— stabilirea punctului de ciocnire interioară în planul ce conţine axa de rotaţie şi centrul de masă al corpului în rotaţie ;

— orientarea percuţiei interioare după normala la planul ce conţine axa de rotaţie şi punctul teoretic de ciocnire interioară ;

— plasarea punctului teoretic de ciocnire interioară la o distanţă de axa de rotaţie egală cu lungimea redusă a pendulului fizic reprezentat prin rigidul în rotaţie, în cazul cînd axa de rotaţie ar deveni axă de suspensie.

§ 20. Mecanica corpurilor cu mase variabile

În toate problemele de mecanică expuse în capitolele şi paragrafele precedente ale prezentei lucrări, masele elementelor sistemelor mecanice examinate au fost sistematic considerate constante în timp, nu numai în sensul independenţei lor de stările de mişcare ale corpurilor — ipoteză fundamentală a mecanicii clasice, care o deosebeşte fundamental de mecanica relativistă —, ci şi în sensul invariabilităţii în timp a cantităţii de substanţă conţinută de fiecare element al sistemului.

În aplicaţiile tehnice se întîlnesc totuşi şi situaţii cînd elementele unui sistem mecanic — sau, cel puţin, unele din ele — schimbă continuu particole materiale, fie cu corpuri din afara sistemului, fie cu alte elemente din sistem, ca exemple concrete putînd fi date piesele care pierd, prin prelucrare la maşini unelte, straturi de material, bobinele pe care se înfăşoară, sau se desfăşoară straturi de fire, tobele pe care se înfăşoară, sau se desfăşoară, cabluri etc.

Acest schimb material continuu, care pentru un corp determinat poate fi fie un proces de anexare, fie unul de detaşare, fie chiar într-un caz mai general, un proces simultan de detaşare şi de anexare de particole materiale, implică considerarea caracteristicilor inerţiale ale unui asemenea element ca funcţii continue de timp, fără însă a se depăşi prin aceasta cadrul mecanicii clasice, pe de o parte, pentru motivul că această modificare a caracteristicilor inerţiale nu este con-

Scanned with CamScanner

ceptă în sensul mecanicii relativiste şi, pe de altă parte, datorită faptului că schimbul de substanţă cu exteriorul se efectuează, în fond, prin mase elementare, care rămîn constante pe toată durata procesului mecanic considerat.

Construcţia mecanicii unor asemenea corpuri cu mase variabile în mişcare va fi prezentată în continuare.

20.1. *Dinamica rigidului cu masă variabilă*

20.1.1. Modelul mecanic al dinamicii rigidului cu masă variabilă

Modelul mecanic care va sta la baza construcţiei mecanicii corpurilor cu mase variabile în prezenta lucrare este *rigidul cu masă variabilă*, cu substanţa distribuită în trei subdomenii distincte :

— un subdomeniu cu masă constantă în timp, repartizată într-un volum de asemenea constant, cu densitatea invariabilă în timp, funcţie cel mult de punct, dacă subdomeniul respectiv nu este omogen ;

— un subdomeniu cu masă variabilă în timp ca urmare a unui proces de anexare continuă de particole materiale, repartizată pe un volum variabil în timp după o lege cunoscută ;

— un subdomeniu cu masa variabilă în timp printr-un proces continuu de detaşare de particule materiale, repartizată pe un volum de asemenea variabil în timp, după o lege cunoscută.

Pentru construcţia, în această lucrare, a dinamicii rigidelor cu mase variabile, se vor adopta următoarele ipoteze simplificatoare de lucru, acceptabile în foarte multe din situaţiile întîlnite în practica inginerească mecanică :

1) Rigidul cu masă variabilă prezintă simetrie de revoluţie în repartiţia masei pentru toate cele trei subdomenii ale lui, această simetrie păstrîndu-se şi în tot timpul cît se produce schimbul de particule materiale cu exteriorul.

2) Vitezele relative ale maselor elementare schimbate cu exteriorul au, înainte de procesul de detaşare, respectiv după procesul de anexare, valori zero, aceasta însemnînd că în orice moment masa constantă, masa anexată pînă în acel moment şi masa detaşabilă existentă în rigid în acel moment formează un ansamblu rigid.

3) Procesele de anexare şi de detaşare de particule materiale pot avea şi caracter impulsiv, adică viteza unei mase elementare

anexate la momentul t variază instantaneu de la o valoare $\bar{v}_a$, corespunzătoare mișcării de dinaintea anexării, pînă la valoarea $\bar{v}_{\acute{a}}$, corespunzătoare poziției din rigid în care se face anexarea, iar viteza unei mase elementare care se detașează la un moment t variază instantaneu de la valoarea $\bar{v}_d$, corespunzătoare poziției din rigid în care se produce detașarea, pînă la valoarea $\bar{v}_d^*$, cu care se va mișca, după detașare, particula în spațiu.

4) Punctele teoretice de legătură cu exteriorul a rigidului cu masă variabilă sînt situate numai în subdomeniul cu masă constantă, aceasta însemnînd că pozițiile acestor puncte sînt independente de procesele de anexare și de detașare de particule materiale.

5) Forțele interioare corespunzătoare întregului rigid cu masă variabilă, inclusiv cele din zonele de separație dintre subdomenii, formează, în cazul proceselor neimpulsive de anexare și detașare de particule materiale, un sistem echivalent cu zero la nivelul întregului rigid.

6) Mișcarea spațială a rigidului cu masă variabilă rezultă dintr-o translație spațială oarecare și o rotație în jurul axei (Δ) de simetrie de revoluție în repartiția masei rigidului, iar această axă își păstrează direcția fixă în spațiu.

Ipotezele adoptate mai sus permit să se aleagă axa (Δ) de simetrie de revoluție a rigidului cu masa variabilă ca axă Qz' a reperului $(\mathscr{R}') \equiv Qx'y'z'$ invariabil legat de rigid, cu originea Q a acestui reper aleasă în subdomeniul cu masă constantă; celelalte două axe ale reperului atașat rigidului vor fi deci perpendiculare la axa de simetrie (Δ), (fig. 20.1).

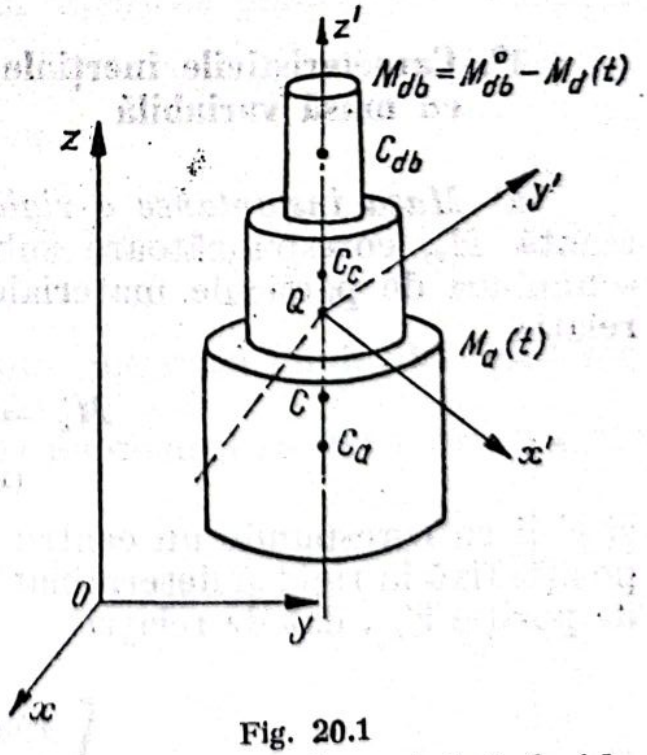


Fig. 20.1

Alegerea, în baza ultimei ipoteze de lucru, a axei fixe Oz a reperului absolut la care va fi raportată mișcarea rigidului cu masă variabilă după o paralelă la direcția axei (Δ), va permite reducerea parametrilor de poziție ai rigidului cu masă variabilă numai la cele trei coordonate ale polului Q și la unghiul de rotație proprie.

În consecinţă, ecuaţiile finite ale modelului mecanic considerat vor avea formele

$$\begin{aligned} x_Q &= x_Q(t) \\ y_Q &= y_Q(t) \\ z_Q &= z_Q(t) \\ \varphi &= \varphi(t), \end{aligned} \tag{20.1}$$

iar parametrii cinematici de ordinul întîi şi doi ai lui vor avea expresiile

$$\bar{v}_Q = \dot{x}_Q \bar{i} + \dot{y}_Q \bar{j} + \dot{z}_Q \bar{k}; \qquad \bar{\omega} = \dot{\varphi}\, \bar{k}' = \dot{\varphi}\bar{k}, \tag{20.2}$$

respectiv

$$\bar{a}_Q = \ddot{x}_Q \bar{i} + \ddot{y}_Q \bar{j} + \ddot{z}, \qquad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi}\, \bar{k}' = \ddot{\varphi}\, \bar{k}. \tag{20.3}$$

20.1.2. Probleme generale ale dinamicii rigidului cu masă variabilă.

1°. Caracteristicile inerţiale ale rigidului cu masă variabilă

a) *Masa instantanee a rigidului cu masă variabilă.* Masa constantă M_c, corespunzătoare subdomeniului în care nu se produc schimburi de particule materiale cu exteriorul, va fi definită prin relaţia

$$M_c = \int_{(M_c)} dm \tag{20.4}$$

şi ei îi va corespunde un centru de masă parţial al rigidului, C_c, cu poziţie fixă în rigid şi determinată, în raport cu polul Q, prin vectorul de poziţie $\bar{r}'_{C_c}$, dat de relaţia

$$\bar{r}'_{C_c} = \frac{\int_{(M_c)} \bar{r}'\, dm}{M_c} = z'_{C_c} \bar{k}' \tag{20.5}$$

Se înțelege că datorită simetriei menționate a modelului mecanic adoptat, acest centru parțial de masă se va afla pe axa $(\Delta) \equiv Qz'$; dacă polul Q va fi ales chiar în acest centru, atunci va rezulta, evident condiția

$$\bar{r}'_{C_c} = 0. \tag{20.6}$$

Masa anexată la momentul t, notată $M_a(t)$, va fi definită prin relația

$$M_a(t) = \int_{(M_a(t))} dm > 0, \tag{20.7}$$

funcția $M_a(t)$ satisfăcînd următoarele condiții pentru valorile extreme ale intervalului de timp $[0\,;\, t_f]$ în care se studiază mișcarea rigidului cu masă variabilă

$$M_a(0) = 0\,; \quad M_a(t_f) = M_a^0 > 0, \tag{20.8}$$

M_a^0 reprezentînd masa totală anexată la sfîrșitul intervalului de timp considerat; masei variabile $M_a(t)$ îi va corespunde un *centru instantaneu parțial de masă*, C_a, determinat în raport cu polul Q prin vectorul de poziție $\bar{r}'_{C_a}$ dat de relația

$$\bar{r}'_{C_a} = \frac{\int_{(M_a(t))} \bar{r}'\, dm}{M_a(t)} = \bar{r}'_{Ca}(t) = z'_{C_a}(t)\bar{k}' \tag{20.9}$$

centru situat, din aceleași motive de simetrie a modelului mecanic adoptat, tot pe axa $(\Delta) \equiv Qz'$, (fig. 20.1).

Masa detașată din rigid pînă la momentul $t \in [0\,;\, t\,]$ va fi definită prin relația

$$M_d(t) = \int_{(M_d(t))} dm > 0, \tag{20.10}$$

cu funcția $M(t)$ satisfăcînd condițiile

$$M_d(0) = 0\,; \qquad M_d(t_f) = M_{db} > 0, \tag{20.11}$$

Scanned with CamScanner

unde M^0_{db} este masa totală detașabilă în intervalul de timp $[0;t_f]$, existentă în rigid la momentul zero; masa detașabilă la momentul $t \in [0;t_f]$, aparținînd rigidului în acel moment, va fi determinată prin relația

$$M_{db}(t) = M^0_{db} - M_d(t) \geqslant 0 \tag{20.12}$$

și ei îi va corespunde un *centru instantaneu parțial de masă* C_{db}, determinat în raport cu polul Q prin vectorul de poziție $\bar{r}'_{C_{db}}$, dat de relația

$$\bar{r}'_{C_{db}} = \frac{M^0_{db}\bar{r}'^0_{C_{db}} - M_d(t)\bar{r}'_{C_d}}{M^0_{db} - M_d(t)} = \bar{r}'_{C_{db}}(t) = z'_{C_{db}}(t)\,\bar{k}' \tag{20.13}$$

cu

$$\bar{r}'_{C_d} = \frac{\int_{(M_d(t))} \bar{r}'\,dm}{M_d(t)} = \bar{r}'_{C_d}(t) = z'_{C_d}(t)\,\bar{k}' \tag{20.14}$$

$\bar{r}'^0_{C_{db}}$ fiind vectorul de poziție al centrului de masă al masei detașabile inițiale M^0_{db}; din motivele de simetrie cunoscute, și centrul de masă C_{db} se va găsi pe axa $(\Delta) \equiv Qz'$, (fig. 20.1).

Cu aceste precizări, se poate trece la definirea *masei instantanee la momentul t a rigidului cu masă variabilă*, ea fiind definită prin relația

$$M = \int_{(M)} dm = \int_{(M_c)} dm + \int_{(M_d(t))} dm = \int_{[M^0_{db} - M_d(t)[} dm = [M_c + M^0_{db} + M_a(t) - M_d(t)] \tag{20.15}$$

acestei mase instantanee totale corespunzîndu-i un *centru instantaneu de masă la momentul t al rigidului cu masă variabilă*, determinat în raport cu polul Q prin vectorul de poziție $\bar{r}'_C$, dat de relația

$$\bar{r}'_C = \frac{M_c\bar{r}'_{C_c} + M^0_{db}\bar{r}'^0_{C_{db}} + M_a(t)\bar{r}'_{C_a} - M_d(t)\bar{r}'_{C_d}}{M_c + M^0_{db} + M_a(t) - M_d(t)} = \bar{r}'_C(t) = z^0_C(t)\bar{k}', \tag{20.16}$$

b) *Momentul de inerție axial l rigidului cu masă variabilă.* Ipotezele de lucru adoptate la început, precum și modul de alegere a reperului invariabil atașat rigidului cu masă variabilă în mișcare, permit să se tragă următoarele concluzii privind momentele de inerție ale rigidului cu masă variabilă considerat :

— Întrucît rotația instantanee se efectuează în jurul axei Oz, de direcție fixă în spațiu și această axă este, în orice moment $t \in [0\,;\, t_f]$, axă centrală de inerție, în expresiile caracteristicilor cinetice — și deci și în ecuațiile de mișcare — va figura numai momentul de inerție în raport cu axa Oz', notat cu simbolul $J'_z = J = J(t)$;

— momentul de inerție axial J va conține, în expresia sa, atît termenul constant, J_c, corespunzător masei constante M_c, cît și termenii variabili în timp, datorați masei anexate la momentul t și masei detașabile existente în rigid la momentul t.

Rezultă de aici că inerția la rotație a modelului mecanic adoptat va fi măsurată prin momentul de inerție axial, dat de relația

$$J(t) = \int_{(M)} (x'^2 + y'^2)\, dm = \int_{(M_c)} (x'^2 + y'^2)\, dm + \int_{(M_a(t))} (x'^2 + y'^2)\, dm +$$

$$+ \int_{[M^0_{db} - M_a(t)]} (x'^2 + y'^2)\, dm, \qquad (20.17)$$

cu următoarele semnificații pentru cele trei integrale

$$\int_{(M_c)} (x'^2 + y'^2)\, dm = J_c\,; \quad \int_{(M_a(t))} (x'^2 + y'^2)\, dm = J_a(t)\,;$$

$$\int_{[M^0_{db} - M_a(t)]} (x'^2 + y'^2)\, dm = J^0_{db} - J_a(t), \qquad (20.18)$$

J_c fiind momentul de inerție față de axa Qz a subdomeniului cu masă constantă al rigidului, $J_a(t)$ fiind moentul de inerție față de axa Qz' al masei anexate la momentul t, iar $J^0_{db} - J_a(t)$ reprezentînd momentul

de inerție față de axa Qz' al masei detașabile existente în rigid la momentul t, J^0_{db} fiind momentul de inerție față de aceeași axă a masei detașabile inițiale.

Rezultă deci următoarea expresie pentru *momentul de inerție axial instantaneu al rigidului cu masă variabilă* :

$$\boxed{J(t) = J_c + J^0_{db} + J_a(t) - J_d(t)}, \tag{20.19}$$

2°. Caracteristicile cinetice ale rigidului cu masă variabilă

a) *Caracteristicile cinetice vectoriale.*

Impulsul rigidului cu masă variabilă. Impulsul, la momentul $t \in [0\,;\, t_f]$, al rigidului cu masă variabilă va fi definit prin relația

$$\overline{\mathscr{H}} = \int\limits_{(M(t))} dm\,\bar{v} = \int\limits_{(M(t))} dm\,(\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}') = \int\limits_{(M(t))} dm\,\bar{v}_Q + \int\limits_{(M(t))} dm\,(\bar{\omega} \times \bar{r}') \tag{20.20}$$

cu

$$\int\limits_{(M(t))} dm\,\bar{v}_Q = \left(\int\limits_{(M(t)} dm\right) \bar{v}_Q = M(t)\,\bar{v}_Q \tag{20.21}$$

și cu

$$\int\limits_{(M(t))} dm\,(\bar{\omega} \times \bar{r}') = \bar{\omega} \times \int\limits_{(M(t))} \bar{r}\,dm = \bar{\omega} \times M(t)\,\bar{r}'_C = 0, \tag{20.22}$$

ca urmare a coliniarității — în ipotezele de lucru adoptate — a vectorilor $\bar{\omega}$ și $\bar{r}'_C$.

Rezultă deci următoarea expresie finală a impulsului, la momentul $t \in [0\,;\, t_f]$, al rigidului cu masă variabilă considerat :

$$\boxed{\overline{\mathscr{H}} = M(t)\,\bar{v}_Q = [M_c + M^0_{db} + M_a(t) - M_d(t)]\,\bar{v}_Q} \tag{20.23}$$

Momentul cinetic în raport cu polul Q al rigidului cu masă variabilă, corespunzător momentului t.

Acest moment cinetic va fi definit prin relaţia

$$\overline{\mathcal{K}}_Q = \int\limits_{(M(t))} \bar{r}' \times dm\,\bar{v} = \int\limits_{(M(t)} \bar{r}' \times dm\,(\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}') =$$

$$= \int\limits_{(M(t))} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}_Q + \int\limits_{(M(t))} \bar{r}'\bar{r} \times dm\bar{v}_{rot}, \tag{20.24}$$

cu

$$\int\limits_{(M(t))} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}_Q = \left(\int\limits_{(M(t))} \bar{r}'\,dm \right) \times \bar{v}_Q = M(t)\,\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q \tag{20.25}$$

şi cu cea de-a doua integrală descompusă într-o sumă de trei integrale, corespunzătoare celor trei subdomenii distincte ale corpului, adică

$$\overline{\mathcal{K}}_{Q_{rot}} = \int\limits_{(M(t))} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}_{rot} = \int\limits_{(M_c)} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}_{rot} + \int\limits_{(M_a(t))} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}_{rot} +$$

$$+ \int\limits_{[M^0_{db} - M_a(t)]} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}_{rot}, \text{ *)} \tag{20,26}$$

cu următoarele semnificaţii pentru fiecare din ele

$$\int\limits_{(M_c)} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}_{rot} = \int\limits_{(M_c)} [\bar{r}' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')]\,dm = \left(\int\limits_{(M_c)} (x'^2 + y'^2)\,dm \right) \omega \bar{k}' = \mathbf{J}_c \bar{\omega}\,; \tag{20.27}$$

$$\int\limits_{(M_a(t))} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}_{rot} = \int\limits_{(M_a(t))} [\bar{r}' \times \bar{\omega} \times \bar{r}')]\,dm = \left(\int\limits_{(M_a(t))} (x'^2 + y'^2)\,dm \right) \omega \bar{k}' =$$

$$= J_a(t)\,\bar{\omega} \tag{20.28}$$

* În dezvoltările, efectuate în continuare, ale celor trei integale se va ţine seama de faptul că momentele de inerţie centrifugale sînt egale cu zero.

şi

$$\int_{[M^0_{db}-Md(t)]} \bar{r}' \times dm\,\bar{v}_{rot} = \int_{[M^0_{db}-Md(t)]} [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')]\,dm =$$

$$= \left(\int_{[M^0_{db}-Md(t)]} (x'^2 + y'^2)\,dm \right) \omega\,\bar{k}' = [J^0_{bb} - J_d(t)]\,\bar{\omega}. \qquad (20.29)$$

În baza relaţiilor (20.25), (20.27), (20.28) şi (20.29), va rezulta următoarea formă finală pentru expresia (20.24) a momentului cinetic $\overline{\mathcal{K}}_Q$:

$$\boxed{\overline{\mathcal{K}}_Q = M(t)\,\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + \overline{\mathcal{K}}_{Q_{rot}} = M(t)\,\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + J(t)\,\bar{\omega}}. \qquad (20.30)$$

Avînd în vedere relaţiile (20.23) şi (20.30), se poate scrie acum şi torsorul în polul Q al impulsurilor rigidului cu masă variabilă, acest torsor avînd forma

$$\boxed{\overline{\mathcal{T}}_Q(\overline{\mathcal{H}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{H}} = M(t)\,\bar{v}_Q \\ \overline{\mathcal{K}}_Q = M(t)\,\bar{r}'_c \times \bar{v}_Q + J(t)\,\bar{\omega} \end{array} \right\}}. \qquad (20.31)$$

Momentul cinetic în polul fix al rigidului cu masă variabilă. Folosind formula cunoscută de trecere, pentru momentele rezultante, de la un pol Q la polul fix O, va rezulta următoarea expresie pentru momentul cinetic al rigidului cu masă variabilă corespunzătoar polului fix :

$$\overline{\mathcal{K}} = \bar{r}_Q \times \overline{\mathcal{H}} + \overline{\mathcal{K}}_Q = \bar{r}_Q \times M(t)\,\bar{v}_Q + M(t)\,\bar{r}'_O \times \bar{v}_Q + J(t)\,\bar{\omega}. \qquad (20.32)$$

În consecință, torsorul în polul fix al impulsurilor rigidului cu masă variabilă va avea forma

$$\overline{\mathcal{T}}(\overline{\mathscr{K}}) = \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathscr{K}} = M(t)\,\bar{v}_Q \\ \\ \overline{\mathscr{K}} = \bar{r}_Q \times M(t)\,\bar{v}_Q + M(t)\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + J(t)\bar{\omega} \end{array} \right\} \tag{20.33}$$

b) *Caracteristica cinetică scalară a rigidului cu masă variabilă.* Această caracteristică cinetică, reprezentată prin energia cinetică a rigidului cu masă variabilă, va fi definită, ca și în dinamica rigidului cu masă constantă, prin relația

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int\limits_{(M(t))} dm\, v^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{(M(t))} dm\,(\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \bar{r}')^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{(M(t))} dm\, \bar{v}_Q^2 + \int\limits_{(M(t))} dm\, \bar{v}_Q(\bar{\omega} \times r') + \frac{1}{2}\int\limits_{(M(t))} dm\,(\bar{\omega} \times \bar{r}')^2, \tag{20.34}$$

cu singura deosebire că ultima integrală va fi descompusă într-o sumă de trei integrale, corespunzătoare celor trei subdomenii distincte ale modelului mecanic adoptat, adică

$$\mathcal{E}_{rot} = \frac{1}{2}\int\limits_{(M(t))} dm(\bar{\omega} \times \bar{r}')^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{(M_c)} dm\,(\bar{\omega} \times \bar{r}')^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{(M_a)} dm\,(\bar{\omega} \times \bar{r}')^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{[M^0_{db} - M_d(t)]} dm\,(\bar{\omega} \times \bar{r}')^2. \tag{20.35}$$

Semnificațiile primelor două integrale din membrul drept al relației (20.34) pot fi stabilite imediat :

$$\int\limits_{(M(t))} dm\, \bar{v}_Q^2 = \left(\int\limits_{(M(t))} dm\right)\bar{v}_Q^2 = M(t)\,\bar{v}_Q^2 \tag{20.36}$$

şi

$$\int\limits_{(M)} dm\,\bar{v}_Q(\bar{\omega}\times\bar{r}') = \bar{v}_Q\left(\bar{\omega}\times\int\limits_{(M(t))}\bar{r}'\,dm\right)=\bar{v}_Q(\bar{\omega}\times M(t)\bar{r}'_C)=0 \tag{20.37}$$

ultima ca urmare a coliniarităţii vectorilor $\bar{\omega}$ şi r'_C.

Prin folosirea identităţii lui Lagrange şi exprimarea analitică apoi a diverselor operaţii vectoriale în raport cu reperul invariabil legat de rigid, integralele (20.36) vor căpăta şi ele semnificaţiile de mai jos :

$$\int\limits_{(M_c)} dm(\bar{\omega}\times\bar{r}')^2 = \int\limits_{(M_c)}[\bar{r}'^2\bar{\omega}^2-(\bar{\omega}\,\bar{r}')^2]\,dm = \int\limits_{(M_c)}(x'^2+y'^2)\,\omega^2\,dm =$$

$$=\left(\int\limits_{(M_c)}(x'^2+y'^2)\,dm\right)\omega^2 = J_c\,\omega^2; \tag{20.38}$$

$$\int\limits_{(M_a(t))} dm\,(\bar{\omega}\times\bar{r}')^2 = \int\limits_{(M_a(t))}[r'^2\omega^2-(\bar{r}'\,\bar{\omega})^2]\,dm = \int\limits_{(M_a(t))}(x'^2+y'^2)^2\,\omega^2\,dm =$$

$$=\left(\int\limits_{(M_a(t))}(x'^2+y'^2)\,dm\right)\omega^2 = J_a(t)\,\omega^2; \tag{20.39}$$

şi

$$\int\limits_{[M^0_{db}-M_a(t)]} dm\,(\bar{\omega}\times\bar{r}')^2 = \int\limits_{[M^0_{db}-M_a(t)]}[\bar{r}'^2\bar{\omega}^2-(\bar{r}'\,\bar{\omega})^2]\,dm =$$

$$=\int\limits_{[M^0_{db}-M_a(t)]}(x'^2+y'^2)\omega^2\,dm = \left(\int\limits_{[M^0_{db}-M_a(t)]}(x'^2+y'^2)\,dm\right)\omega^2 = J_a(t)\omega^2. \tag{20.40}$$

În baza relațiilor (20.36), (20.37), (20.38), (20.39), (20.40) și (20.19) relația (20.35), exprimînd energia cinetică a rigidului cu masă variabilă considerat, va lua forma finală

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2}[M(t)\,\bar{v}_Q^2 + J(t)\,\bar{\omega}^2]} \tag{20.41}$$

3°. Caracteristicile dinamice în mișcarea unui rigid cu masă variabilă

a) *Caracteristicile dinamice vectoriale.* Asupra unui rigid cu masă variabilă vor putea acționa cele trei categorii de distribuții de forțe cunoscute din dinamica rigidului cu masă constantă, adică

— *Forțe exterioare active*, cu componentele torsorului rezultant în polul Q legat de rigid determinate prin relațiile

$$\overline{\mathscr{T}}_Q(\overline{\mathscr{F}}_a) = \begin{cases} \overline{\mathscr{F}}_a = \int\limits_{(M(t))} d\overline{\mathscr{F}}_a \\ \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} = \int\limits_{(M(t))} \bar{r}' \times d\overline{\mathscr{F}}_a \end{cases}, \tag{20.42}$$

aceste forțe putînd acționa în fiecare din cele trei subdomenii ale modelului mecanic adoptat.

Din această categorie de distribuții de forțe elementare vor face parte greutățile elementare, reductibile, în fiecare din cele trei subdomenii, la cîte o rezultantă unică — greutatea subdomeniului respectiv — , aplicată în centrul de masă al acelui subdomeniu ; în timp ce greutatea subdomeniului cu masă constantă va fi și ea constantă, greutățile celorlalte două subdomenii vor fi funcții de timp, ca și masele corespunzătoare.

Torsorul în polul Q al greutății rigidului cu masă variabilă va avea deci forma

$$\overline{\mathscr{T}}_Q(\overline{P}) = \begin{cases} \overline{P} = \overline{P}_c + \overline{P}_a + \overline{P}_{db} = [M_c + M_{db}^0 + M_a(t) - M_d(t)]\bar{g} \\ \overline{\mathfrak{M}}_Q(\overline{P}) = \overline{\mathscr{M}}(\overline{P}) = \bar{r}'_{G_c} \times \overline{P}_c + \bar{r}'_{G_a} \times \overline{P}_a + \bar{r}'_{G_{db}} \times \overline{P}_{de} = \bar{r}'_G \times \overline{P} \end{cases} \tag{20.43}$$

Scanned with CamScanner

— *Forţe exterioare pasive*, reprezentate prin rezistenţele mediului — în cazurile cînd nu sînt neglijate — , prin rezistenele de amortizare ale eventualelor elemente de legătură elastică aplicate rigidului cu masă variabilă şi prin reacţiunile legăturilor pasive la care este supus rigidul respectiv, adică

$$d\overline{\mathscr{F}}_p = d\overline{R}_z + d\overline{R}_a + d\overline{R} \tag{20.44}$$

ultimele repartizate, în baza ipotezelor de lucru adoptate, numai în subdomeniul cu masă constantă.

Torsorul, în polul Q, al acestor distribuţii de forţe pasive va avea componentele

$$\overline{\mathscr{T}}_Q(\overline{\mathscr{F}}_p) = \begin{cases} \overline{\mathscr{F}}_p = \int\limits_{(M(t))} d\overline{R}_z + \int\limits_{(Mc)} (d\overline{R}_a + d\overline{R}) \\ \overline{\mathscr{M}}_{p_Q} = \int\limits_{(M(t))} \bar{r}' \times d\overline{R}_z + \int\limits_{(Mc(} \bar{r}' \times (d\overline{R}_a + d\overline{R}) \end{cases} \tag{20.45}$$

— *Forţe interioare*, care, în condiţiile proceselor neimpulsive de anexare şi detaşare de particole materiale, formează, la nivelul întregului rigid, un sistem echivalent cu zero, adică vor satisface condiţiile

$$\int\limits_{(M(t))} d\overline{\mathscr{F}}_{int} = 0\,; \qquad \int\limits_{(M(t))} \bar{r}' \times d\overline{\mathscr{F}}_{int} = 0\,. \tag{20.46}$$

În afara acestor categorii de solicitări, cu semnificaţiile fizice binecunoscute din dinamica rigidului cu masă constantă, în dinamica rigidului cu masă variabilă se va introduce şi o nouă categorie de solicitări, numite *solicitări reactive*, justificată de prezenţa, în ecuaţiile de mişcare corespunzătoare proceselor impulsive de anexare şi detaşare de particole materiale, a unor termeni cu dimensiuni fizice de forţe, respectiv de momente ale forţelor şi care vor reprezenta măsuri ale interacţiunilor de tip impulsiv dintre masele schimnate cu exteriorul şi dintre corpul bază ; aceste solicitări, specifice proceselor

impulsive de schimburi de particole materiale cu exteriorul vor fi definite ulterior, cu prilejul stabilirii ecuațiilor de mișcare a rigidului cu masă variabilă impulsiv.

b) *Caracteristicile dinamice scalare.*

— *Lucrul mecanic elementar* al unui sistem de solicitări aplicate rigidului cu masă variabilă, cu torsorul în polul Q de componente $\overline{\mathscr{F}}$ și $\overline{\mathfrak{M}}_Q$, va fi dat de o relație identică celei stabilite în dinamica rigidului cu masă constantă, adică

$$\boxed{d\mathscr{L} = \int\limits_{(M(t))} d\overline{\mathscr{F}}\, d\bar{r} = \overline{\mathscr{F}}\, d\bar{r}_Q + \overline{\mathfrak{M}}_Q\, d\overline{\Theta} = (\overline{\mathscr{F}}\,\bar{v} + \overline{\mathfrak{M}}_Q\,\bar{\omega})\, dt} \tag{20.37}$$

— *Puterea mecanică* a sistemului de solicitări $\overline{\mathscr{F}}, \overline{\mathfrak{M}}_Q$ aplicate rigidului cu masă variabilă va fi determinată, de asemenea, cu ajutorul relației

$$\boxed{\mathscr{P} = \int\limits_{(M(t))} d\overline{\mathscr{F}}\,\bar{v} = \overline{\mathscr{F}}\,\bar{v}_Q + \overline{\mathfrak{M}}_Q\,\bar{\omega}}, \tag{20.48}$$

identică cele stabilite în dinamica rigidului cu masă constantă.

20.1.3. Ecuațiile dinamicii rigidului cu masă variabilă

1°. Teoremele fundamentale în dinamica rigidului cu masă variabilă

a) *Relații fundamentale de calcul în dinamica rigidului cu masă variabilă.* În prezentarea teoremelor fundamentale ale dinamicii rigidului cu masă variabuilă se vor întîlni deseori situații cînd vor trebui calculate derivatele totale în raport cu timpul ale unor funcții de forma

$$\Phi = \int\limits_{(M_v(t))} dm\, f \quad \text{și} \quad \bar{Q} = \int\limits_{(M_0(t))} dm\,\bar{q}, \tag{20.49}$$

f şi $\bar{q}$ fiind funcţii continue şi derivabile de timp, atît direct, cît şi prin intermediul parametrilor de poziţie şi ai parametrilor cinematici de ordinul întîi ai rigidului, iar M_v fiind unul din cele două subdomenii cu masă variabilă, fie subdomeniul cu masă anexată ($M_v = M_a$), fie subdomeniul cu masă detaşabilă la momentul t ($M_v = M^0_{db} - M_d$); se mai face precizarea că masa variabilă M_v poate depinde de timp atît direct, cît şi prin intermediul parametrilor de poziţie ai rigidului respectiv.

Pentru calculul acestor derivate totale în raport cu timpul vor fi stabilite, în continuare, două formule, analoage celora stabilite pentru derivarea sub semnul de integrare.

Astfel, pentru variaţia, în intervalul de timp $[t, t + \Delta t]$, cînd masa variabilă M_v, asupra căreia este extinsă operaţia de integrare, se modifică cu cantitatea algebrică ΔM_v, a funcţiei scalare $\Phi(t)$ poate fi scrisă expresia

$$\Delta\Phi = \Phi(t+\Delta t) - \Phi(t) = \int\limits_{M_v+\Delta M_v} dm\, f(t+\Delta t) - \int\limits_{(M_v)} dm\, f(t) =$$

$$= \int\limits_{(M_v)} [f(t+\Delta t) - f(t)]\, dm + \int\limits_{(\Delta M_v)} dm\, f(t+\Delta t), \qquad (20.50)$$

Folosind, pentru expresia din paranteza patrată a primei integrale din membrul drept al relaţiei (20.50), formula creşterilor finite, adică scriind

$$f(t+\Delta t) - f(t) = \Delta t \left[\frac{df}{dt} + \xi_1 \right], \qquad (20.51)$$

cu $\xi_1 \to 0$ oadtă cu $\Delta t \to 0$, iar pentru cea de-a doua integrală din membrul drept al relaţiei (20.50) formula teoremei medii, adică

$$\int\limits_{(\Delta M_v)} dm\, f(t+\Delta t) = \Delta M_v [f_v + \xi_2], \qquad (20.52)$$

cu f_v reprezentînd valoarea funcţiei f într-un punct din interiorul masei ΔM_v — acest punct fiind chiar punctul din rigid în care se anexează, sau se detaşează masa ΔM_v — şi cu ξ_2 tinzînd către zero

pentru $\Delta t \to 0$, rezultă următoarea expresie a variaţiei $\Delta\Phi$ a funcţiei Φ în intervalul de timp Δt :

$$\Delta\Phi = \int_{(M_v)} \Delta t \frac{df}{dt}\, dm + \Delta M_v f_v + \xi, \tag{20.53}$$

ξ reprezentînd suma tuturor termenilor care tind rapid către zero atunci cînd Δt tinde către zero.

Împărţind relaţia (20.53) prin Δt şi trecînd la limită, se capătă relaţia căutată

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_{(M_v)} dm\, f\right] = \int_{(M_v)} \frac{d}{dt}(f\, dm) + \frac{dM_v}{dt} \cdot f_v. \tag{20.54}$$

Printr-un raţionament absolut analog celui precedent, se obţine şi expresia derivatei totale în raport cu timpul a funcţiei vectoriale Q :

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\int_{(M_v)} dm\, \bar{q}\right] = \int_{(M_v)} \frac{d}{dt}(dm\, \bar{q}) + \frac{dM_v}{dt}\, \bar{q}_v, \tag{20.55}$$

$\bar{q}_v$ fiind valoarea funcţiei q în punctul în care se produce, la momentul t, anexarea, sau detaşarea de particole materiale.

Ultimele două relaţii vor fi folosite în continuare.

b) *Teoremele fundamentale în dinamica rigidului cu masă variabilă.* Plecîndu-se, ca şi în dinamica rigidului cu masă constantă, de la aceeaşi ecuaţie fundamentală a dinamicii clasice, adică

$$dm\, \bar{a} = d\overline{\mathcal{F}}_a + d\overline{\mathcal{F}}_p + d\overline{\mathcal{F}}_{int}, \tag{20.56}$$

se vor obţine, şi în dinamica rigidului cu masă variabilă, trei serii de relaţii generale, exprimînd *teorema impulsului*, *teorema momentului cinetic* —ansamblul lor constituit *teoremele torsorului impulsurilor* — şi *teorema energiei*, extinse la cazul corpurlui care schimbă particule materiale cu exteriorul

În cele ce urmează, aceste teoreme vor fi stabilite numai pentru procese neimpulsive de schimburi de particole materiale cu exteriorul ($\bar{v}_v^* = \bar{v}_a$; $\bar{v}_d^* = \bar{v}_d$).

Teorema impulsului în dinamica rigidului cu masă variabilă neipulsiv. Prin integrarea, pe întreaga masă a rigidului ce schimbă particole materiale cu exteriorul, a ecuației (20.56) și prin descompunerea integralei din membrul stîng într-o sumă de trei integrale, corespunzătoare celor trei subdomenii distincte ale masei modelului mecanic adoptat, se obține relația

$$\int\limits_{(M_c)} dm\,\bar{a} + \int\limits_{(M_a(t))} dm\,\bar{a} + \int\limits_{[M_{db}^0 - M_d(t)]} dm\,\bar{a} = \int\limits_{(M(t))} d\bar{\mathscr{F}}_a + \int\limits_{(M)t)} d\bar{\mathscr{F}}_p + \int\limits_{(M(t))} d\bar{\mathscr{F}}_{int}.$$

Semnificația primei integrale din membrul stîng al relației precedente este cunoscută din dinamica rigidului cu masă constantă, putîndu-se scrie

$$\int\limits_{(M_c)} dm\,\bar{a} = \int\limits_{(M_c)} dm\,\frac{d\bar{v}}{dt} = \int\limits_{(M_c)} \frac{d}{dt}(dm\,\bar{v}) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{(M_c)} dm\,\bar{v}\right) = \dot{\bar{\mathscr{H}}}_c,$$

$\bar{\mathscr{H}}_c$ fiind impulsul subdomeniului cu masă constantă ; pentru celelalte două integrale din membrul stîng al relației (20.57) se vor obține, în baza relației (20.55), următoarele semnificații :

$$\int\limits_{(M_a(t))} dm\,\bar{a} = \int\limits_{(M_a(t))} \frac{d}{dt}(dm\,\bar{v}) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{(M_a(t))} dm\,\bar{v}\right) - \frac{dM_a}{dt}\,\bar{v}_a =$$

$$= \dot{\bar{\mathscr{H}}}_a - \frac{dM_a}{dt}\,\bar{v}_a, \qquad (20.59)$$

respectiv

$$\int\limits_{[M_{db}^0 - M_d(t)]} dm\,\bar{a} = \int\limits_{[M_{db}^0 - M_d(t)]} \frac{d}{dt}(dm\,\bar{v}) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{[M_{db}^0 - M_d(t)]} dm\,\bar{v}\right) -$$

$$- \frac{d[M_{db}^0 - M_d(t)]}{dt}\,\bar{v}_d = \dot{\bar{\mathscr{H}}}_{db} + \frac{dM_d}{dt}\,\bar{v}_d, \qquad (20.60)$$

$\overline{\mathscr{H}}_a$ fiind impulsul subdomeniului masei anexate la momentul t, iar $\overline{\mathscr{H}}_{db}$ impulsul masei detașabile, existente în rigid la momentul t.

Pentru cele trei integrale din membrul drept al relației (20.57) rezultă semnificațiile cunoscute

$$\int_{(M(t))} d\overline{\mathscr{F}}_a = \overline{\mathscr{F}}_a ; \quad \int_{(M(t))} d\overline{\mathscr{F}}_p = \overline{\mathscr{F}}_p ; \quad \int_{(M(t))} d\overline{\mathscr{F}}_{int} = 0, \tag{20.61}$$

În baza relațiilor (20.58), (20.59), (20.60) și (20.61) și ținînd seama și de relația evidentă

$$\overline{\mathscr{H}}_c + \overline{\mathscr{H}}_a + \overline{\mathscr{H}}_{db} + \overline{\mathscr{H}} \tag{20.62}$$

— unde $\overline{\mathscr{H}}$ este impulsul rigidului cu masă variabilă neimpulsiv la momentul t — egalitatea (20.57) va lua forma finală

$$\boxed{\dot{\overline{\mathscr{H}}} - \left[\frac{dM_a}{dt}\bar{v}_a - \frac{dM_d}{dt}\bar{v}_d\right] = \overline{\mathscr{F}}_a + \overline{\mathscr{F}}_p} \tag{20.63}$$

și va exprima *teorema impulsului în dinamica rigidului cu masă variabilă neimpulsiv.*

Teorema momentului cinetic în dinamica rigidului cu masă variabilă neimpulsiv

Teorema momentului cinetic în raport cu polul fix. Multiplicînd, vectorial la stînga, relația (20.56) cu vectorul de poziție $\bar{r}$ al masei elementare dm în raport cu originea reperului fix și integrînd, pe toată masa rigidului corespunzătoare momentului t relația astfel înmulțită, cu integrala din membrul stîng descompusă și acum în trei integrale, corespunzătoare celor trei subdomenii distincte ale modelului mecanic adoptat, rezultă egalitatea

$$\int_{(M_c)} \bar{r} \times dm\,\bar{a} + \int_{(M_a(t))} \bar{r} \times dm\,\bar{a} + \int_{[M^0_{db} - M_d(t)]} \bar{r} \times dm\,\bar{a} =$$

$$= \int_{(M(t))} \bar{r} \times d\overline{\mathscr{F}}_a + \int_{(M(t))} \bar{r} \times d\overline{\mathscr{F}}_p + \int_{(M(t))} \bar{r} \times d\overline{\mathscr{F}}_{int}. \tag{20.64}$$

Semnificaţia primei integrale din membrul stîng al ultimei relaţii rezultă imediat

$$\int_{(M_c)} \bar{r} \times dm\, \bar{a} = \int_{(M_c)} \bar{r} \times dm \frac{d\bar{v}}{dt} = \int_{(M_c)} \frac{d}{dt} (\bar{r} \times dm\, \bar{v}) =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\int_{(M_c)} \bar{r} \times dm\, \bar{v} \right) = \dot{\bar{\mathcal{K}}}_c, \tag{20.65}$$

$\bar{\mathcal{K}}_c$ fiind momentul cinetic în polul fix al masei constante M_c a rigidului considerat.

Pentru următoarele două integrale din membrul stîng al egalităţii (20.64) vor rezulta, în baza relaţiei (20.55), următoarele semnificaţii

$$\int_{(M(t))} \bar{r} \times dm\, \bar{a} = \int_{(M_a(t))} \frac{d}{dt} (\bar{r} \times dm\, \bar{v}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{(M_a(t))} \bar{r} \times dm\, \bar{v} \right) -$$

$$- \frac{dM_a}{dt} (\bar{r}_a \times \bar{v}_a) = \dot{\bar{\mathcal{K}}}_a - \frac{dM_a}{dt} (\bar{r}_a \times \bar{v}_a), \tag{20.66}$$

respectiv

$$\int_{[M^0_{db} - M_d(t)]} \bar{r} \times dm\, \bar{a} = \int_{[M^0_{db} - M_d(t)]} \frac{d}{dt} (\bar{r} \times dm\, \bar{v}) = \frac{d}{dt} \left(\int_{[M^0_{db} - M_d(t)]} \bar{r} \times dm\, \bar{v} \right) -$$

$$- \frac{d[M^0_{db} - M_d(t)]}{dt} (\bar{r}_p \times \bar{v}_p) = \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{db} + \frac{dM_d}{dt} (\bar{r}_d \times \bar{v}_d), \tag{20.67}$$

$\bar{\mathcal{K}}_a$ şi $\bar{\mathcal{K}}_{db}$ fiind momentele cinetice, în polul fix, ale subdomeniilor cu masă anexată şi cu masă detaşabilă la momentul t, $\bar{r}_a$ şi $\bar{r}_d$ fiind vectorii de poziţie, în raport cu polul fix, ai punctelor de anecare, respectiv de detaşare, ale maselor dM_a şi dM_d, iar $\bar{v}_a$ şi $\bar{v}_d$ vitezele punctelor din rigid în care se produc, la momentul t, cele două procese de modificare a masei rigidului.

Scanned with CamScanner

În ceea ce privește integralele din membrul drept al relației (20.64), semnificațiile lor sînt cunoscute din dinamica rigidului cu masă constantă, adică

$$\int_{(M(t))} \bar{r} \times d\overline{\mathcal{F}}_a = \overline{\mathfrak{M}}_a ; \qquad \int_{(M(t))} \bar{r} \times d\overline{\mathcal{F}}_p = \overline{\mathfrak{M}}_p ; \qquad \int_{M(t)} \bar{r} \times d\overline{\mathcal{F}}_{int} = 0 \tag{20.68}$$

În baza relații.or (20.65), (20.66), (20.67) și (20.68) și ținînd seama și de egalitatea evidentă

$$\overline{\mathcal{K}}_c + \overline{\mathcal{K}}_a + \overline{\mathcal{K}}_{ab} = \overline{\mathcal{K}}, \tag{20.69}$$

relația (20.64) va lua forma finală

$$\boxed{\dot{\overline{\mathcal{K}}} - \left[\frac{dM_a}{dt}(\bar{r}_a \times \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt}(\bar{r}_d \times \bar{v}_d)\right] = \overline{\mathfrak{M}}_a + \overline{\mathfrak{M}}_p} \tag{20.70}$$

exprimînd *teorema momentului cinetic în raport cu polul fix în dinamica rigidului cu masă variabilă neimpulsiv.*

Teorema momentului cinetic în raport cu polul invariabil legat de rigidul cu masă variabilă neimpulsiv. Avînd în vedere expresia (20.33) a momentului cinetic $\overline{\mathcal{K}}$, se va putea scrie, pe de o parte, relația

$$\dot{\overline{\mathcal{K}}} = \dot{\bar{r}}_Q \times \overline{\mathcal{H}} + \bar{r}_Q \times \dot{\overline{\mathcal{H}}} + \frac{dM}{dt}\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + M\dot{\bar{r}}'_C \times \bar{v}_Q +$$

$$+ M\bar{r}'_c \times \dot{\bar{v}}_Q + \dot{\overline{\mathcal{K}}}_{Q_{rot}},$$

sau încă, ținînd seama de faptul că în baza relației (20.23) a impulsului rezultă consecința

$$\dot{\bar{r}}_Q \times \overline{\mathcal{H}} = \bar{v}_Q \times M(t)\bar{v}_Q = 0$$

şi observînd că în condiţiile modelului mecanic adoptat şi în ipotezele de lucru precizate la început, rezultă condiţia

$$\dot{\bar{r}}'_C = \frac{d}{dt}(x'_C(t)\,\bar{i}' + y'_C(t)\,\bar{j}' + z'_C(t)\,\bar{k}') = \bar{v}_{C_r} + \underbrace{(\bar{\omega} \times \bar{r}'_C)}_{0} = \bar{v}_{C_r} \tag{20.71}$$

şi deci egalitatea

$$M\dot{\bar{r}}'_C \times \bar{v}_Q = M\bar{v}_{C_r} \times \bar{v}_Q \tag{20.72}$$

— viteza relativă $\bar{v}_{C_r}$ a centrului de masă C datorîndu-se variaţiilor maselor M_a şi M_d —, se mai poate scrie

$$\dot{\bar{\mathcal{H}}} = \frac{dM}{dt}\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + M\bar{v}_{C_r} \times \bar{v}_Q + M\bar{r}'_C \times \bar{a}_Q + \dot{\bar{\mathcal{H}}}_{Q_{rot}} + \bar{r}_Q \times \dot{\bar{\mathcal{H}}} \tag{20.73}$$

Pe de altă parte, folosind relaţiile de trecere de la polul O al polul Q pentru momentele rezultante $\overline{\mathfrak{M}}_a$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_p$, vor rezulta egalităţile

$$\overline{\mathfrak{M}}_a = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \bar{r}_Q \times \bar{\mathcal{F}}_a\,; \qquad \overline{\mathfrak{M}}_p = \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} + \bar{r}_Q \times \bar{\mathcal{F}}_p. \tag{20.74}$$

Înlocuind expresiile (20.73) şi (20.74) în relaţia (20.70), aceasta din urmă va lua forma

$$M\bar{r}'_C \times \bar{a}_Q + \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Q_{rot}} + M\bar{v}_{C_r} \times \bar{v}_Q + \frac{dM}{dt}\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \left[\frac{dM}{dt}(\bar{r}_a \times \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt}(\bar{r}_d \times \bar{v}_d)\right] + \bar{r}_Q \times \dot{\bar{\mathcal{H}}} = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} + \bar{r}_Q \times (\bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p),$$

sau încă, efectuînd şi înlocuirile evidente

$$\bar{r}_a = \bar{r}_Q + \bar{r}'_a\,; \qquad \bar{r}_d = \bar{r}_Q + \bar{r}'_a \tag{20.75}$$

Scanned with CamScanner

— unde $\bar{r}'_a$ și $\bar{r}'_d$ sînt vectorii de poziție în raport cu polul Q legat de rigid ai punctelor în care se produc, la momentul t, schimburile de particole materiale cu exteriorul — , și scoțînd și pe vectorul $\bar{r}_Q$ în factor comun, se va mai putea scrie

$$\bar{r}_Q \times \left\{ \dot{\bar{\mathscr{K}}} - \left[\frac{dM_a}{dt} \bar{v}_a - \frac{dM_d}{dt} \bar{v}_d \right] - (\bar{\mathscr{F}}_a + \bar{\mathscr{F}}_p) \right\} +$$

$$M \bar{r}'_C \times \bar{a}_Q + \dot{\bar{\mathscr{K}}}_{Q_{rot}} + M \bar{v}_{C_r} \times \bar{v}_Q + \frac{dM}{dt} (\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q) -$$

$$- \left[\frac{dM_a}{dt} (\bar{r}'_a \times \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt} (\bar{r}'_d \times v_d) \right] = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q}.$$

(20.76)

Dacă se mai ține seama acum, pe de o parte, de relația (20.63) și, pe de altă parte, se efectuează și înlocuirea evidentă

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} [M_c + M^0_{db} + M_a(t) - M_d(t)] = \frac{dM_a}{dt} - \frac{dM_d}{dt}, \qquad (20.77)$$

atunci relația (20.76) va mai putea fi adusă la următoarea formă finală

$$\boxed{M \bar{r}'_C \times \bar{a}_Q + \dot{\bar{\mathscr{K}}}_{Q_{rot}} + M \bar{v}_{C_r} \times \bar{v}_Q + \left\{ \frac{dM_a}{dt} [\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_C \times \bar{v}_a] - \right.}$$

$$\boxed{\left. - \frac{dM_d}{dt} [\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_d \times \bar{v}_d] \right\} = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q}}$$

(20.78)

exprimînd *teorema momentului cinetic corespunzătoare rotației instantanee a rigidului cu masă variabilă neimpulsiv.*

Teorema energiei în dinamica rigidului cu masă variabilă neimpulsiv. Prin înmulțirea, scalar, a ecuației (20.56) cu viteza $\bar{v}$ a masei elementare dm și prin integrarea

apoi a relației astfel înmulțite pe întreaga masă a rigidului, cu integrala din membrul stîng descompusă și de astă dată într-o sumă de trei integrale, corespunzătoare celor trei subdomenii distincte ale masei modelului mecanic adoptat, rezultă egalitatea

$$\int\limits_{(M_c)} dm\,\bar{a}\,\bar{v} + \int\limits_{(M_a(t))} dm\,\bar{a}\,\bar{v} + \int\limits_{[M_{db}^0 - M_d(t)]} dm\,\bar{a}\,\bar{v} = \int\limits_{(M(t))} d\bar{\mathscr{F}}_a\,\bar{v} +$$

$$\int\limits_{(M(t))} d\bar{\mathscr{F}}_p\,\bar{v} + \int\limits_{(M(t))} d\bar{\mathscr{F}}_{int}\,\bar{v}. \tag{20.79}$$

Semnificația primei integrale din membrul stîng al ultimei relații este ușor de stabilit

$$\int\limits_{(M_c)} dm\,\bar{a}\,\bar{v} = \int\limits_{(M_c)} dm\,\frac{d\bar{v}}{dt}\,\bar{v} = \int\limits_{(M_c)} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,dm\,v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{(M_c)} \frac{1}{2}\,dm\,v^2\right) = \dot{\mathscr{E}}_c, \tag{20.80}$$

$\mathscr{E}_c$ fiind energia cinetică, la momentul t, a subdomeniului cu masă constantă din rigid.

Pentru următoarele două integrale din membrul stîng al relației (20.79) vor putea fi stabilite, ținîndu-se seama și de relația (20.54), următoarele semnificații

$$\int\limits_{(M_a(t))} dm\,\bar{a}\,\bar{v} = \int\limits_{(M_a(t))} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,dm\,\bar{v}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{(M_a(\,))} dm\,\bar{v}^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{dM_a}{dt}\,\bar{v}_a^2 = \dot{\mathscr{E}}_a - \frac{1}{2}\,\frac{dM_a}{dt}\,\bar{v}_a^2, \tag{20.81}$$

respectiv

$$\int_{[M^0_{db}-M_d(t)]} dm\,\bar{a}\,\bar{v} = \int_{[M^0_{db}-M_d(t)]} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,dm\,\bar{v}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\int_{[M^0_{db}-M_d(t)]} dm\,\bar{v}^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{d[M^0_{db}-M_d(t)]}{dt}\,\bar{v}^2 = \dot{\mathscr{E}}_{db} + \frac{1}{2}\,\frac{dM_d}{dt}\,\bar{v}_d^2, \qquad (20.82)$$

$\mathscr{E}_a$ și $\mathscr{E}_{db}$ fiind energiile cinetice, la momentul t, ale maselor anexate și detașabile din acel moment.

În ceea ce privește integralele din membrul drept al relației (20.79), semnificațiile lor sînt aceleași ca și în dinamica rigidului cu masă constantă, adică

$$\int_{(M(t))} d\bar{\mathscr{F}}_a\,\bar{v} = \mathscr{P}_a\,;\quad \int_{(M(t))} d\bar{\mathscr{F}}\,\bar{v} = \mathscr{P}_p\,;\quad \int_{(M(t))} d\bar{\mathscr{F}}_{int}\,\bar{v} = 0, \qquad (20.83)$$

$\mathscr{P}_a$ și $\mathscr{P}_p$ fiind puterile mecanice ale solicitărilor active, respectiv pasive, la care este supus rigidul considerat.

În baza relațiilor (20.80), (20.81), (20.82) și (20.83), și avînd în vedere și egalitatea evidentă

$$\mathscr{E}_c + \mathscr{E}_a + \mathscr{E}_{db} = \mathscr{E},$$

relația (20.79) va putea fi scrisă sub următoarea formă finală

$$\boxed{\dot{\mathscr{E}} - \frac{1}{2}\left[\frac{dM_a}{dt}\,\bar{v}_a^2 - \frac{dM_d}{dt}\,\bar{v}_d^2\right] = \mathscr{P}_a + \mathscr{P}_p}. \qquad (20.85)$$

exprimînd *teorema energiei în dinamica rigidului cu masa variabilă neimpulsiv.*

Prin înmulțirea cu dt, relația (20.85) va mai putea fi scrisă sub forma

$$\boxed{d\mathscr{E} - \frac{1}{2}\left[dM_a\,\bar{v}_a^2 - dM_d\,\bar{v}_d^2\right] = d\mathscr{L}_a + d\mathscr{L}_p}, \qquad (20.86)$$

exprimînd *teorema energiei sub forma diferențială în dinamica rigidului cu masă variabilă neimpulsiv*

2°. Ecuațiile dinamicii rigidului cu masă variabilă

a) *Ecuațiile dinamicii rigidului cu masă variabilă neimpulsiv.* În cazul cînd procesele de anexare și de detașare de particole materiale din rigidul cu masă variabilă au caracter neimpulsiv, ($\bar{v}_a^* = \bar{v}_a$; $\bar{v}_d^* = \bar{v}_d$), ecuațiile vectoriale ale dinamicii acestui model mecanic vor fi reprezentate chiar prin relațiile (20.63) și (20.78), exprimînd cele două teoreme ale torsorului impulsurilor.

Efectuînd, în relațiile menționate mai sus, derivatele în raport cu timpul ale impulsului $\mathcal{H}$ și momentului cinetic $\mathcal{K}_{Q_{rot}}$ — primul dat de relația (20.23), iar cel de-al doilea definit prin relația (20.26) cu considerarea și a relațiilor (20.27), (20.28), (20.29) și (20.19) — , vor rezulta următoarele *ecuații vectoriale ale dinamicii rigidului cu masă variabilă neimpulsiv* :

$$M(t)\,\bar{a}_Q + \left[\frac{dM_a}{dt}(\bar{v}_Q - \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt}(\bar{v}_Q - \bar{v}_d)\right] = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p\,;$$

$$M\bar{r}'_C \times \bar{a}_Q + J\bar{\varepsilon} + \frac{dJ}{dt}\bar{\omega} + M\bar{v}_{C_r} \times \bar{v}_Q +$$

$$+ \left\{\frac{dM_a}{dt}(\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_a \times \bar{v}_C) - \frac{dM_d}{dt}[\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_d \times \bar{v}_d]\right\} = \bar{\mathcal{M}}_{a_Q} + \bar{\mathcal{M}}_{p_Q} \qquad (20.87)$$

Prin proiectarea primei ecuații vectoriale pe axele reperului fix și a celei de-a doua ecuații pe axele reperului legat de rigidul cu masă variabilă considerat, se va obține și *sistemul de ecuații scalare ale dinamicii rigidului cu masă variabilă neimpulsiv.*

b) *Ecuațiile dinamicii rigidului cu masă variabilă impulsiv.* Dacă procesele prin care se realizează schimbul de particole material cu exteriorul au caracter impulsiv ($\bar{v}_a^* \neq \bar{v}_a$; $\bar{v}_d^* \neq \bar{v}_d$), vor trebui luate în considerație și interacțiunile interioare — de natură cu totul deosebită de cele întîlnite în procesele obișnuite, neimpulsive — dintre

masele anexate, sau detașate, într-un interval de timp foarte mic, dt și dintre rigidul propriu zis, adică va trebui considerat sistemul mecanic constituit la momentul t din rigid și din masele dM_a și dM_d care se anexează și se detașează în intervalul de timp dt.

Ecuațiile de mișcare corespunzătoare acestei situații vor fi stabilite în continuare.

Ecuația vectorială a mișcării de translație a rigidului cu masă variabilă impulsiv. Examinînd mișcarea rigidului cu masă variabilă impulsiv efectuată într-un interval de timp foarte mic $\Delta t=(t+\Delta t)-t$, se va remarca că la momentul t va exista un sistem mecanic format din rigidul cu masa corespunzătoare momentului t și deci cu impulsul dat de relația

$$\bar{\mathscr{H}}(t) = M(t)\bar{v}_Q = [M_c + M^0_{dv} + M_a(t) - M_d(t)]\bar{v}_Q \qquad (20.88)$$

și din masa ΔM, considerată în mișcare de translație cu viteza v^*_a, cu impulsul dat de relația

$$\Delta\bar{\mathscr{H}}_a = \Delta M_a \bar{v}^*_a, \qquad (20.89)$$

care se va anexa la sfîrșitul intervalului de timp Δt.

În consecință, impulsul total al acestui sistem mecanic la momentul t va avea expresia

$$\bar{\mathscr{H}}_{tot}(t) = \bar{\mathscr{H}}(t) + \Delta\bar{\mathscr{H}}_a = M(t)\bar{v}_Q + \Delta M_a v^*_a. \qquad (20.90)$$

La momentul $t + \Delta t$, sistemul mecanic precedent va fi format din masa corespunzătoare momentului $t + \Delta t$, adică

$$M(t+\Delta t) = [M_c + M^0_{dv} + M_a(t) + \Delta M_a - M_d(t) - \Delta M_d]$$

— unde ΔM_d este masa care s-a detașat în intervalul de timp Δt —, acestei mase, care se deplasează cu viteza de translație

$$\bar{v}_Q(t + \Delta t) + = \bar{v}_Q + \Delta v_Q,$$

corespunzîndu-i impulsul

$$\bar{\mathscr{H}}(t+\Delta t) = M(t+\Delta t)\,\bar{v}_Q(t+\Delta t) =$$

$$= [M_c + M^0_{dv} + M_a(t)) - M_d(t) + (\Delta M_a - \Delta M_d)]\,(\bar{v}_Q + \Delta\bar{v}_Q) \qquad (20.91)$$

și din masa ΔM_d, detașată în intervalul de timp Δt, considerată în mișcare de translație cu viteza v_d^* imprimată prin procesul impulsiv de detașare, căreia îi ca corespunde impulsul

$$\Delta \bar{\mathcal{H}}_d = \Delta M_d \, \bar{v}_d^*. \tag{20.92}$$

Impulsul total al sistemului mecanic considerat, corespunzător momentului $t + \Delta t$, va avea deci valoarea

$$\bar{\mathcal{H}}_{tot}(t + \Delta t) = \bar{\mathcal{H}}(t + \Delta t) + \Delta \bar{\mathcal{H}}_d =$$

$$= [M_c + M_{db}^0 + M_a(t) - M_d(t) + (\Delta M_a - \Delta M_d)] \times$$

$$\times (\bar{v}_Q + \Delta \bar{v}_Q) + \Delta M_d \bar{v}_d^*,$$

sau încă

$$\bar{\mathcal{H}}_{tot}(t + \Delta t) + [M_c + M_{db}^0 + M_a(t) - M_d(t)] \, \bar{v}_Q +$$

$$+ [M_c + M_{db}^0 + M_a(t) -$$

$$- M_d(t)] \, \Delta \bar{v}_Q + (\Delta M_a - \Delta M_d) \, \bar{v}_Q + \Delta M_d \, \bar{v}_d^* + \eta, \tag{20.93}$$

unde prin η a fost desemnată suma tuturor termenilor conținînd produse de forma $\Delta M_v \, \Delta \bar{v}_Q$, care tind rapid spre zero pentru $\Delta t \to 0$.

În consecință, variația impulsului sistemului mecanic menționat, corespunzătoare intervalului de timp Δt, va fi dată de relația

$$\Delta \bar{\mathcal{H}}_{tot} = \bar{\mathcal{H}}_{tot}(t + \Delta t) - \bar{\mathcal{H}}_{tot}(t) =$$

$$= [M_c + M_{db}^0 + M_a(t) - M_d(t)] \, \Delta \bar{v}_Q + (\Delta M_a - \Delta M_d) \bar{v}_Q -$$

$$- (\Delta M_a \, \bar{v}_a^* - \Delta M_d \bar{v}_d^*) + \eta$$

sau încă, adăugînd și scăzînd termenii $\Delta M_a v_a$ și $\Delta M_d v_d$, mai rezultă

$$\Delta \bar{\mathcal{H}}_{tot} = M(t) \, \Delta \bar{v}_Q + [\Delta M_a (\bar{v}_Q - \bar{v}_a) - \Delta M_d (\bar{v}_Q - \bar{v}_d)] -$$

$$- [\Delta M_a (\bar{v}_a^* - \bar{v}_a) - \Delta M_d (\bar{v}_d^* - \bar{v}_d)] + \eta \tag{20.94}$$

Scanned with CamScanner

Împărţind prin Δt şi trecînd la limită pentru $\Delta t \to 0 \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\eta}{\Delta t} = 0 \right)$, se obţine următoarea expresie pentru derivata în raport cu timpul a impulsului, la momentul t, al sistemului mecanic considerat :

$$\dot{\bar{\mathscr{H}}}_{tot} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{\mathscr{H}}_{tot}}{\Delta t} = M(t)\,\bar{a}_Q + \left[\frac{dM_a}{dt} (\bar{v}_Q - \bar{v}_a) - \right.$$

$$\left. - \frac{dM_d}{dt} (\bar{v}_Q - \bar{v}_d) \right] - \left[\frac{dM_a}{dt} (\bar{v}_a^* - \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt} (\bar{v}_d^* - \bar{v}_d) \right]. \tag{20.95}$$

Întrucît mişcarea întregului sistem mecanic se efectuează numai sub acţiunea forţelor exterioare $\bar{\mathscr{F}}_a$ şi $\bar{\mathscr{F}}_p$, la care este supus rigidul, rezultă că această derivată a impulsului total al sistemului mecanic va trebui egalată cu suma celor două forţe rezultante exterioare, obţinîndu-se astfel relaţia

$$\boxed{\begin{aligned} & M(t)\,\bar{a}_Q + \left[\frac{dM_a}{dt} (\bar{v}_Q - \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt} (\bar{v}_Q - \bar{v}_d) \right] - \\ & - \left[\frac{dM_a}{dt} (\bar{v}_a^* - \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt} (\bar{v}_d^* - \bar{v}_d) \right] = \bar{\mathscr{F}}_a + \bar{\mathscr{F}}_p \end{aligned}} \tag{20.96}$$

care va reprezenta *ecuaţia vectorială a dinamicii mişcării de translaţie a rigidului cu masa variabilă impulsiv.*

Comparînd ultima relaţie cu prima dintre ecuaţiile (20.87), se observă că ele se deosebesc prin prezenţa, în ecuaţia (20.96), a termenilor

$$\frac{dM_a}{dt} (\bar{v}_a^* - \bar{v}_a) = \bar{F}_{ra} \tag{20.97}$$

şi

$$- \frac{dM_d}{dt} (\bar{v}_d^* - \bar{v}_d) = \bar{F}_{rd}, \tag{20.98}$$

Scanned with CamScanner

termeni care, întrucît au dimensiuni fizice de forţe şi servesc ca măsuri ale interacţiunilor interioare impulsive, au primit numele de *forţe reactive de anexare*, respectiv de *detaşare de particule materiale*.

Ecuaţia vectorială a mişcării de rotaţie a rigidului cu masă variabilă impulsiv. Considerînd din nou sistemul mecanic format, la momentul t, din rigidul cu masa $M(t)$ şi cu momentul cinetic în polul fix determinat, în acel moment şi în ipotezele de lucru adoptate, prin relaţia

$$\bar{\mathcal{K}}(t) = \bar{r}_Q \times M(t)\,\bar{v}_Q + M\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + J(t)\,\bar{\omega} \tag{20.99}$$

şi din masa ΔM_a, care se va anexa la sfîrşitul intervalului de timp Δt într-un punct al rigidului determinat în raport cu polul Q prin vectorul de poziţie $\bar{r}'_a$ şi în raport cu polul fix prin vectorul de poliţie $\bar{r}_a = \bar{r}_Q + \bar{r}'_a$, acestei mase, care execută, pînă la anexare, o mişcare de translaţie cu viteza $\bar{v}^*_a \neq \bar{v}_a$, corespunzîndu-i următorul moment cinetic în polul fix :

$$\Delta\bar{\mathcal{K}}_a = \bar{r}_a \times \Delta M_a \bar{v}^*_a, \tag{20.100}$$

se va putea scrie următoarea expresie pentru momentul cinetic total al sistemului mecanic considerat, corespunzător momentului t:

$$\bar{\mathcal{K}}_{tot}(t) = \bar{\mathcal{K}}(t) + \Delta\bar{\mathcal{K}}_a =$$

$$= \bar{r}_Q \times M(t)\,\bar{v}_Q + M\,\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + J(t)\,\bar{\omega} + \bar{r}_a \times \Delta M_a \bar{v}^*_a. \tag{20.101}$$

La momentul $t + \Delta t$, sistemul mecanic menţionat va fi format din rigidul considerat, cu caracteristicile inerţiale corespunzătoare acestui moment şi cu momentul cinetic în polul fix dat de relaţia

$$\bar{\mathcal{K}}(t+\Delta t) = (\bar{r}_Q + \Delta\bar{r}_Q) \times [M(t) + \Delta M_a - \Delta M_d]\,(\bar{v}_Q + \Delta\bar{v}_Q) +$$

$$+ [M(t) + \Delta M_a - \Delta M_d]\,(\bar{r}'_C + \Delta\bar{r}'_C) \times (\bar{v}_Q + \Delta\bar{v}_Q) +$$

$$+ [J(t) + J\Delta_a - \Delta J_d]\,(\bar{\omega} + \Delta\bar{\omega}) \tag{20.102}$$

— unde ΔJ_a şi ΔJ_d sînt variaţiile momentului de inerţie axial al rigidului, produse prin procesele de anexare şi de detaşare de particule materiale care au avut loc în intervalul de timp Δt — , precum şi din masa ΔM_d detaşată din rigid la sfîrşitul intervalului de timp

dintr-un punct al rigidului determinat prin vectorul de poziție $\bar{r}'_d$ în raport cu polul Q și prin vectorul de poziție $\bar{r}_d = \bar{r}_Q + \bar{r}'_d$ în raportul cu polul fix O, ultimei mase, care execută, după detașare, o mișcare de translație cu viteza $\bar{v}_d^* = \bar{v}_d$, provocată de procesul impulsiv de detașare, corespunzîndu-i următorul moment cinetic în polul fix :

$$\Delta\bar{\mathcal{K}}_d = \bar{r}_d \times \Delta M_d \bar{v}_d^* \tag{20.103}$$

Momentul cinetic total în polul fix al sistemului mecanic la momentul $t + \Delta t$, va avea deci expresia

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{K}}_{tot}(t+\Delta t) &= \bar{\mathcal{K}}(t+\Delta t) + \Delta\bar{\mathcal{K}}_d = \\
&= [\bar{r}_Q \times M\bar{v}_Q + M\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + \\
&+ J(t)\bar{\omega}] + M r'_C \times \Delta\bar{v}_Q + J(t)\,\Delta\bar{\omega} + (\Delta J_a - \Delta J_d)\bar{\omega} + \\
&+ M\Delta\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + (\Delta M_a - \Delta M_d)\,\bar{r}'_C \times \bar{v}_d + \\
&+ \bar{r}_d \times \Delta M_d \bar{v}_d^* - \bar{r}_a \times \Delta M_a \bar{v}_a^* + \\
&+ M\Delta\bar{r}_Q \times \bar{v}_Q + \bar{r}_Q \times [\Delta M\bar{v}_Q + (\Delta M_a - \Delta M_d)\,\bar{v}_Q] + \zeta,
\end{aligned} \tag{20.104}$$

unde prin ζ s-a notat suma tuturor termenilor conținînd produse de două mărimi cărora le-au fost aplicate operatorul Δ și care tind repede spre zeri atunci cînd Δt tinde către zero.

În consecință, variația, în intervalul de timp Δt, a momentului cinetic în polul fix al sistemului mecanic considerat va avea expresia

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{\mathcal{K}}_{tot} &= \bar{\mathcal{K}}_{tot}(t+\Delta t) - \bar{\mathcal{K}}_{tot}(t) = \\
&= M\bar{r}'_a \times \Delta\bar{v}_Q + J\Delta\bar{\omega} + (\Delta J_a - \Delta J_d)\,\bar{\omega} + M\Delta\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + \\
&+ (\Delta M_a - \Delta M_d)\,\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - [\bar{r}_a \times \Delta M_a \bar{v}_a^* - \\
&- \bar{r}_d \times \Delta M_d \bar{v}_d^*] + M\Delta\bar{r}_Q \times \bar{v}_Q + \bar{r}_Q \times [M\Delta\bar{v}_Q + \\
&+ (\Delta M_a - \Delta M_d)\,\bar{v}_Q] + \zeta.
\end{aligned} \tag{20.105}$$

Scanned with CamScanner

Efectuînd înlocuirile

$$\bar{r}_a = \bar{r}_Q + \bar{r}'_a\,; \qquad \bar{r}_d = \bar{r}_Q + \bar{r}'_d\,,$$

şi adunînd şi scăzînd în membrul drept al ultimei relaţii suma

$$\bar{r}_a \times \Delta M_a \bar{v}_a - \bar{r}_d \times \Delta M_d \bar{v}_d = \bar{r}_Q \times [\Delta M_a \bar{v}_a - \Delta M_d \bar{v}_d] +$$

$$+ [\bar{r}'_a \times \Delta M_a \bar{v}_a - \bar{r}'_d \times \Delta M_d \bar{v}_d],$$

relaţia (20.105) va putea fi adusă la forma

$$\Delta \bar{\mathcal{K}}_{tot} = M\bar{r}'_C \times \Delta \bar{v}_Q + J\Delta\bar{\omega} + (\Delta J_a - \Delta J_d)\,\bar{\omega} + M\Delta\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q +$$

$$+ [\Delta M_a(\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_a \times \bar{v}_a) - \Delta M_d(\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_d \times \bar{v}_d)] -$$

$$- [\bar{r}'_a \times \Delta M_a(\bar{v}^*_a - \bar{v}_a) - \bar{r}'_d \times \Delta M_d(\bar{v}^*_d - \bar{v}_d)] +$$

$$+ M\Delta\bar{r}_Q \times \bar{v}_Q + \bar{r}_Q \times \{M\Delta\bar{v}_Q + [\Delta M_a(\bar{v}_Q - \bar{v}_a) -$$

$$- \Delta M_d(\bar{v}_Q - \bar{v}_d)] - [\Delta M_a(\bar{v}^*_a - \bar{v}_a) - \Delta M_d(v^*_d - \bar{v}_d)]\} + \zeta, \tag{20.106}$$

din care, după împărţirea prin Δt şi trecerea la limită pentru $\Delta t \leftarrow 0$, va rezulta, ţinînd seama şi de condiţiile

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\left(\frac{\Delta J_a}{\Delta t} - \frac{\Delta J_d}{\Delta t}\right)\bar{\omega}\right] = \left[\frac{dJ_a}{dt} - \frac{dJ_d}{dt}\right]\bar{\omega} = \frac{dJ}{dt}\,\bar{\omega}\,; \tag{20.107}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(M\frac{\Delta\bar{r}'_c}{\Delta t} \times \bar{v}_Q\right) = M\frac{d\bar{r}'_C}{dt} \times \bar{v}_Q = M(\bar{v}_{C_r} + \underbrace{\bar{\omega} \times \bar{r}'_C}_{0}) \times \bar{v}_Q =$$

$$= M\,\bar{v}_{C_r} + \bar{v}_Q \tag{20.108}$$

şi

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(M\frac{\Delta\bar{r}_Q}{\Delta t}\times\bar{v}_Q\right)=M\bar{v}_Q\times\bar{v}_Q=0;\qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\zeta}{\Delta t}=0;\tag{20.109}$$

următoarea expresie finală pentru derivata în raport cu timpul a momentului cinetic în polul fix al sistemului mecanic considerat, corespunzător momentului t:

$$\dot{\bar{\mathcal{K}}}_{tot}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{\mathcal{K}}_{tot}}{\Delta t}=M\bar{r}'_0\times\bar{a}_Q+J\bar{\varepsilon}+\frac{dJ}{dt}\bar{\omega}+M\bar{v}_{O_r}\times\bar{v}_Q+$$

$$+\left[\frac{dM_a}{dt}(\bar{r}'_0\times\bar{v}_Q-\bar{r}'_a\times\bar{v}_a)-\frac{dM_d}{dt}(\bar{r}'_0\times\bar{v}_Q-\bar{r}'_d\times\bar{v}_d)\right]-$$

$$-\left[\bar{r}'_a\times\frac{dM_a}{dt}(\bar{v}^*_a-\bar{v}_a)-\bar{r}'_d\times\frac{dM_d}{dt}(\bar{v}^*_d-\bar{v}_d)\right]+$$

$$+\bar{r}_Q\times\left\{M\bar{a}_Q+\left[\frac{dM_a}{dt}(\bar{v}_Q-\bar{v}_a)-\frac{dM_d}{dt}(\bar{v}_Q-\bar{v}_d)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{dM_a}{dt}(\bar{v}^*_a-\bar{v}_a)-\frac{dM_d}{dt}(\bar{v}^*_d-\bar{v}_d)\right]\right\}.\tag{20.110}$$

Cum mişcarea sistemului se efectuează numai sub acţiunea solicitărilor exterioare $\overline{\mathfrak{M}}_a$ şi $\overline{\mathfrak{M}}_p$, expresia precedentă a derivatei în raport cu timpul a momentului cinetic total $\bar{\mathcal{K}}$ va trebuie egalată cu suma vectorială

$$\overline{\mathfrak{M}}_a+\overline{\mathfrak{M}}_p=\overline{\mathfrak{M}}_{a_Q}+\overline{\mathfrak{M}}_{p_Q}+\bar{r}_Q\times(\bar{\mathcal{F}}_Q+\bar{\mathcal{F}}_p),$$

Scanned with CamScanner

rezultînd astfel, după trecerea termenilor ce conţin pe $\bar{r}_Q$ ca factor în membrul stîng, următoarea relaţie

$$M\bar{r}'_C \times \bar{a}_Q + J\bar{\varepsilon} + \frac{dJ}{dt}\bar{\omega} + M_C\bar{v}_r \times \bar{v}_Q +$$

$$+\left[\frac{dM_a}{dt}(\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_a \times \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt}(\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_d \times \bar{v}_d)\right] -$$

$$-\left[\bar{r}'_a \times \frac{dM_a}{dt}(\bar{v}^*_a - \bar{v}_a) - \bar{r}'_d \times \frac{dM_d}{dt}(\bar{v}^*_d - \bar{v}_d)\right] +$$

$$+\bar{r}_Q \times \left\{M\bar{a}_Q + \left[\frac{dM_a}{dt}(\bar{v}_Q - \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt}(\bar{v}_Q - \bar{v}_d)\right] -\right.$$

$$\left. -\left[\frac{dM_a}{dt}(\bar{v}^*_a - \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt}(\bar{v}^*_d - \bar{v}_d)\right] - (\bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p)\right\} = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} \cdot \tag{20.111}$$

Este suficient acum să se ţină seama şi de relaţia (20.96), pentru a se obţine astfel următoarea *ecuaţie vectorială a dinamicii mişcării de rotaţie instantanee a rigidului cu masă variabilă impulsiv* :

$$\boxed{\begin{aligned} &M\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q + J\bar{\varepsilon} + \frac{dJ}{dt}\bar{\omega} + M\bar{v}_{C_r} \times \bar{v}_Q + \left[\frac{dM_a}{dt}(\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \right. \\ &\left. - \bar{r}'_a \times \bar{v}_a) - \frac{dM_d}{dt}(\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_d \times \bar{v}_d)\right] - \left[\bar{r}'_a \times \frac{dM_a}{dt}(\bar{v}^*_a - \bar{v}_a) - \right. \\ &\left. - \bar{r}'_d \times \frac{dM_d}{dt}(\bar{v}^*_d - \bar{v}_d)\right] = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} \cdot \end{aligned}} \tag{20.112}$$

Compararea acestei ecuații cu cea de-a doua dintre ecuațiile (20.87) permite să se tragă și aici concluzia că efectul caracterului impulsiv al proceselor de anexare și de detașare de particule materiale se manifestă în ecuația de mișcare corespunzătoare rotației instantanee prin prezența termenilor

$$\bar{r}'_a \times \frac{dM_a}{dt}(\bar{v}_a^* - \bar{v}_a) = \bar{r}'_a \times \overline{F}_{ra} = \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{ra}) \qquad (20.113)$$

și

$$-\bar{r}'_d \times \frac{dM_d}{dt}(\bar{v}_d^* - \bar{v}_d) = \bar{r}'_d \times \overline{F}_{rd} = \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{rd}), \qquad (20.114)$$

avînd dimensiuni fizice de momente ale forțelor reactive și numite din acest motiv *momente ale forțelor reactive de anexare*, respectiv *de detașare*.

Cu notațiile (20.97), (20.98), (20.113) și (20.114), ecuațiile vectoriale (20.96) și (20.112) vor putea fi scrise sub următoarea formă finală

$$\left|\begin{array}{l} M\bar{a}_Q + \left[\dfrac{dM_a}{dt}(\bar{v}_Q - \bar{v}_a) - \dfrac{dM_d}{dt}(\bar{v}_Q - \bar{v}_a)\right] = \overline{\mathcal{F}}_a + \overline{\mathcal{F}}_p + \overline{F}_{ra} + \overline{F}_{rd}; \\ M\bar{r}'_C \times \bar{a}_Q + J\bar{\varepsilon} + \dfrac{dJ}{dt}\bar{\omega} + M\bar{v}_{C_r} \times \bar{v}_Q + \left[\dfrac{dM_a}{dt}(\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \right. \\ \left. - \bar{r}'_a \times \bar{v}_a) - \dfrac{dM_d}{dt}(\bar{r}'_C \times \bar{v}_Q - \bar{r}'_d \times \bar{v}_d)\right] = \overline{\mathfrak{M}}_{a_Q} + \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} + \\ + \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{ra}) + \overline{\mathcal{M}}_Q(\overline{F}_{rd}). \end{array}\right| \qquad (20.115)$$

și vor reprezenta *ecuațiile vectoriale ale dinamicii rigidului cu masă variabilă impulsiv*; prin proiectarea primei ecuații pe axele reperului fix și a celei de-a doua pe axele reperului invariabil atașat rigidului cu masă variabilă, se poate obține și *sistemul de ecuații scalare ale dinamicii rigidului cu masă variabilă impulsiv*.

Scanned with CamScanner

Se va observa că în condiţiile

$$\bar{v}_a^* \equiv \bar{v}_a\,; \qquad \bar{v}_d^* \equiv \bar{v}_d, \tag{20.116}$$

cu consecinţele

$$\bar{F}_{ra} = \bar{F}_{rd} \equiv 0\,; \qquad \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_{ra}) = \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_{rd}) \equiv 0, \tag{20.117}$$

sistemul de ecuaţii (20.115) va coincide cu sistemul (20.87).

De asemenea, sistemul (20.115) de ecuaţii vectoriale va lua forme simplificate în următoarele cazuri particulate:

—pentru schimb de particole materiale cu exteriorul realizat numai prin proces de anexare, această situaţie crespunzînd condiţiilor.

$$\frac{dM_a}{dt} = 0\,; \qquad \frac{dJ}{dt} = 0\,; \tag{20.118}$$

—pentru schimb de particole materiale realizat numai prin proces de detaşare, acest caz corespunzînd condiţiilor

$$\frac{dM_a}{dt} = 0\,; \qquad \frac{dJ}{dt} = 0\,; \tag{20.119}$$

—în fine, pentru condiţiile

$$\frac{dM_a}{dt} = \frac{dM_d}{dt} \equiv 0\,; \qquad \frac{dJ_a}{dt} = \frac{dJ_d}{dt} \equiv 0, \tag{20.120}$$

cu consecinţe directe

$$\bar{v}_{C_r} \equiv 0\,; \qquad \bar{F}_{ra} = \bar{F}_{ra} \equiv 0, \tag{20.121}$$

vor rezulta ecuaţiile vectoriale obişnuite ale rigidului cu masă constantă corespunzătoare condiţiilor cinematice precizate pentru modelul mecanic adoptat, ($\bar{\omega} \times \bar{r}'_O = 0\,;\ \bar{v}_C = \bar{v}_Q$).

20.1.4. Dinamica punctului material cu masă variabilă

1°. Definiţia punctului material cu masă variabilă

Ca şi în mecanica rigidului cu masă constantă, şi în mecanica rigidului cu masă variabilă dinamica punctului material va reprezenta o aproximare a dinamicii rigidului, corespunzătoare celor două con-

diţii restrictive pe care trebuie să le satisfacă simultan corpurile asimilate cu puncte materiale :

1) *Condiţii de gabarit*, adică dimensiuni reduse şi deci valori foarte mici ale momentelor de inerţie axiale.

2) *Condiţii cinematice*, adică viteze unghiulare foarte mici, deci rotaţii lente.

Ca şi în dinamica punctului material cu masă constantă, aproximarea va consta în neglijarea, în condiţiile precizate mai sus, a tuturor termenilor datoraţi rotaţiilor instantanee în jurul polilor legaţi de rigidele asimilabile cu puncte materiale, atît în expresiile caracteristicilor cinetice şi dinamice, cît şi în ecuaţiile vectoriale ale mişcării.

Rezultă de aici că în dinamica punctului material cu masă variabilă vor putea fi aceptate mai întîi aproximările

$$\bar{r}'_O = \bar{r}_{C_r} = \bar{r}'_{C_{db}} = \bar{r}'_a = \bar{r}'_d \equiv 0, \tag{20.122}$$

cu consecinţele

$$\bar{v}_{C_r} \simeq 0\,; \qquad \bar{v}_a = \bar{v}_d \simeq \bar{v}_Q \tag{20.123}$$

şi

$$\overline{\mathfrak{M}}_{a_k} = \overline{\mathfrak{M}}_{p_Q} = \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_{rd}) = \bar{\mathcal{M}}_Q(\bar{F}_{ra}) = 0. \tag{20.124}$$

În al doilea rînd, vor putea fi aceptate condiţiile

$$\bar{\mathcal{K}}_{Q_{rot}} = J\bar{\omega} \simeq = 0\,; \quad \bar{\mathcal{E}}_{rot} = \frac{1}{2} J\bar{\omega}^2 \simeq 0\,; \quad \mathcal{P}_{rot} = \overline{\mathfrak{M}}_Q \bar{\omega} \simeq 0 \tag{20.125}$$

Pentru a se preciza că un rigid cu masă variabilă a fost asimilat cu un punct material cu masă variabilă, se vor introduce notaţiile specifice dinamicii punctului material, adică

$$\begin{cases} M(t) \to m(t)\,; \quad M_a(t) = m_a(t)\,; \quad M^0_{db} - M_d(t) \to m^0_{db} - m_d(t)\,; \\ \bar{r}_Q \to \bar{r}\,; \qquad \bar{v}_Q \to \bar{v}\,; \qquad \bar{a}_Q \to \bar{a} \end{cases} \tag{20.126}$$

2°. Problemele generale ale dinamicii punctului material cu masă variabilă

a) *Caracteristicile inerțiale* ale punctului material cu masă variabilă. Se vor reduce numai la masa acelui punct, avînd, la momentul $t \in [0\,;\, t_f]$, valoarea

$$\boxed{m(t) = m_c + m_{db}^0 + m_a(t) - m_d(t)} \tag{20.127}$$

b) *Caracteristicile cinetice* ale punctului material cu masă variabilă vor fi reprezentate prin :

— *Impulsul punctului material*, determinat prin relația

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}} = m(t)\,\bar{v}}\,; \tag{20.128}$$

— *Momentul cinetic în polul fix al punctului material*, definit prin relația

$$\boxed{\bar{\mathcal{K}} = \bar{r} \times m(t)\,\bar{v} = \bar{r} \times \bar{\mathcal{H}}}\,, \tag{20.129}$$

care evidențiază valabilitatea, și aici, a teoremei lui Varignon.

— *Energia cinetică a punctului material*, definită prin relația

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, m(t)\,\bar{v}^2} \tag{20.130}$$

c) *Caracteristicile dinamice* vor fi reprezentate și în dinamica punctului material cu masă variabilă prin

— *Torsorul în polul fix al forțelor exterioare*, active și pasive, la care este supus punctul material respectiv, avînd forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{T}}(\bar{\mathcal{F}}) = \begin{cases} \bar{\mathcal{F}} = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p \\ \bar{\mathcal{M}} = \bar{r} \times \bar{\mathcal{F}} = \bar{r} \times (\bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p) \end{cases}} \tag{20.131}$$

precum și prin *precum în polul fix al forțelor reactive*, avînd forma

$$\boxed{\bar{\mathcal{F}}(\bar{F}_r)=\left\{\begin{array}{l}\bar{\mathcal{F}}_r=\bar{F}_{ra}+\bar{F}_{rd}\\ \\ \bar{\mathcal{M}}_r=\bar{r}\times\bar{\mathcal{F}}_r=\bar{r}\times(\bar{F}_{ra}+\bar{F}_{rd})\end{array}\right\}} \tag{20.132}$$

— *Lucrul mecanic elementar* și *puterea mecanică* a forțelor aplicate punctului material cu masă variabilă, definite prin relațiile

$$\boxed{d\mathcal{L}=\bar{F}\,d\bar{r}}, \tag{20.133}$$

respectiv

$$\boxed{\mathcal{P}=\bar{F}\bar{v}}, \tag{20.134}$$

3°. Ecuațiile dinamicii punctului material cu masă variabilă

a) *Teoremele fundamentale ale dinamicii punctului material cu masă variabilă neimpulsiv* vor fi exprimate și acum prin relațiile (20.63), (20.70) și (20.85), cu considerarea condițiilor (20.123) și a notațiilor (20.126), rezultînd astfel :

— *Teorema impulsului*, exprimată prin relația

$$\boxed{\dot{\bar{\mathcal{K}}}-\left[\frac{dm_a}{dt}-\frac{dm_d}{dt}\right]\bar{v}=\bar{\mathcal{F}}_a+\bar{\mathcal{F}}_p}, \tag{20.135}$$

sau încă, ținînd seama și de relațiile (20.126) și (20.127), prin relația

$$\boxed{m(t)\,\bar{a}=\bar{\mathcal{F}}_a+\bar{\mathcal{F}}_p} \tag{20.136}$$

— *Teorema momentului cinetic*, exprimată prin una din relațiile

$$\boxed{\dot{\bar{\mathcal{K}}}-\left[\frac{dm_a}{dt}-\frac{dm_d}{dt}\right](\bar{r}\times\bar{v})=\bar{\mathcal{M}}_a+\bar{\mathcal{M}}_p,} \tag{20.137}$$

sau, dacă se ţine seama şi de relaţiile (20.126) şi (20.128),

$$\boxed{\bar{r} \times m\bar{a} = \overline{\mathfrak{M}}_a + \overline{\mathfrak{M}}_p = \bar{r} \times (\bar{\mathscr{F}}_a + \bar{\mathscr{F}}_p)}, \qquad (20.138)$$

observîndu-se, din ultima relaţie, că şi în dinamica punctului material cu masă variabilă, relaţia exprimînd teorema momentului cinetic este o consecinţă a relaţiei exprimînd teorema impulsului.

— *Teorema energiei*, exprimată prin una din relaţiile

$$\boxed{\dot{\mathscr{E}} - \frac{1}{2}\left(\frac{dm_a}{dt} - \frac{dm_d}{dt}\right)v^2 = \mathscr{P}_a + \mathscr{P}_p}, \qquad (20.139)$$

sau, avînd în vedere şi relaţiile (20.126) şi (20.129)

$$\boxed{m(t)\,\bar{v}\,\bar{a} = \mathscr{P}_a + \mathscr{P}_p} \qquad (20.140)$$

Se va observa că relaţiile (20.136), (20.138) şi (20.140) sînt identice, ca formă, cu cele scrise în dinamica punctului material cu masă constantă, cu sigura deosebire că masa este aici o funcţie cunoscută de timp.

b) *Ecuaţia vectorială a dinamicii punctului material cu masă variabilă.* Ca şi în dinamica punctului material cu masă constantă, şi în dinamica punctului material cu masă variabilă, ecuaţiile vectoriale ale mişcării se vor reduce numai la ecuaţia corespunzătoare teoremei impulsului.

Ecuaţia vectorială a dinamicii punctului material cu masă variabilă neimpulsiv. Va fi reprezentată chiar prin relaţia (20.136), la care se reduce, de altfel, şi prima dintre ecuaţiile (20.87) în condiţiile (20.123); în mod obişnuit, această ecuaţie se scrie sub forma

$$\boxed{m(t)\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\mathscr{F}}_a + \bar{\mathscr{F}}_p} \qquad (20.141)$$

Scanned with CamScanner

Ecuaţia vectorială a dinamiciipunctului material cu masă variabilă impulsiv. Va fireprezentată prin prima dintre ecuaţiile (20.115), scrisă, prin considerarea condiţiilor (20.123) şi a notaţiilor (20.126), sub forma

$$\boxed{m(t)\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p + \bar{F}_{ra} + \bar{F}_{rd}}, \tag{20.142}$$

cu

$$\bar{F}_{ra} = \frac{dm_a}{dt}(\bar{v}_a^* - \bar{v}); \quad \bar{F}_{rd} = -\frac{dm_d}{dt}(\bar{v}_d^* - \bar{v}), \tag{20.143}$$

această ecuaţie fiind cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de *ecuaţia generalizată a lui Mescerskii.*

Ecuaţia (20.142) capătă următoarele forme particulare:

— *Ecuaţia lui Mescerski pentru proces unic de anexare impulsivă de particole materiale,* corespunzătoare condiţiilor

$$\frac{dm_d}{dt} \equiv 0; \quad \left(\frac{dm_a}{dt} = \frac{dm}{dt}\right), \tag{20.144}$$

cînd relaţia (20.142) ia forma

$$\boxed{m(t)\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p + \frac{dm}{dt}(\bar{v}_a^* - \bar{v})}. \tag{γ0.145}$$

— *Ecuaţia lui Mescerski pentru proces unic de detaşare impulsivă de particule materiale,* corespunzătoare condiţiilor

$$\frac{dm_a}{dt} \equiv 0; \quad -\frac{dm_d}{dt} = \frac{dm}{dt}, \tag{20.146}$$

pentru care relaţia (20.142) capătă forma

$$\boxed{m(t)\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\mathcal{F}}_a + \bar{\mathcal{F}}_p + \frac{dm}{dt}(\bar{v}^* - \bar{v})} \tag{20.147}$$

Scanned with CamScanner

— *Ecuația lui Levi-Civita*, corespunzătoare condițiilor

$$\bar{v}_a^* = \bar{v}_d^* \equiv 0, \tag{20.148}$$

adică, atunci cînd masele care se anexează se găsesc în repaos înainte de anexare, iar masele care s-au detașat rămîn în repaus după detașare, în această situație ecuația (20.142) luînd forma

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m(t)\,\bar{v}) = \bar{\mathscr{F}}_a + \bar{\mathscr{F}}_p}. \tag{20.149}$$

Se înțelege ușor că în condițiile

$$\bar{v}_a^* = \bar{v}_d^* = \bar{v} \tag{20.150}$$

se va regăsi ecuația (20.141), corespunzătoare proceselor neimpulsive de anexare și detașare de particule materiale, iar în condițiile

$$\frac{dm_a}{dt} = \frac{dm_d}{dt} \equiv 0 \tag{20.151}$$

se va regăsi ecuația fundamentală a dinamicii punctului material cu masă constantă.

20.2 *Dinamica sistemelor de rigide cu mase variabile*

Se va numi *sistem mecanic cu masă variabilă* un sistem de rigide în care cel puțin unul din elementele lui are masă variabilă în intervalul de timp în care se studiază mișcarea sistemului.

În cele ce urmează, se va admite că toate elementele sistemului mecanic cu masă variabilă execută mișcări spațiale, cu axele de rotație instantanee $Q_i z_i'$ de direcții fixe în spațiu și coincizînd cu axele centrale de inerție ale elementelor (S_i) și că modelul de rigid cu masă variabilă este cel adoptat și în primul punct al paragrafului.

Scanned with CamScanner

Întrucît ecuaţiile dinamicii rigidului cu masă constantă pot fi considerate ca forme particulare ale ecuaţiilor (20.115) ale dinamicii rigidului cu masă variabilă, corespunzătoare condiţiilor

$$\frac{dM_a}{dt} = \frac{dM_d}{dt} \equiv 0\,; \qquad \frac{dJ_a}{dt} = \frac{dJ_d}{dt} \equiv 0, \tag{20.152}$$

rezultă că nu se va impune nici o constrîngere dacă, în expunerea ce va fi prezentată în continuare, toate elementele sistemului mecanic vor fi considerate rigide cu mase variabile impulsiv.

Ca şi în dinamica sistemelor de rigide cu mase constante, şi în dinamica sistemelor de rigide cu mase variabile se va adăuga la simbolurile prin care se desemnează diversele mărimi mecanice care intervin în ecuaţiile de mişcare, indicele de ordine (i) al elementului (S_i), la care se referă mărimile respective.

Este uşor de înţeles că toate noţiunile generale ale dinamicii sistemelor de rigide cu mase constante, cum sînt cele prin care se definesc caracteristicile inerţiale, caracteristicile cinetice şi caracteristicile dinamice, sau cele ale mecanicii analitice, îşi vor păstra valabilitatea şi în dinamica sistemelor de rigide cu mase variabile.

Astfel, impulsul total, momentul cinetic total în polul fix şi energia cinetică totală a unui sistem de rigide cu mase variabile vor fi definite prin relaţiile

$$\boxed{\bar{\mathscr{H}} = \sum_{i=1}^{n} M_i(t)\,\bar{v}_{Q_i}}, \tag{20.153}$$

respectiv

$$\boxed{\bar{\mathscr{K}} = \sum_{i=1}^{n} [\bar{r}_{Q_i} \times M_i(t)\,\bar{v}_{Q_i} + M_i(t)\,\bar{r}'_{Q_i} \times \bar{v}_{Q_i} + J_i(t)\bar{\omega}_i]} \tag{20.154}$$

şi

$$\boxed{\mathscr{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} [M_i(t)\,\bar{v}^2_{Q_i} + J_i(t)\,\bar{\omega}_i^2]} \tag{20.155}$$

pentru modelul considerat de element constitutiv al sistemului mecanic.

Scanned with CamScanner

20.2.1. Solicitările de inerţie în dinamica sistemelor de rigide cu mase variabile

Componentele torsorilor în polii Q_i ai forţelor de inerţie ale elementelor (S_i) ale unui sistem mecanic cu masă variabilă vor fi definite prin relaţiile

$$\bar{F}_i^{\prime} = -\int_{(M_i(t))} dm\,\bar{a} = -\int_{(M_{ic})} dm\,\bar{a} - \int_{(M_{ia}(t)} dm\,\bar{a} - \int_{[M^0_{i_{db}} - M_{id}(t)]} dm\,\bar{a};$$

$$\overline{\mathfrak{M}}^{\prime}_{Q_i} = -\int_{(M_i(t))} \bar{r}' \times dm\,\bar{a} = -\int_{(M_{ic})} \bar{r}' \times dm\,\bar{a} - \int_{(M_{ia}(t))} \bar{r}' \times dm\,\bar{a} -$$

$$- \int_{[M^0_{i_{db}} - M_{id}(t)]} \bar{r}' \times dm\,\bar{a} \tag{20.156}$$

În baza relaţiilor (20.58), (20.59) şi (20.60), rezultă imediat expresia forţei rezultante de inerţie a elementului (S_i) cu masă variabilă

$$\bar{F}_i^{\prime} = -\left\{\dot{\overline{\mathscr{H}}}_i - \left[\frac{dM_{ia}}{dt}\bar{v}_{ia} - \frac{dM_{id}}{dt}\bar{v}_{id}\right]\right\}. \tag{20.157}$$

Pentru calculul celor trei integrale din expresia momentului $\overline{\mathfrak{M}}^{\prime}_{Q_i}$; se vor face mai întîi înlocuirile

$$\bar{a} = \bar{a}_{Q_i} + \bar{\varepsilon}_i \times \bar{r}' + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}') = \bar{a}_{Q_i} + \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_i \times \bar{r}')$$

şi

$$\bar{r}' \times dm \frac{d}{dt}(\omega_i \times \bar{r}') = \frac{d\bar{r}'}{dt} \underbrace{\times dm(\bar{\omega}_i \times \bar{r}')}_{0} + \bar{r}' \times dm \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_i \times \bar{r}') =$$

$$= \frac{d}{dt}\{[\bar{r}' \times dm\,(\bar{\omega}_i \times \bar{r}')]\} = \frac{d}{dt}\{[\bar{r}' \times (\bar{\omega}_i \times r')]\,dm\},$$

în baza cărora, cea de-a doua dintre expresiile (10.156) ale solicitărilor de inerţie va lua forma

$$\mathfrak{M}^{i}_{Q_i} = -\Big[\int\limits_{(M_{ic})} \bar{r}'\,dm + \int\limits_{(M_{ia}(t))} \bar{r}'\,dm + \int\limits_{[M^0_{idb}-M_{ia}(t)]} \bar{r}'\,dm\Big] \times \bar{a}_{Q_i} -$$

$$-\Big\{\int\limits_{(M_{ic})} \frac{d}{dt}[\bar{r}' \times dm\,(\bar{\omega}_i \times \bar{r}')] + \int\limits_{(M_{ia}(t))} \frac{d}{dt}[\bar{r}' \times dm(\bar{\omega}_i \times \bar{r}')] +$$

$$+ \int\limits_{[M^0_{idb}-M_{ia}(t)]} \frac{d}{dt}[\bar{r}' \times dm\,(\bar{\omega}_i \times \bar{r}')]\Big\}. \qquad (20.158)$$

Prima paranteză pătrată din mombrul drept al ultimei relaţii reprezintă momentul static faţă de polul Q al rigidului (S_i) cu masă variabilă, adică se poate scrie

$$\int\limits_{(M_{ic})} \bar{r}'\,dm + \int\limits_{(M_{ia}(t))} \bar{r}'\,dm + \int\limits_{[M^0_{idb}-M_{ia}(t)]} \bar{r}'\,dm = M_i(t)\,\bar{r}'_{O_i} \qquad (20.169)$$

De asemenea, poate fi scrisă imediat semnificaţia primei integrale din acolada din membrul drept al relaţiei (20.158), cunoscută din dinamica rigidului cu masă constantă, adică

$$\int\limits_{(M_{ic})} \frac{d}{dt}[\bar{r}' \times dm\,(\bar{\omega}_i \times \bar{r}')] = \frac{d}{dt}\Big(\int\limits_{(M_{ic})} \bar{r}' \times dm(\bar{\omega}_i \times \bar{r}')\Big) = \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Q_{i_{rot}}} \qquad (20.160)$$

$\mathcal{K}_{Q_{i_{rot_c}}} = J_{ic}\omega_i$ fiind, în condiţiile precizate pentru modelul mecanic adoptat, momentul cinetic în polul Q al subdomeniului cu masă con-

stantă din elementul (S_i), corespunzător rotației instantanee a acestuia în jurul polului Q_i.

Celelalte două integrale din acolada menționată mai sus vor putea fi scrise, prin utilizarea formulei (20.55), sub formele

$$\int\limits_{M_{ia}(t))} \frac{d}{dt}\{[\bar{r}' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')]\, dm\} = \frac{d}{dt}\left\{ \int\limits_{(M_{ia}(t))} [\bar{r}' \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}')]\, dm - \right.$$

$$\left. - \frac{dM_{ia}}{dt}[\bar{r}'_{ia} \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}'_{ia})] \right. \tag{20.161}$$

și

$$\int\limits_{[M^0_{i_{db}} - M_{id}(t)]} \frac{d}{dt}\{[\bar{r}' \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}')]\, dm = \frac{d}{dt}\left\{ \int\limits_{[M^0_{i_{db}} - M_{id}(t)]} [\bar{r} \times (\bar{\omega}_i \times \right.$$

$$\left. \times \bar{r}')]\, dm \right\} + \frac{dM_{id}}{dt}[\bar{r}'_{id} \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}'_{id})], \tag{20.162}$$

$\bar{r}'_{ia}$ și $\bar{r}'_{id}$ fiind vectorii de poziție, în raport cu polii Q_i, ai punctelor din elementul (S_i) în care se anexează masele dM_{ia} și se detașează masele dM_{id} la momentul t.

Observînd, pe de o parte, că acoladele din membrul drept al relațiilor (20.161) și (20.162) reprezintă momentele cinetice în polul Q_i al celor două subdomenii cu mase variabile ale elementului (S_i), corespunzătoare rotațiilor instantanee în jurul polului Q_i, $\bar{\mathcal{K}}_{Q_{i_{rot_a}}}$ și $\bar{\mathcal{K}}_{Q_{i_{rot_{db}}}}$ și, pe de altă parte, că se pot efectua și înlocuirile evidente

$$\bar{\omega} \times \bar{r}'_{ia} = \bar{v}_{ia} - \bar{v}_{Qi}\,; \qquad \bar{\omega}_i \times \bar{r}'_{id} = \bar{v}_{id} - \bar{v}_{Qi} \tag{20.163}$$

$-\bar{v}_{ia}$ și $\bar{v}_{id}$ fiind vitezele punctelor din elementul (S_i) în care se produc, la momentul t, anexările și detașările de particole materiale, vor mai

putea fi scrise relaţiile

$$\int_{(M_{ia}(t))} \frac{d}{dt}\{[\bar{r}' \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}')\, dm\} = \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Q_{i_{rot_a}}} - \frac{dM_{ia}}{dt}(\bar{r}'_{ia} \times \bar{v}_{ia}) +$$

$$+ \frac{dM_{ia}}{dt}\bar{r}'_{ia} \times \bar{v}_{Q_i};$$

$$\int_{[M^0_{i_{db}} - M_{id}(t)]} \frac{d}{dt}\{[\bar{r}' \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}')]\, dm\} = \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Q_{i_{rot_{ab}}}} + \frac{dM_{id}}{dt}(\bar{r}'_{id} \times \bar{v}_{id}) -$$

$$- \frac{dM_{id}}{dt}\bar{r}'_{id} \times \bar{v}_{Q_i}. \tag{20.164}$$

În baza relaţiilor (20.159), (20.160), (20.164) şi a egalităţii evidente

$$\dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Q_{i_{rot_c}}} + \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Q_{i_{rot_a}}} + \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Q_{i_{rot_{db}}}} = \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Q_{i_{rot}}} \tag{20.165}$$

expresia (20.158) a momentului $\overline{\mathfrak{M}}^i_{Q_i}$ va lua forma

$$\overline{\mathfrak{M}}^i_{Q_i} = -\left\{M_i(t)\,\bar{r}'_{C_i} \times \bar{a}_{Q_i} + \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{Q_{i_{rot}}} - \left[\frac{dM_{ia}}{dt}(\bar{r}'_{ia} \times \bar{v}_{ia}) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{dM_{id}}{dt}(\bar{r}'_{id} \times \bar{v}_{id})\right] + \left[\frac{dM_{ia}}{dt} \; ' \; \frac{dM_{id}}{dt} - \bar{r}'_{id}\right] \times \bar{v}_{Q_i}\right\} \tag{20.166}$$

Folosindu-se relaţia (20.55), va putea fi scrisă egalitatea

$$\frac{dM_{ia}}{dt}\bar{r}'_{ia} - \frac{dM_{id}}{dt}\bar{r}'_{id} = \frac{d}{dt}\left[\int_{(M_{ia}(t))} dm\,\bar{r}' + \int_{[M^0_{i_{db}} - M_{id}(t)]} dm\,\bar{r}'\right] -$$

$$- \left[\int_{)M_{ia}(t))} \frac{d}{dt}(dm\,\bar{r}') + \int_{[M^0_{i_{db}} - M_{id}(t)]} \frac{d}{td}(dm\,\bar{r}')\right]$$

cu

$$\int\limits_{(M_{ta}(t))} \frac{d}{dt}(dm\,\bar{r}') = \int\limits_{(M_{ta}(t))} dm\,(\bar{\omega}_t \times \bar{r}') = \bar{\omega}_t \times \left(\int\limits_{(M_{ta}(t))} dm\,\bar{r}' \right) =$$

$$= \bar{\omega}_t \times M_{ta}\,\bar{r}'_{O_{ta}} = 0\,;$$

$$\int\limits_{[M^0_{t_{db}} - M_{td}(t)]} \frac{d}{dt}(dm\,\bar{r}') = \int\limits_{[M^0_{t_{db}} - M_{td}(t)]} dm\,(\bar{\omega}_t \times \bar{r}') =$$

$$= \bar{\omega}_t \times \left(\int\limits_{[M^0_{t_{db}} - M_{td}(t)]} dm\,\bar{r}' \right) = \bar{\omega}_t \times [M^0_{t_{db}} - M_{td}(t)]\,\bar{r}'_{C_{db}} = 0,$$

ca urmare a coliniarității — în condițiile modelului mecanic adoptat - a vectorilor $\bar{\omega}_t$, $\bar{r}'_{O_{ta}}$ și $\bar{r}'_{O_{t_{db}}}$. Rezultă astfel relația

$$\frac{dM_{ta}}{dt}\bar{r}'_{ta} - \frac{dM_{td}}{dt}\bar{r}'_{td} = \frac{d}{dt}\left[\int\limits_{(M_{ta}(t))} dm\,\bar{r}' + \int\limits_{[M^0_{t_{db}} - M_{td}(t)]} dm\,\bar{r}' \right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\{M_{ta}\,\bar{r}'_{C_{ta}} + [M^0_{t_{db}} - M_{td}(t)]\,\bar{r}'_{C_{t_{db}}}\}$$

sau încă, ținînd seama și de egalitatea (20.16), mai rezultă

$$\frac{dM_{ta}}{dt}\bar{r}'_{ta} - \frac{dM_{td}}{dt}\bar{r}'_{td} = \frac{d}{dt}[M_t\,\bar{r}'_{O_t} - M_{t_c}\,r_{C_{t_c}}] =$$

$$= \frac{d}{dt}[M_t\,\bar{r}'_{O_t}] = \frac{dM_t}{dt}\bar{r}'_{O_t} + M_t\frac{d\bar{r}_{O_t}}{dt},$$

adică

$$\frac{dM_{ta}}{dt}\bar{r}'_{ta} - \frac{dM_{td}}{dt}\bar{r}'_{ta} = \frac{dM_t}{dt}\bar{r}'_{O_t} + M_t\,\bar{v}_{O_{tr}},$$

anularea termenului $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_{ic}\bar{r}'_{O_{ic}}) = M_{ic}\bar{\omega}_i \times \bar{r}'_{O_{ic}}$ fiind justificată şi aici de coliniaritatea vectorilor $\bar{\omega}_i$ şi $\bar{r}'_{O_{ic}}$; în baza ultimei relaţii, expresia (20.166) a momentului rezultant în polul Q_i al forţelor de inerţie ale elementului (S_i) cu masă variabilă va lua forma

$$\overline{\mathfrak{M}}^{i}_{Q_i} = -\left\{M_i(t)\bar{r}'_{O_i} \times \bar{a}_{Q_i} + \dot{\bar{\mathcal{K}}}_{i_{rot}} + M_i \bar{v}_{C_{ir}} \times \bar{v}_{Q_i} + \left[\frac{dM_{ia}}{dt}(\bar{r}'_{O_i} \times \bar{v}_{Q_i} - \bar{r}'_{ia} \times \bar{v}_{ia}) - \frac{dM_{id}}{dt}(\bar{r}'_{O_i} \times \bar{v}_{Q_i} - \bar{r}'_{id} \times \bar{v}_{id})\right]\right\} \tag{20.167}$$

Ţinînd seama acum şi de expresiile (20.23) şi (20.25) — la ultima cu considerarea şi a relaţiilor (20.27), (20.28), (20.29) şi (20.19) — ale impulsului şi momentului cinetic în polul Q_i corespunzător rotaţiei elementului (S_i) în jurul acestui pol, vor rezulta următoarele expresii finale ale componentelor torsorului în polul Q_i al forţelor de inerţie ale elementului (S_i) din sistemul mecanic cu masă variabilă:

$$\bar{\mathcal{F}}_{Q_i}(\bar{\mathcal{F}}^{i}_{i}) = \begin{cases} \bar{F}^{i}_{i} = -\left\{M_i \bar{a}_{Q_i} + \left[\frac{dM_{ia}}{dt}(\bar{v}_{Q_i} - \bar{v}_{ia}) - \frac{dM_{id}}{dt}(\bar{v}_{Q_i} - \bar{v}_{id})\right]\right\}; \\ \overline{\mathfrak{M}}^{i}_{Q_i} = -\left\{M_i \bar{r}'_{O_i} \times \bar{a}_{Q_i} + J_i \bar{\varepsilon}_i + \frac{dJ_i}{dt}\bar{\omega}_i + M_i \bar{v}_{C_{i_r}} \times \bar{v}_{Q_i} + \left[\frac{dM_{ia}}{dt}(\bar{r}'_{O_i} \times \bar{v}_{Q_i} - \bar{r}_{ia} \times \bar{v}_{ia}) - \frac{dM_{id}}{dt}(\bar{r}'_{O_i} \times \bar{v}_{Q_i} - \bar{r}'_{id} \times \bar{v}_{id})\right]\right\}. \end{cases} \tag{20.168}$$

20.2.2. Forme ale ecuațiilor dinamicii sistemelor de rigide cu mase variabile

Cele trei forme principale ale ecuațiilor dinamicii sistemelor de rigide cu mase constante — ecuațiile corespunzătoare teoremelor fundamentale vectoriale ale dinamicii, ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert și ecuațiile lui Lagrange de specia a doua —, vor putea fi scrise, așa cum se va arăta în continuare, și în dinamica sistemelor de rigide cu mase variabile, evident, cu modificările corespunzătoare noului model mecanic adoptat.

Toate aceste ecuații vor fi stabilite în ipoteza că procesele de anexare și de detașare de particole materiale au caracter impulsov, aceste ecuații, mai generale, putînd fi particularizate, așa cum s-a arătat la primul subpunct al paragrafului, atît la cazul proceselor neimpulsive de schimburi de particole materiale cu exteriorul, cît și la cazurile cînd schimburile cu exteriorul se fac prin procese unice, fie de anexare, fie de detașare de particole materiale; de asemenea, așa cum s-a mai menționat, aceste ecuații includ, ca forme particulare, și ecuațiile dinamicii rigidelor de mase constante.

În ceea ce privește caracteristicile inerțiale ale elementelor (S_i) cu mase variabile, ele vor fi considerate funcțiuni de timp atît direct, cît și prin intermediul parametrilor de poziție independenți ai sistemului mecanic, respectiv prin intermediul coordonatelor generalizate ale sistemului.

1°. Ecuațiile vectoriale ale mișcării corespunzătoare teoremelor torsorilor impulsurilor

Aceste ecuații, scrise pentru fiecare din elementele sistemului mecanic, vor avea formuele (20.115), cu următoarele modificări, ușor de înțeles:

— toate mărimile mecanice care figurează în ecuații vor căpăta indicele de ordine ale elementului (S_i) pentru care se scriu ecuațiile, elementul fiind considerat complet izolat din sistem;

— membrii din dreapta ai ecuațiilor vor trebui să conțină atît solicitările exterioare — active și pasive — aplicate elementului (S_i) și solicitările reactive corespunzătoare celor două procese de schim-

buri de particule materiale cu exteriorul, cît şi solicitările interioare, active şi pasive — la care este supus rigidul izolat din sistem.

În consecinţă, pentru a descrie mişcările elementelor (S_i) izolate din sistemul mecanic cu masă variabilă considerat, ecuaţiile vectoriale (20.115), stabilite pentru un singur rigid, vor trebui scrise acum sub formele

$$M_i \bar{a}_{Q_i} + \left[\frac{dM_{ia}}{dt} (\bar{v}_{Q_i} - \bar{v}_{i_a}) - \frac{dM_{id}}{dt} (\bar{v}_{Q_i} - \bar{v}_{i_d}) \right] =$$

$$= \bar{\mathcal{F}}_{ext_{a_i}} + \bar{\mathcal{F}}_{ext_{p_i}} + \bar{F}_{i_{ra}} + \bar{F}_{i_{rd}} + \bar{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} + \bar{\mathcal{F}}_{int_{p_i}};$$

$$M_i \bar{r}'_{C_i} \times \bar{a}_{Q_i} + J_i \bar{\varepsilon}_i + \frac{dJ_i}{dt} \bar{\omega}_i + M_i \bar{v}_{C_{i_r}} \times \bar{v}_{Q_i} +$$

$$+ \left[\frac{dM_{ia}}{dt} (\bar{r}'_{C_i} \times \bar{v}_{Q_i} - \bar{r}'_{i_a} \times \bar{v}_{i_a}) - \frac{dM_{id}}{dt} (\bar{r}'_{C_i} \times \bar{v}_{Q_i} - \bar{r}'_{i_d} \times \bar{v}_{i_d}) \right] =$$

$$= \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_{Q_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_{Q_i}}} + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{F}_{i_{ra}}) + \bar{\mathcal{M}}_{Q_i}(\bar{F}_{i_{rd}}) + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_{Q_i}}} + \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_{Q_i}}}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (20.169)$$

Se înţelege că aceste ecuaţii generale vor putea fi particularizate la toate cazurile de rigide care se deplasează în condiţii mai simple privind schimbul de particole materiale cu exteriorul şi chiar la rigidele cu masă constantă din sistem.

De asemenea, este uşor de înţeles că prin înlocuirea celei de-a doua dintre ecuaţiile (20.169) cu ecuaţia (20.70), corespunzătoare polului fix O, comun tuturor elementelor sistemului mecanic, prin însumarea — separată a ecuaţiilor de impulsuri şi separat a ecuaţiilor de momente cinetice — scrise pentru toate elementele sistemului mecanic şi prin considerarea condiţiilor cunoscute

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{F}}_{int_{a_i}} = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mathcal{F}}_{int_{p_i}} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_i}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_i}} = 0,$$

pe care trebuie să le satisfacă sistemul solicitărilor interioare obişnuite, vor putea fi obţinute şi ecuaţiile vectoriale ale mişcării scrise pentru întregul sistem mecanic.

Scanned with CamScanner

Prin proiectarea primei dintre ecuaţiile (20.169) pe axele reperului fix, la care este raportată mişcarea sistemului mecanic, şi a celei de-a doua ecuaţii vectoriale pe axele reprrelor invariabil ataşate elementelor sistemului mecanic, se obţin şi sistemele de ecuaţii scalare ale dinamicii sistemelor mecanice cu mase variabile.

2°. Ecuaţiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert

Prin considerarea expresiilor (20.168) ale componentelor torsorilor în polii Q_i ai solicitărilor de inerţie ale elementelor (S_i) din sistemul mecanic cu masă variabilă considerat, ecuaţiile vectoriale (20.169) ale mişcării elementului (S_i) vor putea fi scrise sub forma mai concentrată

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\mathscr{F}}_{ext_i} + \bar{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}} + \bar{F}'_i + \bar{F}_{i_{r_a}} + \bar{F}_{i_{r_d}} + \bar{\mathscr{F}}_{int_{a_i}} + \bar{\mathscr{F}}_{int_{p_i}} = 0\,;\\
&\bar{\mathscr{M}}_{ext_{a_{Q_i}}} + \bar{\mathscr{M}}_{ext_{p_{Q_i}}} + \bar{\mathscr{M}}'_{Q_i} + \bar{\mathscr{M}}_{Q_i}(\bar{F}'_{i_{r_a}}) + \mathscr{M}_{Q_i}(\bar{F}_{i_{r_d}}) +\\
&\bar{\mathscr{M}}_{int_{a_{Q_i}}} + \bar{\mathscr{M}}_{int_{p_{Q_i}}} = 0\,;\\
&(i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}\right\}, \tag{20.170}$$

care se vor numi *ecuaţiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert, scrise pentru elemente izolate din sistemul mecanic cu masă variabilă.*

Prin proiectarea primei ecuaţii pe axele reperului fix şi a celei de-a doua ecuaţii pe axele reperului ataşat elementului (S_i), se obţine şi sistemul de ecuaţii scalare de echilibru dinamic ale lui d'Alembert, scrise pentru elemente izolate din sistemul cu masă variabilă.

Se înţelege că şi aceste ecuaţii vor putea fi particularizate la cazurile mai simple de schimburi de particole materiale cu exteriorul.

De asemenea, nu este greu de înţeles că prin înlocuirea celei de-a doua dintre ecuaţiile (20.170) cu ecuaţiile de momente în raport cu polul fix, prin însumarea — separat a ecuaţiilor, de forţe şi separat a ecuaţiilor de momente — a tuturor acestor ecuaţii, scrise pentru toate elementele sistemului mecanic şi prin considerarea din nou a condiţiilor de echivalenţă cu zero a sstemului de solicitări interioare

Scanned with CamScanner

obișnuite, se vor putea obține și *ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert scrise pentru întregul sistem mecanic cu masă variabilă*, aceste ecuații avînd formele

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}}+\bar{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}}+\bar{F}'_i+\bar{F}_{i_{r_a}}+\bar{F}_{i_{r_d}})=0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_i}}+\overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_i}}+\overline{\mathfrak{M}}'_i+\bar{\mathscr{M}}(\bar{F}_{i_{r_a}})+\bar{\mathscr{M}}(\bar{F}_{i_{r_d}})=0 \qquad (20.171)$$

3°. Ecuațiile mecanicii analitice

a) *Ecuația generală (simbolică) a dinamicii sistemelor de rigide cu mase variabile.* Întrucît legăturile, exterioare și interioare, active și pasive, la care sînt supuse elementele sistemului mecanic cu masă variabilă sînt aplicate, în baza ipotezelor de lucru adoptate, numai în subdomeniile cu mase constante ale elementelor, rezultă că pentru un asemenea sistem mecanic va putea fi definit un sistem de deplasări virtuale, la translații și rotații, compatibile cu legăturile, $\delta\bar{r}_{Q_i}$ și $\delta\bar{\Theta}_i$, $(i=1, 2, \ldots, n)$, absolut la fel ca și în dinamica sistemelor de rigide cu mase constante. În cele ce urmează, aceste deplasări vor fi considerate ca variații sincrone de tip Lagrange.

Pentru stabilirea ecuației generale a dinamicii sistemelor de rigide cu mase variabile se va pleca, ca și în dinamica sistemelor de rigide cu mase constante, tot de la ecuațiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert, scrise pentru elemente izolate din siste, dar cu următoarele două modificări față de forma (20.170) a acestor ecuații :

— Se vor introduce, ca și în mecanica analitică a sistemelor cu mase constante, notațiile

$$\bar{\mathscr{F}}_{ext_{a_i}}+\bar{\mathscr{F}}_{int_{a_i}}=\bar{\mathscr{F}}_{a_i}; \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{a_{Q_i}}}+\overline{\mathfrak{M}}_{int_{a_{Q_i}}}=\overline{\mathfrak{M}}_{a_{Q_i}} \qquad (20.172)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

și

$$\bar{\mathscr{F}}_{ext_{p_i}}+\bar{\mathscr{F}}_{int_{p_i}}=\bar{\mathscr{F}}_{p_i}; \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{ext_{p_{Q_i}}}+\overline{\mathfrak{M}}_{int_{p_{Q_i}}}=\overline{\mathfrak{M}}_{p_{Q_i}} \qquad (10.173)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

Scanned with CamScanner

— Se vor considera, datorită complexităţii problemelor, numai cazurile cînd toate solicitările disipative — exterioare şi interioare — pot fi neglijate, aceasta însemnînd că solicitările pasive la care sînt supuse elementele (S_i) se vor reduce numai la componentele ideale ale torsorilor reacţiunilor legăturilor pasive — exterioare şi interioare aplicate elementelor respective, adică vor rezulta condiţiile

$$\bar{\mathscr{F}}_{p_i} = \bar{R}_{i_{id}}; \qquad \overline{\mathfrak{M}}_{Q_i} = \overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}(\bar{R}_{i_{id}}). \tag{20.174}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

În această situaţie, ecuaţiile de echilibru dinamic ale lui d'Alembert scrise pentru elemente (S_i) izolate din sistem vor lua formele

$$\bar{\mathscr{F}}_{a_i} + \bar{F}_i^i + \bar{F}_{i_{ra}} + \bar{F}_{i_{rd}} + \bar{R}_{i_{id}} = 0;$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{aQ_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}^i + \bar{\mathscr{M}}_{Q_i}(\bar{F}_{i_{ra}}) + \bar{\mathscr{M}}_{Q_i}(\bar{F}_{i_{rd}}) + \overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}(\bar{R}_{i_{id}}) = 0.$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n) \tag{205·17}$$

Multiplicînd prima ecuaţie, scalar, cu deplasarea virtuală la translaţie, $\delta\bar{r}_{Q_i}$, a elementului respectiv şi pe cea de-a doua ecuaţie cu depasalrea virtuală la rotaţie, $\delta\,\bar{\Theta}_i$, a aceluiaşi element şi însumînd apoi toate aceste ecuaţii astfel multiplicate, scrise pentru toate elementele sistemului mecanic, se obţine, ţinînd seama şi de condiţia

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{R}_{i_{id}}\,\delta\bar{r}_{Q_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}(\bar{R}_{i_{id}})\,\delta\bar{\Theta}_i) = \delta\mathscr{L}_{R_{id}} = 0, \tag{20.176}$$

justificată de modul de definire a deplasărilor virtuale şi de compatibilitatea lor cu legăturile pasive aplicate sistemului mecanic, următoarea relaţie generală

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{\mathscr{F}}_{a_i}\,\delta\bar{r}_{Q_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{Q_i}}\delta\bar{\Theta}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i^i\,\delta\bar{r}_{Q_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{Q_i}^i\delta\bar{\Theta}_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_{i_{ra}}\delta\bar{r}_{Q_i} + \bar{\mathscr{M}}_{Q_i}(\bar{F}_{i_{ra}})\,\delta\bar{\Theta}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_{i_{rd}}\,\delta\bar{r}_{Q_i} + \bar{\mathscr{M}}_{Q_i}(\bar{F}_{i_{rd}})\delta\bar{\Theta}_i) = 0 \tag{20.1177}$$

numită *ecuația generală (simbolică) a dinamicii sistemelor de rigide cu mase variabile.*

Avînd în vedere semnificațiile celor patru grupuri de termeni din relația (20.177), această ecuație va mai putea fi retranscrisă sub forma

$$\boxed{\delta\mathscr{L}_a + \delta\mathscr{L}^i + \delta\mathscr{L}_{ra} + \delta\mathscr{L}_{rd} = 0,} \qquad (20.178)$$

ea exprimînd acum *principiul deplasărilor virtuale*, sau *principiul lui d'Alembert-Lagrauge în dinamica sistemelor de rigide cu mase variabile impulsiv*, căruia i se poate da următoarea formulare:

„În cazul unui sistem mecanic constituit din rigide cu mase variabile impulsiv, supus la legături cu solicitări disipative neglijabile și aflat în mișcare în mediu cu rezistență neglijabilă, suma lucrurilor mecanice virtuale ale solicitărilor active, ale solicitărilor de inerție și ale solicitărilor reactive de anexare și de detașare de particole materiale ale elementelor sistemului este în permanență egală cu zero".

b) *Ecuațiile lui Langrange de specia a doua.* Lucrul mecanic virtual al solicitărilor active corespunzătoare întregului sistem mecanic cu masă variabilă va putea fi exprimat cu ajutorul forțelor generalizate active și al deplasărilor virtuale generalizate, adică

$$\delta\mathscr{L}_a = \sum_{k=1}^{p} Q_{a_k}\,\delta_{q_k}, \qquad (20.179)$$

cu forțele generalizate active date de relațiile

$$Q_{a_k} = \sum_{i=1}^{n}\left(\overline{\mathscr{F}}_{a_i}\frac{\partial\,\bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} + \overline{\mathfrak{M}}_{a_{Q_i}}\frac{\partial\overline{\Theta}_i}{\partial q_k}\right), \qquad (20.180)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

cu

$$\frac{\partial\overline{\Theta}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_k}\bar{k}_i', \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, p) \qquad (20.181)$$

în condițiile modelului mecanic adoptat și în condițiile de lucru acceptate de la început.

Scanned with CamScanner

Expresii analoage vor putea fi stabilite şi pentru lucrurile mecanice virtuale ale solicitărilor reactive, adică vor putea fi scrise relaţiile

$$\delta \mathcal{L}_{ra} = \sum_{k=1}^{p} Q_{ra_k} \delta q_k , \tag{20.182}$$

respectiv

$$\delta \mathcal{L}_{rd} = \sum_{k=1}^{p} Q_{rd_k} \delta q_k , \tag{20.183}$$

cu *forţele generalizate reactive de anexare* şi *de detaşare* date de relaţiile

$$Q_{ra_k} = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{F}_{i_{ra}} \frac{\partial \bar{r}_{O_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathcal{M}}_{O_i}(\bar{F}_{i_{ra}}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right), \tag{20.184}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

respectiv

$$Q_{rd_k} = \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{F}_{i_{rd}} \frac{\partial \bar{r}_{O_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathcal{M}}_{O_i}(\bar{F}_{i_{rd}}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} \right), \tag{20.185}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

aceste forţe generalizate fiind deci, prin intermediul mărimilor $\frac{\partial \bar{r}_{O_i}}{\partial q_k}$ şi $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}$ şi al forţelor reactive şi al momentelor lor, funcţii de timp, de parametrii lagrangeieni de poziţie şi de vitezele generalizate.

În fine, o expresie analoagă poate fi scrisă şi pentru lucru mecanic virtual al solicitărilor de inerţie, adică

$$\delta \mathcal{L}^{i} = \sum_{i=1}^{p} Q_k^{i} \delta q_k , \tag{20.186}$$

cu forţele generalizate de inerţie Q_k^{i} date de relaţiile

$$Q_k^{i} = \sum_{i=1}^{n} (\bar{F}_i^{i} \delta \bar{r}_{O_i} + \overline{\mathfrak{M}}_{O_i}^{i} \delta \bar{\Theta}_i), \tag{20.187}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

rămînînd doar să se exprime aceste din urmă forţe generalizate în funcţie de derivatele parţiale ale energiei cinetice a sistemului în raport cu coordonatele şi vitezele generalizate, aşa cum s-a procedat şi în mecanica analitică a sistemelor de rigide cu mase constante.

Înlocuind în relaţiile (20.187) componentele torsorilor în polii Q_i ai solicitărilor de inerţie ale elementelor (S_i) cu expresiile (20.157) şi (20.166), se ajunge la următoarele expresii ale forţelor generalizate de inerţie :

$$Q_k^* = -\sum_{i=1}^{n}(M_i \bar{r}'_{O_i} \times \bar{a}_{Q_i}) \frac{\delta \bar{\Theta}_i}{\delta q_k} - \sum_{i=1}^{n}\left[\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} + \dot{\bar{\mathscr{K}}}_{Q_{i_{rot}}} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{dM_{ia}}{dt}\left\{\bar{v}_{i_a} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} - [\bar{r}'_{i_a} \times (\bar{v}_{Q_i} - \bar{v}_{i_a})] \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right\} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{dM_{id}}{dt}\left\{\bar{v}_{i_d} \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} - [\bar{r}'_{i_a} \times (\bar{v}_{Q_i} - \bar{v}_{i_d})] \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right\}. \tag{20.1188}$$

Este uşor de observat, în primul rînd, că în condiţiile modelului mecanic adoptat, vectorii $\bar{r}'_{O_i} = x'_{O_i}(t)\,\bar{k}'_i$ şi $\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\,\bar{k}'_i$ sînt coliniari, rezultînd astfel o primă concluzie

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i \bar{r}'_{O_i} \times \bar{a}_{Q_i}) \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = 0. \tag{20.189}$$

Trecînd la cea de-a doua sumă din membrul drept al relaţiei (20.188), se va remarca apoi că se poate face înlocuirea

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} + \dot{\bar{\mathscr{K}}}_{Q_{i_{rot}}} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right] = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{H}}_i \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathscr{K}}_{Q_{i_{rot}}} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right]\right\} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{H}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k}\right) + \bar{\mathscr{K}}_{Q_{i_{rot}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right)\right],$$

sau încă, folosind și aici cele două serii de relații Lagrange, adică

$$\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_k}; \qquad \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} \tag{20.190}$$

și

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial q_j}; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial q}, \tag{20.191}$$

mai rezultă

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i \frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} + \dot{\bar{\mathscr{K}}}_{Q_{i_{rot}}} \frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q}\right] = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{H}}_i \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_k} + \bar{\mathscr{K}}_{Q_{i_{rot}}} \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\dot{q}_k}\right]\right\} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\bar{\mathscr{H}}_i \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial q_k} + \bar{\mathscr{K}}_{Q_{i_{rot}}} \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial q}\right] = \frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[M_i \bar{v}_{Q_i} \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + J_i \bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k}\right]\right\} - \sum_{i=1}^{n}\left[M_i \bar{v}_{Q_i} \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial q_k} + J_i \bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial q_k}\right]. \tag{20.192}$$

Întrucît, în ipotezele de lucru adoptate, caracteristicile inerțiale ale elementelor cu masă variabilă nu depind de vitezele generalizate, se va putea scrie egalitatea

$$M_i \bar{v}_{Q_i} \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_k} + J_i \bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left\{\frac{1}{2}[M_i \bar{v}_{Q_i}^2 + J_i \bar{\omega}_i^2]\right\}$$

în baza căreia va rezulta, ținînd seama și de relația (20.155), următoarea semnificație pentru prima sumă din membrul drept al relației (20.192)

$$\sum_{i=1}^{n}\left[M_i \bar{v}_{Q_i} \frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_k} + J_i \bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left\{\frac{1}{2}[M_i \bar{v}_{Q_i}^2 + J_i \bar{\omega}_i^2]\right\} = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}, \right. \tag{20.193}$$

În ceea ce privește cea de-a doua sumă din membrul drept al relației (20.192), se va observa că întrucît caracteristicile inerțiale ale elementelor sistemului mecanic pot depinde, în baza ipotezelor de

lucru adoptate la începutul subpunctului 2, de coordonatele generalizate ale sistemului mecanic, va putea fi scris şirul de relaţii

$$\sum_{i=1}^{n}\left[M_i\bar{v}_{Q_i}\frac{\partial\bar{v}_{Q_i}}{\partial q_k}+J_i\bar{\omega}_i\frac{\partial\bar{\omega}_i}{\partial q_k}\right]=\frac{\partial}{\partial q_k}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[M_i\bar{v}_{Q_i}^2+J_i\bar{\omega}_i]\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial M_{ia}}{\partial q_k}-\frac{\partial M_{id}}{\partial q_k}\right)\bar{v}_{Q_i}^2+\left(\frac{\partial J_{ia}}{\partial q_k}-\frac{\partial J_{id}}{\partial q_k}\right)\bar{\omega}_i^2\right],$$

sau încă, ţinînd seama şi de semnificaţia primei paranteze din membrul drept al ultimei relaţii, mai rezultă

$$\sum_{i=1}^{n}\left[M_i\bar{v}_{Q_i}\frac{\partial\bar{v}_{Q_i}}{\partial q_k}+J_i\bar{\omega}_i\frac{\partial\bar{\omega}_i}{\partial q_k}\right]=\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_k}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial M_{ia}}{\partial q_k}-\frac{\partial M_{id}}{\partial q_k}\right)\bar{v}_{Q_i}^2+\left(\frac{\partial J_{ia}}{\partial q_k}-\frac{\partial J_{id}}{\partial q_k}\right)\bar{\omega}_i^2\right]. \tag{20.194}$$

În baza relaţiilor (20.193) şi (20.194), cea de-a doua sumă din membrul drept al relaţiei (20.188) va mai lua forma

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\dot{\bar{\mathscr{H}}}_i\frac{\partial\bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k}+\dot{\bar{\mathscr{K}}}_{Q_{i_{rot}}}\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right]=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial q_k}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial M_{ia}}{\partial q_k}\bar{v}_{Q_i}^2+\frac{\partial J_{id}}{\partial q_k}\bar{\omega}_i^2\right]-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial M_{id}}{\partial q_k}\bar{v}_{Q_i}^2+\frac{\partial J_{id}}{\partial q_k}\bar{\omega}_i^2\right]. \tag{20.195}$$

Trecînd, în fine, şi la ultimele două paranteze patrate din membrul drept al relaţiei (20.188), se va remarca că prin utilizarea din nou a relaţiilor (20.190) aceste paranteze vor putea fi scrise sub formele

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{dM_{ia}}{dt_k}\left\{\bar{v}_{i_a}\frac{\partial\bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k}-[\bar{r}'_{i_a}\times(\bar{v}_{Q_i}-\bar{v}_{ia})]\frac{\partial\bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right\}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{dM_{ia}}{dt}\left\{\bar{v}_{i_a}\frac{\partial\bar{v}_{Q_i}}{\partial\dot{q}_k}-[\bar{r}'_{i_a}\times(\bar{v}_{Q_i}-\bar{v}_{ia})]\frac{\partial\bar{\omega}_i}{\partial\dot{q}_k}\right\} \tag{20.196}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dM_{id}}{dt}\left\{\bar{v}_{i_d}\frac{\partial \bar{r}_{Q_i}}{\partial q_k} - [\bar{r}'_{i_d}\times(\bar{v}_{Q_i}-\bar{v}_{id})]\frac{\partial \bar{\Theta}_i}{\partial q_k}\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{dM_{id}}{dt}\left\{\bar{v}_{i_d}\frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_k} - [\bar{r}'_{i_d}\times(\bar{v}_{Q_i}-\bar{v}_{id})]\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k}\right\}. \quad (20.197)$$

În baza relaţiilor (20.189), (20.195), (20.196) şi (20.197), expresia (20.188) a forţei generalizate Q_k^i va lua forma

$$Q_k^i = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_k}\right] + \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{dM_{ia}}{dt}\left[\bar{v}_{ia}\frac{\partial \bar{v}_{Qi}}{\partial \dot{q}_k} - \right.\right.$$

$$\left. - [\bar{r}'_{ia}\times\bar{v}_{Q_i}-\bar{v}_{ia})]\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial M_{ia}}{\partial q_k}\bar{v}^2_{Q_i} + \frac{\partial J_{ia}}{\partial q_k}\bar{\omega}_i^2\right]\Bigg\} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{dM_{id}}{dt}\left[\bar{v}_{id}\frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_k} - [\bar{r}'_{id}\times(\bar{v}_{Q_i}-\bar{v}_{id})]\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial M_{id}}{\partial q_k}\bar{v}^2_{Q_i} + \frac{\partial J_{id}}{\partial q_k}\bar{\omega}_i^2\right]\right\}, \quad (20.189)$$

$$(k = 1,2,\ldots,p).$$

Mărimile

$$Q_{sa_k} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dM_{ia}}{dt}\left[\bar{v}_{ia}\frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_k} - [\bar{r}'_{ia}\times(\bar{v}_{Q_i})]\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial M_{ia}}{\partial q_k}\bar{v}^2_{Q_i} + \frac{\partial J_{ia}}{\partial q_k}\bar{\omega}_i^2\right]\right\} \quad (20.199)$$

şi

$$Q_{sd_k} = -\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{dM_{id}}{dt}\left[\bar{v}_{id}\frac{\partial \bar{v}_{Q_i}}{\partial \dot{q}_k} - [\bar{r}'_{id}\times(\bar{v}_{Q_i}-\bar{v}_{id})]\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial M_{id}}{\partial q_k}\bar{v}^2_{Q_i} + \frac{\partial J_{id}}{\partial q_k}\bar{\omega}_i^2\right]\right\}, \quad (20.200)$$

Scanned with CamScanner

datorate numai variaţiilor caracteristicilor inerţiale ale elementelor sistemului mecanic, poartă numele de *forţe generalizate suplimentare de anexare*, respectiv *de detaşare de particule materiale.*

Revenind la relaţia (20.178) şi exprimînd lucrurile mecanice virtuale cu ajutorul forţelor generalizate şi al deplasărilor virtuale generalizate corespunzătoare, rezultă egalitatea

$$\sum_{i=1}^{p}(Q_{a_k}+Q_k^i+Q_{ra_k}+Q_{rd_k})\delta q_k=0, \tag{20.201}$$

din care, avînd în vedere arbitrarietatea deplasărilor virtuale generalizate, vor rezulta concluziile

$$Q_{a_k}+Q_k^i+Q_{ra_k}+Q_{rd_k}=0\,; \qquad (k=1,2,\ldots,p) \tag{20.202}$$

sau încă, ţinînd seama şi de expresiile (20.198), cu notaţiile (20.199) şi (20.200), ale forţelor generalizate de inerţie, se vor mai putea scrie relaţiile

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_k}=Q_{a_k}+Q_{ra_k}+Q_{rd_k}+Q_{sa_k}+Q_{sd_k} \qquad (k=1,2,\ldots,p)} \tag{20.203}$$

care vor reprezenta *sistemul de ecuaţii Lagrange de specia a doua pentru sisteme mecanice cu masă variabilă impulsiv.*

Se înţelege că şi ecuaţiile (20.203) vor putea fi particularizate atît la sisteme cu procese unice de schimburi de particole materiale cu exteriorul (de exemplu numai anexări de particole, — caz caracterizat prin condiţiile $Q_{rd_k}=Q_{sd_k}=O$, sau numai detaşări de particule —caz caracterizat prin condiţiile $Q_{ra_k}=Q_{rd}=O$), cît şi la schimbul neimpulsiv de particole materiale cu exteriorul ($Q_{ra_k}=Q_{rd_k}=0$); de asemenea, în condiţiile

$$Q_{ra_k}=Q_{rd_k}=Q_{sa_k}=Q_{sd_k}=0, \qquad (k=1,2,\ldots,p) \tag{20.204}$$

ecuaţiile (20.204) vor coincide cu ecuaţiile lui Lagrange de specia a doua corespunzătoare sistemelor mecanice cu mase constante.

Scanned with CamScanner

În cazurile cînd solicitările active vor admite o funcție de forță, vor putea fi scrise și celelalte forme ale ecuațiilor mecanicii analitice, similare celora stabilite în dinamica sistemelor de rigide cu mase constante : ecuații Lagrange pentru sisteme mecanice conservative și ecuații canonice.

În ceea ce privește probîemele dinamicii sistemelor de rigide cu mase variabile, ele rămîn ,practic, aceleași ca și în dinamica sistemelor de rigide cu mase constante ; rezolvarea lor — și, în deosebi, a problemelor de tip fundamental — va fi însă mai dificilă, chiar în cazul modelului mecanic simplificat adoptat, datorită gradului crescut de complexitate, produs de prezența, în ecuații, a termenilor datorați variațiilor caracteristicilor inerțiale ale elementelor sistemului mecanic.

Date suplimentare în legătură cu mecanica corpurilor cu mase variabile pot fi găsite în lucrările lui I. V. Mescerski, K. F. Țiolkovski, A. A. Kosmodemianski, T. Levi-Civita, și mai ales ale lui V. S. Novoselov, menționate în bibliografie.

Scanned with CamScanner

BIBLIOGRAFIE

(Extras din literatura de specialitate consultată)

A. REVISTE INTERNAȚIONALE DE RECENZII

1. *Applied Mechanics Reviews* (A critical review of the World Literature in Applied Mechanics and related Engineering Science). ASME, New York, N.Y.
2. *Mathematical Reviews*, AMS, Providence, R.I.
3. *Referativnîi jurnal. Matematika*, VINITI, Akad. Nauk SSSR, Moskva.
4. *Referativnîi jurnal. Mekanika*, VINITI, Akad. Nauk SSSR, Moskva.
5. *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, Springer-Verlag, Berlin.

B. REVISTE DE SPECIALITATE

1. *Acta Mechanika*, Springer-Verlag, Viena.
2. *Archives of Mechanics*, PAN, Varșovia.
3. *Buletinul Institutului politehnic din Iași*, Secț. I și IV.
4. *Construcția de mașini*, Min. Ind. Constr. Mașini Grele, București.
5. *International Journal of Mechanical Science*, Pergamon Press, Oxford.
6. *Journal de Mécanique*, Gauthier-Villars, Paris.
7. *Journal de Mécanique Appliquée*, Gauthier-Villars, Paris.
8. *Le Progrès Scientifique*, Délégation Générale à la recherche scientifique et tehnique. Paris.
9. *Meccanica*, Pergamon Press, New York, AIMETA, Milano.
10. *Mechanism and Machine Theory*, Pergamon Press, New York, N.Y.
11. *Mehanika*, Sbornik perevodov izbrannîh inostrannîh statei, AN. SSSR, Moskva.
12. *Mehanika tverdovo tela*, Akad. Nauk SSSR, Moskva.
13. *Prikladnaia matematika i mehanika*, Moskva.
14. *Revue Roumaine des Sciences Techniques, Série Mécanique Appliquée*, Acad. RSR.
15. *Studia Universitatis BABEȘ-BOLYAI, Series Mathematica-Mechanica*, Cluj-Napoca.
16. *Studii și cercetări de mecanică aplicată*, Acad. RSR, București
17. *Vestnik Moskovskovo Universiteta, Mehanika* Moskva.
18. *Jurnal prikladnoi mehaniki i tehniceskoi fiziki*, Akad. Nauk SSSR, Sib. Otd.

C. LUCRĂRI ALE CONGRESELOR RECENTE INTERNAȚIONALE ȘI NAȚIONALE DE MECANICĂ

1. *CANCAM, Canadian Congress on Applied Mechanics*, Montreal 1975, Vancouver, 1977.
2. *Conferință de Mecanică*, Acad. RSR, București, 1965, 1969, 1973.
3. *IFTOMM, intern.*, SYROM—1973, SYROM—1977, București.
4. *IUTAM CONGRESS*, 1972, Stanford, Cal.; 1976, Delft.
5. *Jugoslovenski Kongres Racionalne i primenjene mehanike*, Sarajevo, 1976.
6. *Teoretichna i prilozhna Mekhanika*, Varna, 1977
7. *Vsesoiuznîi Kongres po teoretičeskoi i prikladnoi mehanike*, Moskva, 1972.
8. *World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Newcastle upon Tyne, 1975; Montreal, 1979.

D. CĂRȚI ȘI TRATATE

1. G. ST. ANDONIE, *Istoria Matematicii aplicate clasice din România. Mecanică și Astronomie*. Ed. Acad. RSR, București, 1972.
2. P. APPELL *Traité de Mécanique rationnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 5 vol., Nouvelle éd., 1955—1958.
3. ST. BĂLAN, I. IVANOV, *Din Istoria Mecanicii*, Ed. științifică, București, 1966.

Scanned with CamScanner

4. A. N. BOGOLIUBOV, *Istoria Mehaniki Maşin*, Izd. Naukova Dumka, Kiev. 1964.
5. GH. BUZDUGAN, L. FETCU, M. RADEŞ, *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Ed. Acad. R.S.R, Bucureşti, 1975.
6. Colectiv de autori, *Mecanică teoretică*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1968, apărută sub redacţia V. Vilcovici, St. Bălan şi R. Voinea.
7. Colectiv de autori, *Mehanika v SSSR za 50 let* ı *1917—1967*, 4 vol., Nauka, Moskva, 1970.
8. V. V. DOBRONRAVOV, *Osnovi mehaniki negolonomnih sistem*, Nauka, Moskva, 1969.
9. R. DUGAS, *Histoire de la Mécanique*, Dunod, Paris, 1950.
10. B. FINZI, *Meccanica razionale*, 2 vol. Zanichelli, Bologna, 1959.
11. Z. GABOŞ, D. MANGERON, I. STAN, *Fundamentele Mecanicii*, Ed. Acad. R.S.R, Bucureşti, 1962.
12. W. GOLDSMITH, *Impact. The Theory and Physical Behaviour of colliding Solids*, London, E. Arnold, 1960.
13. G. GOLDSTEIN, *Klasičeskaia Mehanika*, GITTL, Moskva, 1957.
14. G. HAMEL, *Theoretische Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1949.
15. C. IACOB, *Mecanică teoretică*, Ed. did. ped., Bucureşti, 1971.
16. N. IRIMICIUC, *Mecanica*, Ed. didact. ped., Bucureşti, 1965.
17. A. YU. IŞLINSKI, *Mehanika giroscopiceskih sistem*, ANSSSR, Moskva, 1963.
18. N. A. KILČEVSKI, *Kurs teoreticeskoi mehaniki*, 2 vol, Izd. „NAUKA", Moskva, 1977.
19. A. A. KOSMODEMIANSKII, *Kurs teoretičeskoi mehaniki*, Moskva, 1955.
20. T. LEVI-CIVITA, U. AMALDI, *Kurs teoretičeskoi mehaniki*, 5 vol., Izd. I. L., Moskva, 1951—1955.
21. G. L. LOITSIANSKI, A. I. LURJE, *Kurs teoreticeskoi mehaniki*, 2 vol, GITTL, Moskva, 1954—1955.
22. D. MAŃGERON, N. IRIMICIUC, *Curs de mecanică cu aplicaţii în inginerie*, 4 vol., Ed. Lit. Inst. polit. Iaşi, 1973—1974.
23. I. V. MESCHERSKII, *Rabotî po mehannike tel peremenoi massî*, GITTL, 1955.
24. D. MORORIANU, I. M. STEFAN, *Maeştrii ingenioziţăţii româneşti*, Ed. did. ped., Bucureşti, 1976.
25. I. NEWTON, *Principiile matematice ale filosofiei naturale*, Ed. Acad. RSR, Bucureşti 1956.
26. V. S. NOVOSELOV , *Analiticeskaia mehanika sistem s peremennimi masami*, Izd. Leningradskogo Universiteta, 1969.
27. O. ONICESCU, *Mecanică*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1969.
28. I. I. PLĂCINŢEANU, *Mecanică vectorială şi analitică*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1958.
29. CH. PLATRIER, *Mécanique rationnelle*, Dunod, Paris, 1954.
30. M. RĂDOI, E. DECIU, *Mecanică. Dinamică*, Ed. did. ped., Bucureşti, 1973.
31. R. M. ROSENBERG, *Analytical Dynamics of Discrete Systems*, Plenum Press, New York and London, 1977
32. M. SARIAN, *Mecanica şi rezistenţa materialelor*, vol.I, Editura didact. şi ped., Bucureşti, 1962.
33. AL. STOENESCU, GH. SILAŞ, *Mecanică teoretică*, Ed. did. ped., Bucureşti, 1963.
34. C. K. SUSLOV, *Mecanică raţională*, 2 vol. Bucureşti, 1950.
35. I. SZABO, *Höhere Technische Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1949.
36. R. VOINAROSKI, *Mecanică teoretică*, Ed. did. ped., Bucureşti, 1968.
37. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUŞU, *Mecanică*, Ed. did. ped., Bucureşti, 1975.
38. E. T. WHITTAKER, *A Treatise of the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge, 1937.

Scanned with CamScanner